

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
 Seconda prova in itinere. Gennaio 2020
 A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue, si enuncino con precisione il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per un integrale dipendente da un parametro, cioè una funzione del tipo

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy,$$

e il teorema sulla continuità di un integrale dipendente da un parametro, e li si **dimostrino**. Si accenni brevemente a qualche applicazione di questi risultati che si è incontrata nel corso.

B. (6 punti). Enunciare e **dimostrare** il teorema di Pitagora negli spazi vettoriali con prodotto scalare per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e **dimostrare** la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

C. (6 punti). Dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ delle funzioni a decrescenza rapida, enunciare e dimostrare le proprietà di questo spazio rilevanti dal punto di vista della teoria della trasformata di Fourier.

D. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la L-trasformata della primitiva, della derivata prima e della derivata n -esima di una funzione (quest'ultima, senza dimostrazione). Ricavare da quest'ultima la proprietà che riguarda la velocità con cui la trasformata di Laplace tende a zero all'infinito.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (4 punti). Sia

$$f(x) = x^2 e^{-x} \chi_{(0, +\infty)}(x).$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C_*^0 , L^1 , L^2 , $\mathcal{S}...$), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ utilizzando opportunamente le proprietà della trasformata di Fourier. Verificare che $\widehat{f}$ ha effettivamente le proprietà previste.

2. (6 punti). Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la corrente $i(t)$ nel circuito LC descritto dalla seguente equazione integro-differenziale:

$$Li'(t) + \frac{1}{C} \left(q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right) = v(t)$$

dove $i(0) = 0$, $q_0 = 3$, $L = 4$, $C = 0.5$. Si richiede di:

a. Risolvere prima l'equazione per $v(t)$ generica (ma tutti gli altri parametri e condizioni iniziali aventi i valori specificati).

b. Si consideri ora il caso $v(t) = \chi_{(0, 2\pi\sqrt{2})}(t)$. Calcolare esplicitamente la soluzione in questo caso, semplificando il più possibile l'espressione ottenuta.

3. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2 + 4)(x^2 + 5)}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C_*^0 , L^1 , L^2 , $\mathcal{S}...$), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui. Verificare che $\widehat{f}$ ha effettivamente le proprietà previste.

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Seconda prova in itinere. Gennaio 2020
A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue, si enunciino con precisione il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per un integrale dipendente da un parametro, cioè una funzione del tipo

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy,$$

e il teorema sulla continuità di un integrale dipendente da un parametro, e li si **dimostrino**. Si accenni brevemente a qualche applicazione di questi risultati che si è incontrata nel corso.

Risposta: v. libro di testo, §2.3.4.

B. (6 punti). Enunciare e **dimostrare** il teorema di Pitagora negli spazi vettoriali con prodotto scalare per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e **dimostrare** la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

Risposta: v. libro di testo, §4.2.

C. (6 punti). Dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ delle funzioni a decrescenza rapida, enunciare e dimostrare le proprietà di questo spazio rilevanti dal punto di vista della teoria della trasformata di Fourier.

Risposta: v. libro di testo, §7.4.1.

D. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la L-trasformata della primitiva, della derivata prima e della derivata n -esima di una funzione (quest'ultima, senza dimostrazione). Ricavare da quest'ultima la proprietà che riguarda la velocità con cui la trasformata di Laplace tende a zero all'infinito.

Risposta: v. libro di testo, §8.2.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (4 punti). Sia

$$f(x) = x^2 e^{-x} \chi_{(0, +\infty)}(x).$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\hat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

Rispondere sui seguenti punti: $\hat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\hat{f}$ (C_*^0 , L^1 , L^2 , $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\hat{f}$ utilizzando opportunamente le proprietà della trasformata di Fourier. Verificare che $\hat{f}$ ha effettivamente le proprietà previste.

a. f non è né pari né dispari, quindi $\hat{f}$ non avrà simmetrie. $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $n = 1, 2, 3$, quindi $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$f \in C^1(\mathbb{R})$ con f' regolare a tratti. Infatti, per $x > 0$ si ha: $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$; $f'(0^+) = 0$; $f''(x) = e^{-x}(2 - 4x + x^2)$; $f''(0^+) = 2$. Quindi $\hat{f}(\xi) = o(1/\xi^2)$ per $\xi \rightarrow \infty$. Di conseguenza $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

b. Sia prima $g(x) = e^{-x} \chi_{(0, +\infty)}(x)$. Si ha

$$\hat{g}(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-2\pi i x \xi} dx = \left[\frac{e^{-x-2\pi i x \xi}}{-1-2\pi i \xi} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+2\pi i \xi}.$$

