Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria A.A. 2021/2022 Domande-tipo di teoria (sul programma della prima prova in itinere)

Marco Bramanti
Politecnico di Milano

October 13, 2021

Parte 1. Elementi di analisi funzionale. Spazi di funzioni continue

1. Si dia la definizione di spazio metrico, successione di Cauchy, spazio metrico completo, spazio vettoriale normato, spazio di Banach. Si facciano esempi di spazi di funzioni con le seguenti caratteristiche:

-uno spazio vettoriale normato e uno spazio vettoriale che non ha una norma naturale;

-uno spazio metrico che non è uno spazio vettoriale;

-uno spazio vettoriale normato completo e uno non completo.

Si sottolinea che tutti gli esempi fatti devono consistere di spazi *di funzioni*, non di spazi di dimensione finita.

2. Per una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definire le nozioni di convergenza puntuale e convergenza uniforme. Enunciare i vari teoremi studiati che, sotto opportune ipotesi che coinvolgono il concetto di convergenza uniforme, garantiscono che certe proprietà di f_n si trasferiscono al limite f. Mostrare quindi con esempi espliciti che, se vengono a cadere le ipotesi, le conclusioni dei precedenti teoremi possono venire a cadere.

3. Enunciare con precisione il teorema sulla derivabilità del limite di una successione di funzioni derivabili. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi. Quindi, enunciare e **dimostrare** il teorema che riguarda $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

4. Di ciascuno dei seguenti spazi di funzioni, dire se è vettoriale, se è normato, se è completo, fornendo le opportune giustificazioni:

a. Lo spazio $C^0[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

b. Lo spazio $C^0(a,b)$ con la norma $\sup_{x\in(a,b)} |f(x)|$.

c. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

d. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

e. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

f. Lo spazio $C_b^0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$ con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

g. Lo spazio $C_*^0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e che tendono a zero all'infinito, con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

h. Lo spazio $C_0^0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e nulle fuori da un intervallo chiuso e limitato (variabile da funzione a funzione), con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

5. Fare esempi di successioni di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f_n \to f$ e...

a. f_n converge puntualmente ma non uniformemente.

b. f_n converge uniformemente.

c. f_n sono continue ma f è discontinua

d. f_n sono limitate ma f è illimitata

e. f_n sono derivabili ma f non è derivabile.

Parte 2. Teoria delle funzioni derivabili di variabile complessa

2.1. La definizione di funzione derivabile in $\mathbb{C}$

1. Dopo aver dato la definizione di derivabilità e derivata per una funzione complessa di variabile complessa, spiegare (enunciando un teorema preciso) la relazione tra il concetto di funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivabile in senso complesso e funzione $\underline{F}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenziabile. **Dimostrare** la validità delle condizioni di Cauchy-Riemann per una funzione derivabile in senso complesso. Quindi, enunciare con precisione e **dimostrare** le conseguenze delle condizioni di Cauchy-Riemann sulle funzioni con parte reale o immaginaria costante.

2. Dopo aver richiamato la definizione delle funzioni trascendenti elementari nel campo complesso $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{Sh} z, \operatorname{Ch} z$**:**

a. dimostrare che si tratta di funzioni olomorfe in tutto il piano complesso;

b. ricavare le formule per la derivata di $e^z, \sin z, \operatorname{Sh} z$**;**

c. calcolare parte reale, parte immaginaria e modulo delle funzione $\sin z, \operatorname{Sh} z$ come funzioni di x, y**,** (oppure $\cos z, \operatorname{Ch} z$) mostrando in particolare che le funzioni sono illimitate e determinando i loro zeri nel piano complesso**;**

d. mostrare che le funzioni $e^z, \operatorname{Sh} z, \operatorname{Ch} z$ sono periodiche, determinandone il periodo;

e. risolvere quindi le equazioni

$$\begin{aligned}\sin z &= 3\\ e^z &= -2\\ \operatorname{Sh} z &= i.\end{aligned}$$

2.2. Alcune applicazioni fisiche e geometriche del concetto di funzione olomorfa

3. Dopo aver richiamato la definizione di funzione armonica e qualche significato fisico di queste funzioni, enunciare con precisione e **dimostrare** il risultato che permette di ottenere funzioni armoniche a partire da funzioni olomorfe.

