Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Quarto appello. Settembre 2020 (31 agosto)
A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Fare esempi di successioni di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f_n \to f$ e...
a. f_n converge puntualmente ma non uniformemente.
b. f_n converge uniformemente.
c. f_n sono continue ma f è discontinua
d. f_n sono derivabili ma f non è derivabile.

B. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di funzione armonica, enunciare il risultato che permette di ottenere funzioni armoniche a partire da funzioni olomorfe. Spiegare quindi in cosa consiste il problema della *determinazione dell'armonica coniugata*. Enunciare e **dimostrare** un risultato preciso di esistenza dell'armonica coniugata. Esemplificarlo poi nel caso della funzione $u(x, y) = e^{-x} \cos y$.

C. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$ (distinguendo il caso $p < \infty$ e $p = \infty$) e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi enunciare e dimostrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita.

D. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e dimostrare le proprietà che riguardano la L-trasformata della convoluzione e la L-trasformata della primitiva di una funzione.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo negli eventuali poli del prim'ordine.

$$f(z) = \frac{e^{z+2}-1}{(z^2-4)^2} e^{\frac{1}{z+2i}}.$$

2. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{1}{x^4+4x^2+4}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui. Verificare che $\widehat{f}$ ha effettivamente le proprietà previste.

3. (5 punti). Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(t) - 16\int_0^t (t-\tau)\, e^{-3(t-\tau)} y(\tau)\, d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita y, per un generico termine noto f supposto $\mathcal{L}$-trasformabile. Successivamente, determinare la soluzione corrispondente a $f(t) = e^{-2t}$, semplificando l'espressione ottenuta.

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria

Svolgimento Quarto appello. Settembre 2020 (31 agosto)
A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Fare esempi di successioni di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f_n \to f$ e...
a. f_n converge puntualmente ma non uniformemente.
b. f_n converge uniformemente.
c. f_n sono continue ma f è discontinua
e. f_n sono derivabili ma f non è derivabile.

B. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di funzione armonica e qualche significato fisico di queste funzioni, enunciare il risultato che permette di ottenere funzioni armoniche a partire da funzioni olomorfe. Spiegare quindi in cosa consiste il problema della *determinazione dell'armonica coniugata*. Enunciare e **dimostrare** un risultato preciso di esistenza dell'armonica coniugata. Esemplificarlo poi nel caso della funzione $u(x, y) = e^{-x} \cos y$.

C. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$ (distinguendo il caso $p < \infty$ e $p = \infty$) e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi enunciare e dimostrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita.

D. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e dimostrare le proprietà che riguardano la L-trasformata della convoluzione e la L-trasformata della primitiva di una funzione.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo negli eventuali poli del prim'ordine.

$$f(z) = \frac{e^{z+2} - 1}{\left(z^2 - 4\right)^2} e^{\frac{1}{z+2i}}.$$

I punti da esaminare sono:

$z_{1,2} = \pm 2$ (denominatore di f);

$z_3 = -2i$ (denominatore di $e^{\frac{1}{z+2i}}$)

In $z_{1,2}$, $\left(z^2 - 4\right)^2$ si annulla del 2° ordine. In $z = -2$ il numeratore si annulla del prim'ordine, perciò:

$z = -2$ è polo del prim'ordine;

$z = 2$ è polo del second'ordine;

$z = -2i$ è una singolarità essenziale, perché la funzione $e^{\frac{1}{z+2i}}$ ha infinite potenze negative nel suo sviluppo di Laurent, mentre la funzione $\frac{e^{z+2}-1}{(z^2-4)^2}$ è regolare in un intorno di quel punto.

Calcoliamo

$$\operatorname{Res}(f(z), -2) = \lim_{z \to -2} (z+2) f(z) = \lim_{z \to -2} \frac{(z+2)\left(e^{z+2} - 1\right) e^{\frac{1}{z+2i}}}{(z+2)^2 (z-2)^2} =$$

$$= \lim_{z \to -2} \frac{\left(e^{z+2} - 1\right)}{(z+2)} \cdot \frac{e^{\frac{1}{z+2i}}}{(z-2)^2} = \frac{e^{\frac{1}{-2+2i}}}{(-2-2)^2} = \frac{1}{16} e^{\frac{1}{-2+2i}}.$$

2. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C_*^0, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui. Verificare che $\widehat{f}$ ha effettivamente le proprietà previste.

a. f è reale, pari, C^∞, L^1, $x^2 f \in L^1, x^3 f \notin L^1$, quindi: $\widehat{f}$ reale, pari, tende a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza $1/x^n$, sarà $C_*^0 \cap C^2$ ma ci aspettiamo non C^3.

b. Calcoliamo $\widehat{f}(\xi)$ per $\xi > 0$, sfruttando la simmetria.