Ora $f(x) = x^2 g(x)$ e ricordando la formula

$$\mathcal{F}(x^2 g(x))(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \hat{g}(\xi)$$

possiamo calcolare

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{1+2\pi i \xi} \right) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{d}{d\xi} \left(-\frac{2\pi i}{(1+2\pi i \xi)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2\pi i \cdot 2 \cdot 2\pi i}{(1+2\pi i \xi)^3} \right) = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{-8\pi^2}{(1+2\pi i \xi)^3} \right) = \frac{2}{(1+2\pi i \xi)^3} \end{aligned}$$

che effettivamente è $C^\infty(\mathbb{R})$ e $o(1/\xi^2)$ per $\xi \rightarrow \infty$.

2. (6 punti). Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la corrente $i(t)$ nel circuito LC descritto dalla seguente equazione integro-differenziale:

$$Li'(t) + \frac{1}{C} \left(q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right) = v(t)$$

dove $i(0) = 0, q_0 = 3, L = 4, C = 0.5$. Si richiede di:

a. Risolvere prima l'equazione per $v(t)$ generica (ma tutti gli altri parametri e condizioni iniziali aventi i valori specificati).

b. Si consideri ora il caso $v(t) = \chi_{(0, 2\pi\sqrt{2})}(t)$. Calcolare esplicitamente la soluzione in questo caso, semplificando il più possibile l'espressione ottenuta.

a. Indicando con $I(s), V(s)$ le trasformate di Laplace di $i(t), v(t)$, rispettivamente, si ha:

$$\begin{aligned} 4i'(t) + 2 \left(3 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right) &= v(t) \\ 4(sI(s) - i(0)) + 2 \left(\frac{3}{s} + \frac{I(s)}{s} \right) &= V(s) \\ I(s) \left(4s + \frac{2}{s} \right) &= V(s) - \frac{6}{s} \\ I(s) \left(\frac{4s^2 + 2}{s} \right) &= V(s) - \frac{6}{s} \\ I(s) &= \left(\frac{s}{4s^2 + 2} \right) V(s) - \frac{3}{2s^2 + 1} \equiv H(s) V(s) + G(s). \end{aligned}$$

Ora:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s}{4s^2 + 2} = \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 + \frac{1}{2}} = \mathcal{L} \left(\frac{1}{4} \cos \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ G(s) &= -\frac{3}{2s^2 + 1} = -\frac{3}{2} \frac{1}{s^2 + \frac{1}{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{s^2 + \frac{1}{2}} \\ &= \mathcal{L} \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(s) &= \mathcal{L}(v * h + g)(s) \\ i(t) &= (v * h)(t) + g(t) \\ &= -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{4} \int_0^t \cos \left(\frac{t-\tau}{\sqrt{2}} \right) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

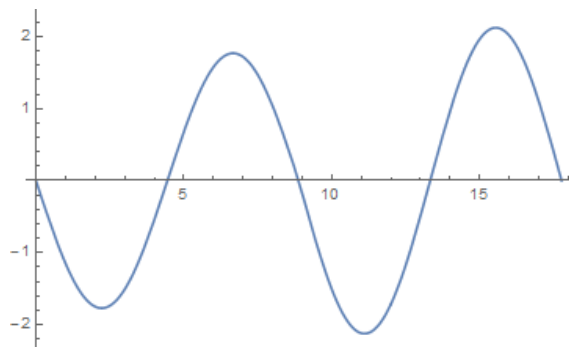
b. Calcoliamo la convoluzione

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_0^t \cos \left(\frac{t-\tau}{\sqrt{2}} \right) \chi_{(0, 2\pi\sqrt{2})} d\tau \\ &= \begin{cases} \text{se } t < 2\pi\sqrt{2} & \int_0^t \cos \left(\frac{t-\tau}{\sqrt{2}} \right) d\tau = \int_0^t \cos \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) d\tau = \left[\sqrt{2} \sin \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^t = \sqrt{2} \sin \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \\ \text{se } t > 2\pi\sqrt{2} & \int_0^{2\pi\sqrt{2}} \cos \left(\frac{t-\tau}{\sqrt{2}} \right) d\tau = \left[-\sqrt{2} \sin \left(\frac{t-\tau}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^{2\pi\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{t}{\sqrt{2}} - 2\pi \right) - \sin \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Perciò

$$i(t) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \chi_{(0, 2\pi\sqrt{2})}(t)$$

$$= \begin{cases} \text{se } t < 2\pi\sqrt{2} & \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \\ \text{se } t > 2\pi\sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} = \begin{cases} \text{se } t < 2\pi\sqrt{2} & -\frac{5}{4}\sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \\ \text{se } t > 2\pi\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$



3. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2 + 4)(x^2 + 5)}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\hat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

Rispondere sui seguenti punti: $\hat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\hat{f}$ (C^0_* , L^1 , L^2 , $\mathcal{S}...$), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\hat{f}$ col metodo dei residui. Verificare che $\hat{f}$ ha effettivamente le proprietà previste.

a. f è reale e dispari, quindi $\hat{f}$ sarà immaginaria pura e dispari. $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ quindi $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ ma potrebbe essere discontinua. $f \in C^\infty$ quindi $\hat{f}(\xi) = o(1/\xi^k)$ per ogni k , per $\xi \rightarrow \pm\infty$.

b. Calcoliamo per $\xi > 0$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^3}{(x^2 + 4)(x^2 + 5)} e^{-2\pi i \xi x} dx,$$

e poi simmetrizzeremo dispari.

Poiché

$$(z^2 + 4)(z^2 + 5) = 0 \text{ per } z = \pm 2i, z = \pm i\sqrt{5},$$

la funzione $f(z) = \frac{z^3}{(z^2+4)(z^2+5)} e^{-2\pi i \xi z}$ ha poli del 1° ordine in $\pm 2i, z = \pm i\sqrt{5}$.

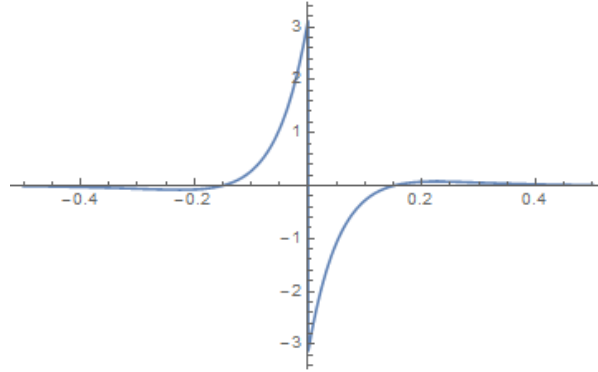
Per $\xi > 0$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= -2\pi i \left\{ \text{Res} \left(\frac{z^3}{(z^2+4)(z^2+5)} e^{-2\pi i \xi z}, -2i \right) + \text{Res} \left(\frac{z^3}{(z^2+4)(z^2+5)} e^{-2\pi i \xi z}, -i\sqrt{5} \right) \right\} \\
&= -2\pi i \left\{ \left(\frac{z^3}{(z^2+5)2z} e^{-2\pi i \xi z} \right)_{/z=-2i} + \left(\frac{z^3}{(z^2+4)2z} e^{-2\pi i \xi z} \right)_{/z=-i\sqrt{5}} \right\} \\
&= -\pi i \left\{ \left(\frac{z^2}{(z^2+5)} e^{-2\pi i \xi z} \right)_{/z=-2i} + \left(\frac{z^2}{(z^2+4)} e^{-2\pi i \xi z} \right)_{/z=-i\sqrt{5}} \right\} \\
&= -\pi i \left\{ -4e^{-4\pi \xi} + 5e^{-2\sqrt{5}\pi \xi} \right\} = \pi i \left\{ 4e^{-4\pi \xi} - 5e^{-2\sqrt{5}\pi \xi} \right\}
\end{aligned}$$

Simmetrizzando dispari si ha:

$$\hat{f}(\xi) = \pi i (\text{sgn } x) \left\{ 4e^{-4\pi|\xi|} - 5e^{-2\sqrt{5}\pi|\xi|} \right\}.$$

Grafico di $\text{Im } \hat{f}(\xi)$:



La funzione ha decadimento esponenziale ed è effettivamente discontinua nell'origine: $\hat{f}(0^\pm) = \mp \pi i$.