Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria

Primo appello. Febbraio 2021

A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di funzione armonica, enunciare con precisione e **dimostrare** il risultato che permette di ottenere funzioni armoniche a partire da funzioni olomorfe. Spiegare in cosa consiste il problema della determinazione dell'armonica coniugata. Enunciare e **dimostrare** un risultato preciso di esistenza dell'armonica coniugata.

B. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema di analiticità delle funzioni olomorfe e la formula integrale di Cauchy per le derivate.

C. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di sistema ortonormale (finito o numerabile) in uno spazio di Hilbert, e enunciato il teorema delle proiezioni su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert (senza dimostrarlo), enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bessel e il risultato di convergenza di una serie di Fourier (a una somma per ora non precisata).

D. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e dimostrare le proprietà che riguardano la L-trasformata della convoluzione e della funzione integrale, e la formula dell's-shift per la L-trasformata.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si calcoli il seguente integrale di linea nel campo complesso, giustificando il procedimento seguito:

$$I = \int_{\gamma_2^+(0)} \left\{ \overline{z}\left(z^3+5\right) + \frac{z}{\left(1+z^2\right)^2} \right\} dz$$

dove $\gamma_2^+(0)$, in base alle convenzioni standard, indica la semicirconferenza di centro 0 e raggio 2, posta nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$ e percorsa in verso antiorario.

2. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{1}{\left(x^2+4\right)(x+3i)^2}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C_*^0, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui, semplificando l'espressione ottenuta (in particolare, separare parte reale e immaginaria).

3. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di un circuito RC in serie:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

con $R = 4, C = \frac{1}{2}, q_0 = 3$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile. Quindi, calcolare esplicitamente la corrente $i(t)$ nel caso $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$, dopo aver previsto a priori la regolarità della soluzione $i(t)$ in questo caso. Semplificare l'espressione ottenuta.

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Recupero 1^a prova in itinere. Febbraio 2021
A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Di ciascuno dei seguenti spazi di funzioni, dire se è vettoriale, se è normato, se è completo, fornendo le opportune giustificazioni:
a. Lo spazio $C^0[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.
b. Lo spazio $C^0(a,b)$ con la norma $\sup_{x\in(a,b)}|f(x)|$.
c. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.
d. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.
e. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.
f. Lo spazio $C^0_b(\mathbb{R})$ delle funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$ con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.
g. Lo spazio $C^0_*(\mathbb{R})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e che tendono a zero all'infinito, con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.
h. Lo spazio $C^0_0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e nulle fuori da un intervallo chiuso e limitato (variabile da funzione a funzione), con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

B. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di funzione armonica, enunciare con precisione e **dimostrare** il risultato che permette di ottenere funzioni armoniche a partire da funzioni olomorfe. Spiegare in cosa consiste il problema della determinazione dell'armonica coniugata. Enunciare e **dimostrare** un risultato preciso di esistenza dell'armonica coniugata.

C. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema di analiticità delle funzioni olomorfe e la formula integrale di Cauchy per le derivate.

D. (6 punti). Dare con precisione le definizioni di: singolarità isolata e non isolata di una funzione olomorfa, singolarità eliminabile, polo di ordine n, singolarità essenziale. Illustrare con esempi ognuno di questi concetti. Dare la definizione di serie di Laurent di una funzione in una singolarità isolata, parte singolare e regolare dello sviluppo, residuo. Quindi, enunciare il teorema di classificazione delle singolarità isolate mediante la serie bilatera. [Si raccomanda di tenere ben distinte la *definizione* di singolarità eliminabile, polo, ecc. dalla loro *caratterizzazione* mediante serie bilatera].

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si calcoli il seguente integrale di linea nel campo complesso, giustificando il procedimento seguito:

$$I = \int_{\gamma_2^+(0)} \left\{ \overline{z}\left(z^3+5\right) + \frac{z}{\left(1+z^2\right)^2} \right\} dz$$

dove $\gamma_2^+(0)$, in base alle convenzioni standard, indica la semicirconferenza di centro 0 e raggio 2, posta nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$ e percorsa in verso antiorario.