4. Spiegare in cosa consiste il problema della determinazione dell'armonica coniugata. Enunciare e **dimostrare** un risultato preciso di esistenza dell'armonica coniugata. Esemplificarlo poi nel caso della funzione $u(x, y) = e^x \sin y$**.**

2.3. Integrazione nel campo complesso

5. Dopo aver richiamato la definizione di arco di curva continua, regolare, regolare a tratti, nel campo complesso, dare con precisione la definizione di integrale di linea nel campo complesso. Confrontare questo concetto con i concetti di integrali di linea di prima specie e di seconda specie, che si introducono per funzioni, scalari o vettoriali, di due variabili reali.

6. Dopo aver richiamato la definizione di integrale di linea nel campo complesso, enunciare con precisione le principali proprietà elementari di questo integrale (linearità, additività, cambio di orientazione, maggiorazione del modulo; approssimazione dell'integranda o della curva).

7. Dopo aver richiamato la definizione di integrale di linea nel campo complesso e di primitiva nel campo complesso, enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema fondamentale del calcolo integrale nel campo complesso.

8. Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema di Cauchy dell'integrale nullo, definendo accuratamente i concetti coinvolti. Spiegare poi cosa significa, nel calcolo di un integrale lungo un circuito, che "due circuiti sono equivalenti", **dimostrando** il risultato relativo.

9. Definire, con il linguaggio usato nel contesto delle funzioni di variabile complessa, cosa si intende per: curva continua, chiusa, semplice, regolare, regolare a tratti; circuito; interno di un circuito, aperto connesso, aperto semplicemente connesso, facendo esempi opportuni.

10. Enunciare con precisione e **dimostrare** la prima formula integrale di Cauchy [da non confondere con il teorema di Cauchy dell'integrale nullo], richiamando i risultati utilizzati nella dimostrazione.

11. Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema di regolarità delle funzioni olomorfe e la formula integrale di Cauchy per le derivate.

12. Enunciare con precisione il teorema di regolarità delle funzioni olomorfe (senza dimostrarlo). **Mostrare** come da questo si deduce il fatto che una funzione armonica in un aperto è infinitamente derivabile e che parte reale e immaginaria di una funzione olomorfa sono armoniche.

13. Enunciare con precisione e **dimostrare** il principio di annullamento di una funzione olomorfa in un aperto. Mostrare come da questo si deduce il principio di identità delle funzioni analitiche, e illustrarne qualche conseguenza vista nel corso.

2.4. Punti singolari di una funzione olomorfa e teorema dei residui

14. Dare con precisione le definizioni di: singolarità isolata e non isolata di una funzione olomorfa, residuo di una funzione in una singolarità isolata; singolarità eliminabile, polo di ordine n, singolarità essenziale. Illustrare con esempi ognuno di questi concetti.

15. Dopo aver richiamato la definizione di singolarità isolata, singolarità eliminabile, polo di ordine n, enunciare e **dimostrare** il teorema che descrive il comportamento di una funzione in un intorno di un punto di singolarità eliminabile o di un polo (prolungabilità olomorfa di opportune funzioni).

16. Dopo aver richiamato la definizione di residuo, enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema dei residui. Quindi, enunciare e **dimostrare** le formule per il calcolo del residuo in un polo del prim'ordine o di ordine n**.**

17. Enunciare con precisione e **dimostrare** il risultato che permette di calcolare $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ quando $f(x)$ è una funzione razionale soddisfacente opportune proprietà.

18. Enunciare con precisione e **dimostrare** il risultato che permette di calcolare $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{ikx}dx$ quando $f(x)$ è una funzione razionale soddisfacente opportune proprietà e $k > 0$ (compreso il "lemma del grande cerchio").