Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria
A.A. 2021/2022
Domande-tipo di teoria (sul programma della seconda prova in itinere)

Marco Bramanti
Politecnico di Milano

December 12, 2021

Parte 3. Teoria della misura e dell'integrazione

1. "Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura". Si spieghi cosa significa, con i seguenti passi: dare la definizione di σ-algebra e farne qualche esempio; dare la definizione di misura e farne qualche esempio. (Gli esempi possono utilizzare anche argomenti del corso visti successivamente alle prime definizioni, come la misura di Lebesgue o le misure con peso). Enunciare quindi con precisione il teorema di esistenza della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$, che ne precisa la definizione e le proprietà.

2. In un generico spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, illustrare come si definisce l'integrale, prima per una funzione semplice e positiva, poi per una misurabile positiva e poi per una funzione di segno qualunque o a valori complessi. Richiamare le definizioni dei principali concetti coinvolti. Enunciare quindi le proprietà elementari dell'integrale in questo contesto (linearità, monotonia, proprietà di annullamento, numerabile additività).

3. Enunciare il teorema della convergenza dominata per l'integrale di Lebesgue. Fare esempi di applicazioni teoriche del teorema della convergenza dominata incontrate nel corso.

4. Nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue, si enuncino con precisione il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per un integrale dipendente da un parametro, cioè una funzione del tipo

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y)\, dy,$$

e il teorema sulla continuità di un integrale dipendente da un parametro, e li si dimostrino. Si accenni brevemente a qualche applicazione di questi risultati che si è incontrata nel corso.

5. Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si discuta poi qualche applicazione di questo teorema che si è incontrata nel corso.

6. Si definisca cosa si intende per convoluzione di due funzioni in $\mathbb{R}^n$ e si enunci e dimostri un risultato preciso che riguarda la convoluzione di due funzioni $L^1(\mathbb{R}^n)$. Si enunci poi il risultato analogo che estende il precedente a spazi L^p.

7. Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$ (distinguendo il caso $p < \infty$ e $p = \infty$) e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi enunciare e dimostrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita.

8. Si dia la definizione di operatore lineare continuo tra due spazi vettoriali normati, enunciando anche il teorema che sta alla base di tale definizione. Si dia la definizione di norma di un operatore lineare continuo. Si facciano esempi, incontrati nel corso, di operatori lineari continui tra spazi di funzioni, e un esempio di operatore lineare non continuo.

Parte 4. Spazi di Hilbert e problemi di Sturm-Liouville

Spazi di Hilbert: geometria e analisi di Fourier

1. Dopo aver dato la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare (riportando gli assiomi di prodotto scalare) e aver dato la definizione di norma indotta dal prodotto scalare, enunciare la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, la disuguaglianza triangolare per la norma e l'uguaglianza del parallelogramma.

2. Enunciare e dimostrare il teorema di Pitagora negli spazi vettoriali con prodotto scalare per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e dimostrare la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

3. Dare la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare (in particolare, dando la definizione di prodotto scalare), spazio di Hilbert, e fare esempi di spazi di Hilbert, di spazi con prodotto scalare che non sono di Hilbert, e di spazi di Banach che non sono di Hilbert, giustificando le proprie affermazioni.

4. Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale (finito), enunciare e dimostrare il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert.

5. Dopo aver dato la definizione di sistema ortonormale (finito o numerabile) in uno spazio di Hilbert, e enunciato il teorema delle proiezioni su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert (senza dimostrarlo), enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bessel e il risultato di convergenza di una serie di Fourier (a una somma per ora non precisata).

6. Dopo aver dato la definizione di sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) in uno spazio di Hilbert, enunciare e dimostrare il teorema che riguarda la

trasformata e le serie di Fourier in spazi di Hilbert, rispetto a un s.o.n.c.

7. Dopo aver dato la definizione di sistema ortonormale completo in uno spazio di Hilbert, fare esempi di sistemi ortonormali completi, in opportuni spazi di funzioni, incontrati nel corso.

Problemi di Sturm-Liouville e polinomi ortogonali

1. Dare la definizione di *problema di Sturm-Liouville regolare* e enunciare il teorema relativo ai suoi autovalori e autofunzioni, dimostrando le due affermazioni riguardanti la positività degli autovalori e l'ortogonalità delle autofunzioni.

2. Si consideri l'equazione di Legendre

$$\left(1-x^2\right) y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad \text{per } x \in (-1,1)\,.$$

Dopo averla riscritta nella forma di problema di Sturm-Liouville singolare (perché non è regolare?), dimostrare che gli autovalori sono non negativi e le autofunzioni relative ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali in $L^2(-1,1)$.

3. Si consideri l'equazione di Laguerre

$$xy'' + (1-x)\,y' + \lambda y = 0 \quad \text{per } x \in (0,+\infty)\,.$$

Dopo averla riscritta nella forma di problema di Sturm-Liouville singolare (perché non è regolare?), dimostrare che gli autovalori sono non negativi e le autofunzioni relative ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali in $L^2\left((0,+\infty), e^{-x}dx\right)$.

4. Si consideri l'equazione di Hermite

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Dopo averla riscritta nella forma di problema di Sturm-Liouville singolare (perché non è regolare?), dimostrare che gli autovalori sono non negativi e le autofunzioni relative ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali nello spazio di Hilbert $L^2\left(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx\right)$.

Parte 5. Trasformate integrali e applicazioni

Trasformata di Fourier

1. Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione (senza dimostrazione) le proprietà riguardanti: trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata e derivata; trasformata e convoluzione; teorema di inversione.

2. Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi enunciare con precisione e dimostrare le proprietà della trasformata di Fourier che riguardano: trasformata di una derivata; derivata di una trasformata (queste dimostrazioni sono richieste solo per funzioni di una variabile e derivata prima).

3. Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi enunciare con precisione e dimostrare le proprietà della trasformata di Fourier che riguardano: trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata di una convoluzione.

4. Mostrare come si calcola la trasformata di Fourier della funzione e^{-x^2} in $\mathbb{R}$ e poi $e^{-|x|^2}$ in $\mathbb{R}^n$, giustificando i passaggi.

5. Dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ delle funzioni a decrescenza rapida, enunciare le proprietà di questo spazio rilevanti dal punto di vista della teoria della trasformata di Fourier, dimostrandone alcune.

6. La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$: dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà (senza dimostrazione), dimostrare come sfruttando queste proprietà è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.

7. La trasformata di Fourier in L^2: dopo aver richiamato la definizione di trasformata di Fourier per una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$, enunciarne con precisione le principali proprietà. Dire anche come si può calcolare "in pratica" la trasformata di Fourier di una funzione che sta in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ma non in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Trasformata di Laplace

1. Dare la definizione di funzione L-trasformabile, ascissa di convergenza, semipiano di convergenza, trasformata di Laplace. Quindi, mostrare la relazione fra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier, ricavando l'iniettività della trasformata di Laplace.

2. Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione le proprietà della trasformata di Laplace di una funzione (comportamento all'infinito, derivabilità, formula delle derivate della trasformata).

3. Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e dimostrare le proprietà che riguardano la L-trasformata della convoluzione e della funzione integrale, e la formula dell's-shift per la L-trasformata.

4. Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione le proprietà che riguardano la L-trasformata della derivata prima (con dimostrazione) e derivata n-esima (senza dimostrazione) di una funzione. Ricavare da quest'ultima la proprietà che riguarda la velocità con cui la trasformata di Laplace tende a zero all'infinito.