2. (5 punti). Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo negli eventuali poli del prim'ordine e negli eventuali punti di singolarità essenziale.

$$f(z) = \frac{\sin\left(z^2-4\right)\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)}{\cos(2\pi z) - 1}.$$

3. (5 punti). Calcolare il seguente integrale col metodo dei residui, giustificando brevemente il procedimento seguito.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin(3x)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)} dx.$$

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Recupero 2^a prova in itinere. Febbraio 2021
A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). In un generico spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, illustrare come si definisce l'integrale, prima per una funzione semplice e positiva, poi per una misurabile positiva e poi per una funzione di segno qualunque o a valori complessi. Richiamare le definizioni dei principali concetti coinvolti. Enunciare quindi le proprietà elementari dell'integrale in questo contesto (linearità, monotonia, proprietà di annullamento, numerabile additività).

B. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di sistema ortonormale (finito o numerabile) in uno spazio di Hilbert, e enunciato il teorema delle proiezioni su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert (senza dimostrarlo), enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bessel e il risultato di convergenza di una serie di Fourier (a una somma per ora non precisata).

C. (6 punti). Mostrare come si calcola la trasformata di Fourier della funzione e^{-x^2} in $\mathbb{R}$ e poi $e^{-|x|^2}$ in $\mathbb{R}^n$, giustificando i passaggi in base a teoremi studiati.

D. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e dimostrare le proprietà che riguardano la L-trasformata della convoluzione e della funzione integrale, e la formula dell's-shift per la L-trasformata.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+4)(x+3i)^2}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui, semplificando l'espressione ottenuta (in particolare, separare parte reale e immaginaria).

2. (5 punti). Sia

$$f(x) = x\cos(2x)\,\chi_{\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}(x).$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ utilizzando opportunamente le proprietà della trasformata di Fourier (trasformare prima $g(x) = x\chi_{\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}$ e poi $f(x)$), *semplificando il più possibile l'espressione ottenuta* (in particolare, separando parte reale e immaginaria).

3. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di un circuito RC in serie:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

con $R = 4, C = \frac{1}{2}, q_0 = 3$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile. Quindi, calcolare esplicitamente la corrente $i(t)$ nel caso $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$, dopo aver previsto a priori la regolarità della soluzione $i(t)$ in questo caso. Semplificare l'espressione ottenuta.

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Primo appello. Febbraio 2021
A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di funzione armonica, enunciare con precisione e **dimostrare** il risultato che permette di ottenere funzioni armoniche a partire da funzioni olomorfe. Spiegare in cosa consiste il problema della determinazione dell'armonica coniugata. Enunciare e **dimostrare** un risultato preciso di esistenza dell'armonica coniugata.
Risposta: v. libro di testo, §.6.2.1.3.

B. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema di analiticità delle funzioni olomorfe e la formula integrale di Cauchy per le derivate.
Risposta: v. libro di testo, §.6.5.2

C. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di sistema ortonormale (finito o numerabile) in uno spazio di Hilbert, e enunciato il teorema delle proiezioni su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert (senza dimostrarlo), enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bessel e il risultato di convergenza di una serie di Fourier (a una somma per ora non precisata).
Risposta: v. libro di testo, §.4.3

D. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e dimostrare le proprietà che riguardano la L-trasformata della convoluzione e della funzione integrale, e la formula dell's-shift per la L-trasformata.
Risposta: v. libro di testo, §.8.1, 8.2.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si calcoli il seguente integrale di linea nel campo complesso, giustificando il procedimento seguito:

$$I = \int_{\gamma_2^+(0)} \left\{ \overline{z}\left(z^3+5\right) + \frac{z}{\left(1+z^2\right)^2} \right\} dz$$

dove $\gamma_2^+(0)$, in base alle convenzioni standard, indica la semicirconferenza di centro 0 e raggio 2, posta nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$ e percorsa in verso antiorario.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma_2^+(0)} \left\{ \overline{z}\left(z^3+5\right) + \frac{z}{\left(1+z^2\right)^2} \right\} dz \\ &= \int_{\gamma_2^+(0)} |z|^2 z^2 dz + 5\int_{\gamma_2^+(0)} \overline{z} dz + \int_{\gamma_2^+(0)} \frac{z}{\left(1+z^2\right)^2} dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

$$I_1 = 4\int_{\gamma_2^+(0)} z^2 dz.$$

Poiché l'integranda di I_1 possiede una primitiva, I_1 si può calcolare col teorema fondamentale del calcolo integrale; gli estremi di $\gamma_2^+(0)$ sono $2, -2$, perciò

$$I_1 = 4\left[\frac{z^3}{3}\right]_2^{-2} = \frac{4}{3}(-8-8) = -\frac{64}{3}.$$

