Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria

Secondo appello. Giugno 2020
A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti
Ore 15.00

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione delle funzioni trascendenti elementari nel campo complesso $e^z, \sin z, \cos z$**:**

a. ricavare l'identità che lega tra loro le funzioni $e^{iz}, \sin z, \cos z$**;**

b. mostrare come dalle precedenti identità si possono calcolare parte reale, parte immaginaria e modulo della funzione $\sin z$ come funzione di x, y**,** mostrando in particolare che la funzione è illimitata (riportare i calcoli, non solo il risultato!)

B. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** la *prima formula integrale* di Cauchy (attenzione: NON confonderla con il teorema di Cauchy dell'integrale nullo), precisando i risultati utilizzati nella dimostrazione.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale (finito), enunciare e **dimostrare** il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert.

D. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi enunciare con precisione e dimostrare le proprietà della trasformata di Fourier che riguardano: trasformata di una derivata; derivata di una trasformata (queste dimostrazioni sono richieste solo per funzioni di una variabile e derivata prima).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Calcolare il seguente integrale con metodi di analisi complessa, giustificando i passaggi, e semplificare il risultato ottenuto:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2x)}{(x^2+5)^2}\,dx.$$

2. (5 punti). Sia

$$f(x) = e^{-x^2}\sin x.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier e considerando nota la trasformata di Fourier $\mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right)(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$.

3. (5 punti). Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la corrente $i(t)$ nel circuito LC descritto dalla seguente equazione integro-differenziale:

$$Li'(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

dove $i(0) = 1, q_0 = 2, L = 3, C = 2$. Si richiede di risolvere prima l'equazione per $v(t)$ generica (ma tutti gli altri parametri e condizioni iniziali aventi i valori specificati).

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Svolgimento Secondo appello. Giugno 2020
A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti
Ore 15.00

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione delle funzioni trascendenti elementari nel campo complesso $e^z, \sin z, \cos z$**:**
a. ricavare l'identità che lega tra loro le funzioni $e^{iz}, \sin z, \cos z$**;**
b. mostrare come dalle precedenti identità si possono calcolare parte reale, parte immaginaria e modulo della funzione $\sin z$ come funzione di x, y**,** mostrando in particolare che la funzione è illimitata (riportare i calcoli, non solo il risultato!)

B. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** la *prima formula integrale* di Cauchy (attenzione: NON confonderla con il teorema di Cauchy dell'integrale nullo), precisando i risultati utilizzati nella dimostrazione.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale (finito), enunciare e **dimostrare** il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert.

D. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi enunciare con precisione e dimostrare le proprietà della trasformata di Fourier che riguardano: trasformata di una derivata; derivata di una trasformata (queste dimostrazioni sono richieste solo per funzioni di una variabile e derivata prima).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Calcolare il seguente integrale con metodi di analisi complessa, giustificando i passaggi, e semplificare il risultato ottenuto:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2x)}{(x^2+5)^2} dx.$$

Per le simmetrie si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2x)}{(x^2+5)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix}}{(x^2+5)^2} dx.$$

La funzione $f(z) = \frac{1}{(z^2+5)^2}$ ha poli del 2° ordine in $z = \pm i\sqrt{5}$, quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix}}{(x^2+5)^2} dx &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{(z^2+5)^2}, i\sqrt{5}\right) = 2\pi i \left(\frac{e^{2iz}}{(z+i\sqrt{5})^2}\right)'_{/z=i\sqrt{5}} \\
&= 2\pi i \left\{ e^{2iz}\left[\frac{2i}{(z+i\sqrt{5})^2} - \frac{2}{(z+i\sqrt{5})^3}\right]\right\}_{/z=i\sqrt{5}} \\
&= 2\pi i e^{-2\sqrt{5}}\left[\frac{2i}{(2i\sqrt{5})^2} - \frac{2}{(2i\sqrt{5})^3}\right] = 2\pi i e^{-2\sqrt{5}}\left[\frac{2i}{-20} - \frac{2}{-i40\sqrt{5}}\right] \\
&= \pi e^{-2\sqrt{5}}\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{10\sqrt{5}}\right] = \frac{\pi}{5} e^{-2\sqrt{5}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right).
\end{aligned}$$

