Compiti di Metodi Matematici per l'Ingegneria
a.a. 2021/2022. Politecnico di Milano
Settimana 13
Prof. M. Bramanti

Riferimenti di studio per la settimana 13:
Libro di testo:
Cap.8, §8.5.2, 8.5.3, 8.5.5.

Esercizi sul metodo della trasformata di Laplace.
A. Svolgere dal libro di testo gli Esercizi 8.13, 8.14, 8.15, 8.17, 8.18, 8.19, 8.20.

B. Svolgere dai temi d'esame dei tre anni passati (scaricabili dalla pagina web del corso, con relativi svolgimenti) gli esercizi che riguardano la trasformata di Laplace. Rientrano tutti nei tipi visti a lezione, in programma.

Approfondimenti
Approfondimento sulle equazioni integrali di Volterra di prima specie
Dopo aver fatto qualcuno degli esercizi sulle equazioni integrali di Volterra di 2^a specie (esercizi 8.17-8.20), affrontare (come approfondimento) il prossimo esercizio.
Esercizio. Si consideri l'equazione integrale

$$\int_0^t \sin(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = f(t)$$

con $y(t)$ incognita e $f(t)$ assegnata. E' un'equazione integrale di Volterra, di convoluzione, *di prima specie*, e a lezione si è detto che queste equazioni sono più difficili di quelle di seconda specie, cioè quelle del tipo

$$y(t) + \int_0^t k(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = f(t).$$

Infatti, se alla prima equazione applichiamo la trasformata di Laplace otteniamo:

$$Y(s)\frac{1}{s^2+1} = F(s)$$
$$Y(s) = \left(s^2+1\right) F(s)$$

e ora, per una generica funzione $f(t)$ Laplace trasformabile, il prodotto $\left(s^2+1\right) F(s)$ potrebbe non essere antitrasformabile. Ad esempio,

$$\text{se } f(t) = 1 \text{ si ha } F(s) = \frac{1}{s} \text{ e}$$
$$\left(s^2+1\right) F(s) = \frac{s^2+1}{s} \to \infty \text{ per } \operatorname{Re} s \to +\infty,$$

perciò certamente la funzione $\frac{s^2+1}{s}$ non è antitrasformabile. Per aver speranza che $\left(s^2+1\right) F(s)$ sia antitrasformabile, $F(s)$ dovrà tendere a zero all'infinito abbastanza rapidamente, ossia il segnale $f(t)$ *dovrà essere abbastanza regolare.* Consideriamo il caso

$$f(t) = t^n.$$

1. Qual è il minimo intero n per cui riuscite ad antitrasformare $\left(s^2+1\right) F(s)$? Perché più grande è n e più regolare è $f(t)$?
2. Detto n_0 questo intero, risolvete l'equazione per $n = n_0$.
3. ...già che ci siete, con poca fatica risolvete l'equazione per ogni $n \geq n_0$.
4. Rispondere ora alle stesse domande per l'equazione

$$y(t) * e^{kt} = t^n$$

e k costante reale non nulla.

5. Rispondere ora alle stesse domande per l'equazione

$$y(t) * t^k = t^n$$

cioè: fissato un intero positivo k, per quali interi positivi n sapete risolvere l'equazione? Risolvetela, quando si può.

Approfondimento sulle applicazioni della trasformata di Laplace ai circuiti elettrici. Le applicazioni del metodo della trasformata di Laplace alla discussione analitica dei circuiti elettrici sono numerose, appena accennate nelle lezioni di questo corso. Lo studente curioso di saperne qualcosa di più (e capire qualche passaggio analitico che forse ha visto fare in altri corsi, di elettrotecnica o elettronica), può scaricare dalla pagina web del corso il pdf di questi approfondimenti (non in programma). Qualcosa di ciò che è scritto in quegli approfondimenti richiede anche la conoscenza della *delta di Dirac*, che in questo corso non viene discussa (ma che lo studente ha probabilmente già visto usare in altri corsi).

Approfondimento sul metodo della trasformata di Laplace per l'equazione di Laguerre. Nel corso abbiamo studiato l'equazione di Laguerre come problema di Sturm-Liouville singolare. Mediante la trasformata di Laplace si può risolvere esplicitamente l'equazione, determinando i polinomi di Laguerre, e si può provare un'identità differenziale che dà un modo alternativo per calcolare i polinomi di Laguerre. Lo studente interessato a questo può leggere il §8.5.6 (non in programma).