Anche l'integranda di I_3 possiede una primitiva,

$$I_3 = \left[-\frac{1}{2\left(1+z^2\right)}\right]_2^{-2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Infine, calcolando l'integrale I_2 in base alla definizione, $z = 2e^{it}, t \in [0,\pi], \overline{z} = 2e^{-it}, dz = i2e^{it}dt$

$$I_2 = 5\int_0^\pi 2e^{-it} i2e^{it} dt = 20i\int_0^\pi dt = 20\pi i.$$

Complessivamente,

$$I = -\frac{64}{3} + 20\pi i.$$

2. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{1}{\left(x^2+4\right)(x+3i)^2}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C_*^0, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui, semplificando l'espressione ottenuta (in particolare, separare parte reale e immaginaria).

a. f non è né pari né dispari, è C^∞, L^1, $x^2 f \in L^1, x^3 f \notin L^1$, quindi: $\widehat{f}$ tende a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza $1/x^n$, sarà $C_*^0 \cap C^2$ ma ci aspettiamo non C^3; non avrà particolari simmetrie.

b. Calcoliamo

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+4)(x+3i)^2} e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

$\left(z^2+4\right)(z+3i)^2 = 0$ per $z = -3i$ polo del 2° ordine, $z = \pm 2i$ poli del prim'ordine.

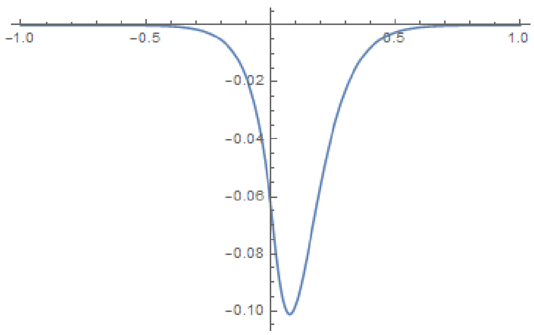
$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, 2i\right) = \left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{2z(z+3i)^2}\right)_{/z=2i} = -\frac{e^{4\pi\xi}}{100i}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, -2i\right) = \left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{2z(z+3i)^2}\right)_{/z=-2i} = \frac{e^{-4\pi\xi}}{4i}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, -3i\right) = \left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)}\right)'_{/z=-3i} = \left(e^{-2\pi i\xi z}\frac{-2\pi i\xi\left(z^2+4\right)-2z}{\left(z^2+4\right)^2}\right)_{/z=-3i}$$
$$= e^{-6\pi\xi}\left(\frac{10\pi i\xi+6i}{25}\right)$$

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \text{se } \xi>0 & -2\pi i\left\{\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, -2i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, -3i\right)\right\} \\ \text{se } \xi<0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, 2i\right) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \text{se } \xi>0 & -2\pi i\left\{\frac{e^{-4\pi\xi}}{4i} + e^{-6\pi\xi}\left(\frac{10\pi i\xi+6i}{25}\right)\right\} = 2\pi\left\{-\frac{e^{-4\pi\xi}}{4} + e^{-6\pi\xi}\left(\frac{10\pi\xi+6}{25}\right)\right\} \\ \text{se } \xi<0 & 2\pi i\left(-\frac{e^{4\pi\xi}}{100i}\right) = -\pi\frac{e^{4\pi\xi}}{50} \end{cases}$$

A posteriori si osserva che $\widehat{f}(\xi)$ è reale. Grafico di $\widehat{f}$:



3. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di un circuito RC in serie:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

con $R = 4, C = \frac{1}{2}, q_0 = 3$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile. Quindi, calcolare esplicitamente la corrente $i(t)$ nel caso $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$, dopo aver previsto a priori la regolarità della soluzione $i(t)$ in questo caso. Semplificare l'espressione ottenuta.

$$4i(t) + 2\left(3 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

Indicando con $I(s), V(s)$ le trasformate di $i(t), v(t)$ rispettivamente si ha:

$$\begin{aligned}
4I(s) + 2\left(\frac{3}{s} + \frac{I(s)}{s}\right) &= V(s) \\
I(s)\left(4 + \frac{2}{s}\right) &= V(s) - \frac{6}{s} \\
I(s) &= \frac{s}{4s+2}V(s) - \frac{6}{4s+2} \\
&= \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{8s+4}\right\}V(s) - \frac{3}{2s+1} \\
&= \frac{1}{4}V(s) - \frac{1}{8\left(s+\frac{1}{2}\right)}V(s) - \frac{3}{2\left(s+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{1}{4}v(t) - \frac{1}{8}e^{-\frac{t}{2}} * v(t) - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)
\end{aligned}$$