2. (5 punti). Sia

$$f(x) = e^{-x^2} \sin x.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier e considerando nota la trasformata di Fourier $\mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right)(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$.

a. La f è reale, dispari, $\widehat{f}$ sarà immaginaria pura e dispari. Poiché $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sarà anche $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

b. Calcoliamo $\widehat{f}$ con le seguenti considerazioni:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right)(\xi) &= e^{-\pi\xi^2} \\
g(x) &= e^{-\pi x^2} \Rightarrow e^{-x^2} = g^{1/\sqrt{\pi}}(x) \\
\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(\xi) &= \mathcal{F}\left(g^{1/\sqrt{\pi}}\right)(\xi) = \widehat{g}_{1/\sqrt{\pi}}(\xi) = \sqrt{\pi}\widehat{g}\left(\sqrt{\pi}\xi\right) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}
\end{aligned}$$

Quindi usiamo la formula del prodotto per un esponenziale complesso:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(e^{2\pi iax}g(x)\right)(\xi) &= \widehat{g}(\xi-a)\\ \mathcal{F}(g(x)\sin x)(\xi) &= \mathcal{F}\left(g(x)\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)(\xi)=\frac{1}{2i}\left(\widehat{g}\left(\xi-\frac{1}{2\pi}\right)-\widehat{g}\left(\xi+\frac{1}{2\pi}\right)\right).\end{aligned}$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\sin x\right)(\xi) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\left(e^{-\pi^2\left(\xi-\frac{1}{2\pi}\right)^2}-e^{-\pi^2\left(\xi+\frac{1}{2\pi}\right)^2}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}i\left(e^{-\pi^2\left(\xi-\frac{1}{2\pi}\right)^2}-e^{-\pi^2\left(\xi+\frac{1}{2\pi}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

3. (5 punti). Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la corrente $i(t)$ nel circuito LC descritto dalla seguente equazione integro-differenziale:

$$Li'(t)+\frac{1}{C}\left(q_0+\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right)=v(t)$$

dove $i(0)=1, q_0=2, L=3, C=2$. Si richiede di risolvere prima l'equazione per $v(t)$ generica (ma tutti gli altri parametri e condizioni iniziali aventi i valori specificati).

Indicando con $I(s), V(s)$ le trasformate di Laplace di $i(t), v(t)$, rispettivamente, si ha:

$$\begin{aligned}3i'(t)+\frac{1}{2}\left(2+\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) &= v(t)\\ 3(sI(s)-i(0))+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{s}+\frac{I(s)}{s}\right) &= V(s)\\ 3sI(s)-3+\frac{1}{s}+\frac{I(s)}{2s} &= V(s)\\ I(s)\left(3s+\frac{1}{2s}\right) &= V(s)+3-\frac{1}{s}\\ I(s)\left(\frac{6s^2+1}{2s}\right) &= V(s)+\frac{3s-1}{s}\end{aligned}$$

$$I(s)=\left(\frac{2s}{6s^2+1}\right)V(s)+\frac{6s-2}{6s^2+1}\equiv H(s)V(s)+G(s).$$

Ora:

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{2s}{6s^2+1} = \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+\frac{1}{6}} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{3}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\right) \\
G(s) &= \frac{6s-2}{6s^2+1} = \frac{s-\frac{1}{3}}{s^2+\frac{1}{6}} = \frac{s}{s^2+\frac{1}{6}} - \frac{\sqrt{6}}{3}\frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{s^2+\frac{1}{6}} \\
&= \mathcal{L}\left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I(s) &= \mathcal{L}(v * h + g)(s) \\
i(t) &= (v * h)(t) + g(t) \\
&= \cos\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{3}\int_0^t \cos\left(\frac{t-\tau}{\sqrt{6}}\right) v(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}
$$