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4} e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

$$z^4 + 4z^2 + 4 = \left(z^2+2\right)^2 = 0 \text{ per } z = \pm i\sqrt{2} \text{ poli del } 2^\circ \text{ ordine.}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\left(z^2+2\right)^2} e^{-2\pi i \xi z}, -i\sqrt{2}\right) = -2\pi i \left(\frac{1}{\left(z-i\sqrt{2}\right)^2} e^{-2\pi i \xi z}\right)' \left(-i\sqrt{2}\right) \\
&= -2\pi i \left(e^{-2\pi i \xi z}\left[-2\pi i \xi \frac{1}{\left(z-i\sqrt{2}\right)^2} - 2\frac{1}{\left(z-i\sqrt{2}\right)^3}\right]\right)_{/z=-i\sqrt{2}} \\
&= -2\pi i e^{-2\sqrt{2}\pi\xi}\left[-2\pi i \xi \frac{1}{\left(-2i\sqrt{2}\right)^2} - 2\frac{1}{\left(-2i\sqrt{2}\right)^3}\right] \\
&= -2\pi i e^{-2\sqrt{2}\pi\xi}\left[-2\pi i \xi \frac{1}{-8} - 2\frac{1}{16i\sqrt{2}}\right] = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{2}\pi\xi}\left(2\sqrt{2}\pi\xi + 1\right) \text{ per } \xi > 0.
\end{aligned}$$

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{2}\pi|\xi|}\left(2\sqrt{2}\pi|\xi| + 1\right).$$

3. (5 punti). Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(t) - 16\int_0^t (t-\tau)\, e^{-3(t-\tau)} y(\tau)\, d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita y, per un generico termine noto f supposto $\mathcal{L}$-trasformabile. Successivamente, determinare la soluzione corrispondente a $f(t) = e^{-2t}$, semplificando l'espressione ottenuta.

Indicando con $Y(s), F(s)$ le trasformate di Laplace di $y(t), f(t)$ si ha:

$$\begin{aligned}
Y(s) - 16Y(s)\,\mathcal{L}\left(te^{-3t}\right)(s) &= F(s) \\
Y(s)\left(1 - 16\cdot\frac{1}{(s+3)^2}\right) &= F(s) \\
Y(s)\left(\frac{s^2+6s-7}{s^2+6s+9}\right) &= F(s)
\end{aligned}$$

$$Y(s) = F(s)\left(\frac{s^2+6s-7+16}{s^2+6s-7}\right) = F(s) + F(s)\cdot\frac{16}{(s-1)(s+7)}$$

Ora,

$$\frac{16}{(s-1)(s+7)} = 2\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+7}\right) = \mathcal{L}\left(2\left(e^t - e^{-7t}\right)\right)$$

perciò

$$Y(s) = \mathcal{L}\left(f(t) + f(t) * 2\left(e^t - e^{-7t}\right)\right)$$

e

$$y(t) = f(t) + 2\int_0^t \left(e^{t-\tau} - e^{-7(t-\tau)}\right) f(\tau)\, d\tau.$$

Sia ora $f(t) = e^{-2t}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-2t} + 2\int_0^t \left(e^{t-\tau} - e^{-7(t-\tau)}\right) e^{-2\tau} d\tau \\
&= e^{-2t} + 2\left(e^t \int_0^t e^{-3\tau} d\tau - e^{-7t} \int_0^t e^{5\tau} d\tau\right) \\
&= e^{-2t} + 2\left[e^t \left(-\frac{1}{3}\left(e^{-3t} - 1\right)\right) - e^{-7t}\left(\frac{1}{5}\left(e^{5t} - 1\right)\right)\right] \\
&= e^{-2t} - \frac{2}{3}\left(e^{-2t} - e^t\right) - \frac{2}{5}\left(e^{-2t} - e^{-7t}\right) \\
&= e^{-2t}\left(1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) + \frac{2}{3}e^t + \frac{2}{5}e^{-7t} \\
&= -\frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t + \frac{2}{5}e^{-7t}.
\end{aligned}$$