quindi

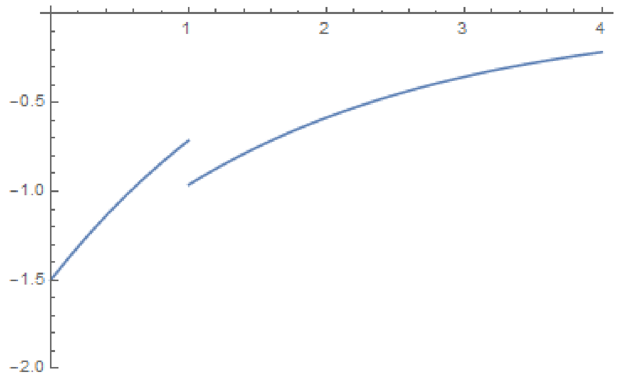
$$i(t) = \frac{1}{4}v(t) - \frac{1}{8}\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}v(\tau)\, d\tau - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}}.$$

Per $v(t) = t\chi_{(0,1)}(t)$, discontinua, la soluzione sarà discontinua per $t = 1$. Si ha

$$i(t) = \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}\tau d\tau - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \\ \text{se } t \geq 1 & -\frac{1}{8}\int_0^1 e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}\tau d\tau - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \end{cases}$$

$$\int e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}\tau d\tau = \text{(per parti) } 2e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}(\tau - 2)$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{t}{4} - \frac{1}{4}\left[(t-2) + 2e^{-\frac{t}{2}}\right] - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \\ \text{se } t \geq 1 & -\frac{1}{4}\left[-e^{-\frac{(t-1)}{2}} + 2e^{-\frac{t}{2}}\right] - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{1}{2} - 2e^{-\frac{t}{2}} \\ \text{se } t \geq 1 & e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{e^{1/2}}{4} - 2\right) \end{cases}
\end{aligned}$$


1
2
3
4
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Recupero 1^a prova in itinere. Febbraio 2021
A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Di ciascuno dei seguenti spazi di funzioni, dire se è vettoriale, se è normato, se è completo, fornendo le opportune giustificazioni:
a. Lo spazio $C^0[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.
b. Lo spazio $C^0(a,b)$ con la norma $\sup_{x\in(a,b)}|f(x)|$.
c. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.
d. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.
e. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.
f. Lo spazio $C_b^0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$ con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.
g. Lo spazio $C_*^0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e che tendono a zero all'infinito, con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.
h. Lo spazio $C_0^0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e nulle fuori da un intervallo chiuso e limitato (variabile da funzione a funzione), con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.
Risposta: v. libro di testo, §.1.2.

B. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di funzione armonica, enunciare con precisione e **dimostrare** il risultato che permette di ottenere funzioni armoniche a partire da funzioni olomorfe. Spiegare in cosa consiste il problema della determinazione dell'armonica coniugata. Enunciare e **dimostrare** un risultato preciso di esistenza dell'armonica coniugata.
Risposta: v. libro di testo, §6.3.1.3.

C. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema di analiticità delle funzioni olomorfe e la formula integrale di Cauchy per le derivate.
Risposta: v. libro di testo, §.6.5.2.

D. (6 punti). Dare con precisione le definizioni di: singolarità isolata e non isolata di una funzione olomorfa, singolarità eliminabile, polo di ordine n, singolarità essenziale. Illustrare con esempi ognuno di questi concetti. Dare la definizione di serie di Laurent di una funzione in una singolarità isolata, parte singolare e regolare dello sviluppo, residuo. Quindi, enunciare il teorema di classificazione delle singolarità isolate mediante la serie bilatera. [Si raccomanda di tenere ben distinte la *definizione* di singolarità eliminabile, polo, ecc. dalla loro *caratterizzazione* mediante serie bilatera].
Risposta: v. libro di testo, §.6.6.2.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si calcoli il seguente integrale di linea nel campo complesso, giustificando il procedimento seguito:

$$I = \int_{\gamma_2^+(0)} \left\{ \overline{z}\left(z^3+5\right) + \frac{z}{\left(1+z^2\right)^2} \right\} dz$$

dove $\gamma_2^+(0)$, in base alle convenzioni standard, indica la semicirconferenza di centro 0 e raggio 2, posta nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$ e percorsa in verso antiorario.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma_2^+(0)} \left\{ \overline{z}\left(z^3+5\right) + \frac{z}{\left(1+z^2\right)^2} \right\} dz \\ &= \int_{\gamma_2^+(0)} |z|^2 z^2 dz + 5\int_{\gamma_2^+(0)} \overline{z} dz + \int_{\gamma_2^+(0)} \frac{z}{\left(1+z^2\right)^2} dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

$$I_1 = 4\int_{\gamma_2^+(0)} z^2 dz.$$

Poiché l'integranda di I_1 possiede una primitiva, I_1 si può calcolare col teorema fondamentale del calcolo integrale; gli estremi di $\gamma_2^+(0)$ sono $2, -2$, perciò

$$I_1 = 4\left[\frac{z^3}{3}\right]_2^{-2} = \frac{4}{3}(-8-8) = -\frac{64}{3}.$$

Anche l'integranda di I_3 possiede una primitiva,

$$I_3 = \left[-\frac{1}{2\left(1+z^2\right)}\right]_2^{-2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) = 0.$$

Infine, calcolando l'integrale I_2 in base alla definizione, $z = 2e^{it}, t \in [0,\pi], \overline{z} = 2e^{-it}, dz = i2e^{it}dt$

$$I_2 = 5\int_0^\pi 2e^{-it} i2e^{it} dt = 20i\int_0^\pi dt = 20\pi i.$$

Complessivamente,

$$I = -\frac{64}{3} + 20\pi i.$$

2. (5 punti). Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo negli eventuali poli del prim'ordine e negli eventuali punti di singolarità essenziale.

$$f(z) = \frac{\sin\left(z^2-4\right)\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)}{\cos(2\pi z) - 1}.$$

I punti da esaminare sono:

$z = k \in \mathbb{Z}$.

$z = 0$ è una singolarità essenziale, perché la funzione $\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)$ ha infinite potenze negative nel suo sviluppo di Laurent. D'altro canto la funzione $f(z)$ è pari, perciò il suo sviluppo di Laurent in 0 contiene solo potenze di esponente pari, in particolare $\operatorname{Res}(f(z), 0) = 0$.

In $z = \pm1, \pm2, \pm3...$ il denominatore $(\cos(2\pi z) - 1)$ si annulla del second'ordine perché

$$(\cos(2\pi z) - 1)' = -2\pi \sin(2\pi z) = 0 \text{ in } z = k$$

e

$$(\cos(2\pi z) - 1)'' = -4\pi^2 \cos(2\pi z) \neq 0 \text{ in } z = k.$$

Inoltre in $z = \pm2$ il numeratore si annulla del prim'ordine perché

$$\sin\left(z^2 - 4\right) \cos\left(\frac{1}{z^2}\right) \sim \left(z^2 - 4\right) \cos\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\cos\left(\frac{1}{4}\right)\right)(z-2)(z+2).$$

In conclusione:

$z = \pm2$ sono poli del 1° ordine, mentre

$z = \pm1, \pm3, \pm4...$ sono poli del 2° ordine.

Calcoliamo $\operatorname{Res}(f(z), \pm2)$.

$$\operatorname{Res}(f(z), 2) = \lim_{z\to2} (z-2) f(z).$$

Per $z \to 2$ si ha

$$(z-2) f(z) \sim \frac{(z-2)^2 (z+2) \cos\left(\frac{1}{4}\right)}{\cos(2\pi z) - 1} \sim 4\cos\left(\frac{1}{4}\right) \frac{(z-2)^2}{\cos(2\pi z) - 1},$$

perciò

$$\lim_{z\to2} (z-2) f(z) = 4\cos\left(\frac{1}{4}\right) \left(\lim_{z\to2} \frac{(z-2)^2}{\cos(2\pi z) - 1}\right)$$

e per L'Hospital,

$$\lim_{z\to2} \frac{(z-2)^2}{\cos(2\pi z) - 1} = \lim_{z\to2} \frac{2(z-2)}{-2\pi \sin(2\pi z)} = \lim_{z\to2} \frac{1}{-2\pi^2 \cos(2\pi z)} = -\frac{1}{2\pi^2},$$

quindi

$$\operatorname{Res}(f(z), \pm2) = 4\cos\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2\pi^2}\right) = -\frac{2}{\pi^2} \cos\left(\frac{1}{4}\right).$$

Analogamente,

$$\operatorname{Res}(f(z), -2) = \lim_{z\to-2} (z+2) f(z).$$

Per $z \to -2$ si ha

$$(z+2) f(z) \sim \frac{(z-2)(z+2)^2 \cos\left(\frac{1}{4}\right)}{\cos(2\pi z) - 1} \sim -4\cos\left(\frac{1}{4}\right) \frac{(z+2)^2}{\cos(2\pi z) - 1},$$

perciò

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to-2}(z+2)\,f(z) &= -4\cos\left(\frac{1}{4}\right)\left(\lim_{z\to-2}\frac{(z+2)^2}{\cos(2\pi z)-1}\right)\\
&= -4\cos\left(\frac{1}{4}\right)\lim_{z\to-2}\frac{2(z+2)}{-2\pi\sin(2\pi z)}\\
&= -4\cos\left(\frac{1}{4}\right)\lim_{z\to-2}\frac{1}{-2\pi^2\cos(2\pi z)} = \frac{2}{\pi^2}\cos\left(\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

quindi

$$\operatorname{Res}(f(z),-2) = \frac{2}{\pi^2}\cos\left(\frac{1}{4}\right).$$

3. (5 punti). Calcolare il seguente integrale col metodo dei residui, giustificando brevemente il procedimento seguito.

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{x\sin(3x)}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx.$$

Si ha:

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{x\sin(3x)}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx = \operatorname{Im}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{xe^{3ix}}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx\right)$$

dove $R(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$ quoziente di polinomi con denominatore mai nullo per x reale e $R(x)$ tende a zero all'infinito di ordine 3 (in particolare, ≥ 2). Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{xe^{3ix}}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname{Res}\left(R(z)\,e^{3iz},z_k\right)$$

dove z_k sono i poli di $R(z)$.

$$\left(z^2+1\right)\left(z^2+z+1\right) = 0 \text{ per}$$
$$z = \pm i, z = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

tutti poli del 1° ordine, quindi

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \frac{xe^{3ix}}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx \\
&= 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z^2+1)(z^2+z+1)} e^{3iz}, i \right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z^2+1)(z^2+z+1)} e^{3iz}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\
&= 2\pi i \left\{ \left(\frac{z}{2z(z^2+z+1)} e^{3iz} \right)_{/z=i} + \left(\frac{z}{(z^2+1)(2z+1)} e^{3iz} \right)_{/z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} \right\} \\
&= 2\pi i \left\{ \left(\frac{1}{2i} e^{-6} \right) + \left(\frac{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) i\sqrt{3}} e^{3\,\frac{-i-\sqrt{3}}{2}} \right) \right\} \\
&= \pi \left\{ e^{-6} - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos\left(\frac{3}{2}\right) - i \sin\left(\frac{3}{2}\right) \right) e^{\frac{-3\sqrt{3}}{2}} \right\}
\end{aligned}
$$

quindi

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x\sin(3x)}{(x^2+4)(x^2+x+1)}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{3}{2}\right) e^{\frac{-3\sqrt{3}}{2}}.$$

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Recupero 2^a prova in itinere. Febbraio 2021
A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). In un generico spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, illustrare come si definisce l'integrale, prima per una funzione semplice e positiva, poi per una misurabile positiva e poi per una funzione di segno qualunque o a valori complessi. Richiamare le definizioni dei principali concetti coinvolti. Enunciare quindi le proprietà elementari dell'integrale in questo contesto (linearità, monotonia, proprietà di annullamento, numerabile additività).
Risposta: v. libro di testo, §2.3.1.

B. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di sistema ortonormale (finito o numerabile) in uno spazio di Hilbert, e enunciato il teorema delle proiezioni su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert (senza dimostrarlo), enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Bessel e il risultato di convergenza di una serie di Fourier (a una somma per ora non precisata).
Risposta: v. libro di testo, §4.3.

C. (6 punti). Mostrare come si calcola la trasformata di Fourier della funzione e^{-x^2} in $\mathbb{R}$ e poi $e^{-|x|^2}$ in $\mathbb{R}^n$, giustificando i passaggi in base a teoremi studiati.
Risposta: v. libro di testo, §.7.1.1.

D. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e dimostrare le proprietà che riguardano la L-trasformata della convoluzione e della funzione integrale, e la formula dell's-shift per la L-trasformata.
Risposta: v. libro di testo, §8.1, 8.2.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+4)(x+3i)^2}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C_*^0, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui, semplificando l'espressione ottenuta (in particolare, separare parte reale e immaginaria).

a. f non è né pari né dispari, è C^∞, L^1, $x^2 f \in L^1, x^3 f \notin L^1$, quindi: $\widehat{f}$ tende a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza $1/x^n$, sarà $C_*^0 \cap C^2$ ma ci aspettiamo non C^3; non avrà particolari simmetrie.

b. Calcoliamo

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+4)(x+3i)^2} e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

$$\left(z^2+4\right)(z+3i)^2 = 0 \text{ per } z=-3i \text{ polo del } 2^\circ \text{ ordine, } z = \pm 2i \text{ poli del prim'ordine.}$$

$$\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, 2i\right) = \left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{2z(z+3i)^2}\right)_{/z=2i} = -\frac{e^{4\pi\xi}}{100i}$$

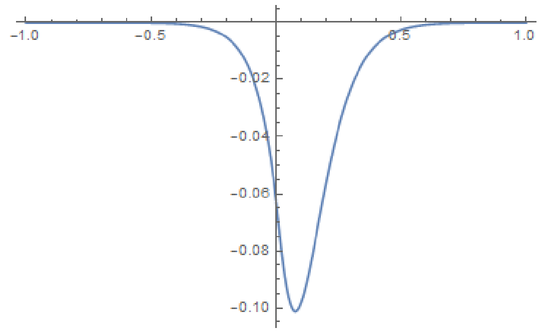
$$\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, -2i\right) = \left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{2z(z+3i)^2}\right)_{/z=-2i} = \frac{e^{-4\pi\xi}}{4i}$$

$$\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, -3i\right) = \left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)}\right)'_{/z=-3i} = \left(e^{-2\pi i\xi z}\frac{-2\pi i\xi\left(z^2+4\right)-2z}{(z^2+4)^2}\right)_{/z=-3i}$$
$$= e^{-6\pi\xi}\left(\frac{10\pi i\xi+6i}{25}\right)$$

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \text{se } \xi>0 & -2\pi i\left\{\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, -2i\right) + \text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, -3i\right)\right\} \\ \text{se } \xi<0 & 2\pi i\,\text{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+4)(z+3i)^2}, 2i\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } \xi>0 & -2\pi i\left\{\frac{e^{-4\pi\xi}}{4i} + e^{-6\pi\xi}\left(\frac{10\pi i\xi+6i}{25}\right)\right\} = 2\pi\left\{-\frac{e^{-4\pi\xi}}{4} + e^{-6\pi\xi}\left(\frac{10\pi\xi+6}{25}\right)\right\} \\ \text{se } \xi<0 & 2\pi i\left(-\frac{e^{4\pi\xi}}{100i}\right) = -\pi\frac{e^{4\pi\xi}}{50} \end{cases}$$

A posteriori si osserva che $\widehat{f}(\xi)$ è reale. Grafico di $\widehat{f}$:



2. (5 punti). Sia

$$f(x) = x\cos(2x)\,\chi_{\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}(x).$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ utilizzando opportunamente le proprietà della trasformata di Fourier (trasformare prima $g(x) = x\chi_{\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}$ e poi $f(x)$), *semplificando il più possibile l'espressione ottenuta* (in particolare, separando parte reale e immaginaria).

a. f è reale e dispari, quindi $\widehat{f}$ sarà immaginaria pura e dispari. $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $n = 1, 2, 3$, quindi $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$f \in C^0(\mathbb{R})$ derivabile a tratti. Quindi $\widehat{f}(\xi) = o(1/\xi)$ per $\xi \to \infty$.

$f \in L^2(\mathbb{R})$, di conseguenza $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

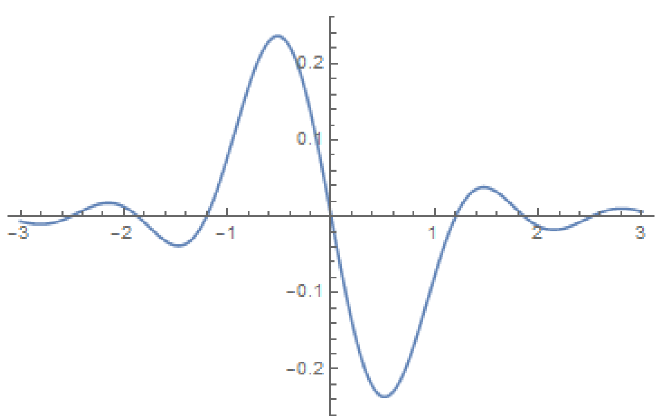
b. Sia prima $g(x) = x\chi_{\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}(x)$. Si ha

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x e^{-2\pi i x\xi} dx = \left[x\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi} dx \\
&= \frac{1}{-2\pi i\xi}\frac{\pi}{4}\left(e^{-\frac{\pi^2}{2}i\xi} + e^{\frac{\pi^2}{2}i\xi}\right) - \left[\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(2\pi i\xi)^2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{i}{4\xi}\cos\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right) + \frac{1}{4\pi^2\xi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2}{2}i\xi} - e^{\frac{\pi^2}{2}i\xi}\right) \\
&= \frac{i}{4\xi}\cos\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right) - \frac{1}{2\pi^2\xi^2}i\sin\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right) \\
&= \frac{i}{2}\left\{\frac{1}{2\xi}\cos\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right) - \frac{1}{\pi^2\xi^2}\sin\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Ora $f(x) = \cos(2x)\, g(x)$ e ricordando la formula

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\cos(2x)\, g(x)\right)(\xi) &= \frac{1}{2}\left(\widehat{g}\left(\xi - \frac{1}{\pi}\right) + \widehat{g}\left(\xi + \frac{1}{\pi}\right)\right) \\
&= \frac{i}{4}\left\{\frac{1}{2\left(\xi - \frac{1}{\pi}\right)} \cos\left(\frac{\pi^2}{2}\left(\xi - \frac{1}{\pi}\right)\right) - \frac{1}{\pi^2\left(\xi - \frac{1}{\pi}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi^2}{2}\left(\xi - \frac{1}{\pi}\right)\right)\right. \\
&\left. + \frac{1}{2\left(\xi + \frac{1}{\pi}\right)} \cos\left(\frac{\pi^2}{2}\left(\xi + \frac{1}{\pi}\right)\right) - \frac{1}{\pi^2\left(\xi + \frac{1}{\pi}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi^2}{2}\left(\xi + \frac{1}{\pi}\right)\right)\right\} \\
&= \frac{i}{4}\left\{\frac{1}{2\left(\xi - \frac{1}{\pi}\right)} \sin\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right) + \frac{1}{\pi^2\left(\xi - \frac{1}{\pi}\right)^2} \cos\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right)\right. \\
&\left. - \frac{1}{2\left(\xi + \frac{1}{\pi}\right)} \sin\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right) - \frac{1}{\pi^2\left(\xi + \frac{1}{\pi}\right)^2} \cos\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{4}\left\{\left[\frac{1}{2\left(\xi - \frac{1}{\pi}\right)} - \frac{1}{2\left(\xi + \frac{1}{\pi}\right)}\right] \sin\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right)\right. \\
&\left. + \left[\frac{1}{\pi^2\left(\xi - \frac{1}{\pi}\right)^2} - \frac{1}{\pi^2\left(\xi + \frac{1}{\pi}\right)^2}\right] \cos\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right)\right\} \\
&= \frac{i}{4}\left\{\frac{1}{\pi\left(\xi^2 - \frac{1}{\pi^2}\right)} \sin\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right) + \frac{4\xi}{\pi^3\left(\xi^2 - \frac{1}{\pi^2}\right)^2} \cos\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right)\right\} \\
&= i\frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{\left(\pi^2\xi^2 - 1\right)} \sin\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right) + \frac{4\xi}{\left(\pi^2\xi^2 - 1\right)^2} \cos\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right)\right\} \\
&= i\pi\left\{\frac{\left(\pi^2\xi^2 - 1\right)\sin\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right) + 4\xi\cos\left(\frac{\pi^2}{2}\xi\right)}{4\left(\pi^2\xi^2 - 1\right)^2}\right\}.
\end{aligned}$$



3. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di un circuito RC in serie:

$$Ri\,(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i\,(\tau)\,d\tau\right) = v\,(t)$$

con $R = 4, C = \frac{1}{2}, q_0 = 3$. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere la formula risolutiva che assegna la corrente $i\,(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v\,(t)$ Laplace trasformabile. Quindi, calcolare esplicitamente la corrente $i\,(t)$ nel caso $v\,(t) = t\chi_{(0,1)}\,(t)$, dopo aver previsto a priori la regolarità della soluzione $i\,(t)$ in questo caso. Semplificare l'espressione ottenuta.

$$4i\,(t) + 2\left(3 + \int_0^t i\,(\tau)\,d\tau\right) = v\,(t)$$

Indicando con $I\,(s)\,, V\,(s)$ le trasformate di $i\,(t)\,, v\,(t)$ rispettivamente si ha:

$$\begin{aligned}
4I\,(s) + 2\left(\frac{3}{s} + \frac{I\,(s)}{s}\right) &= V\,(s) \\
I\,(s)\left(4 + \frac{2}{s}\right) &= V\,(s) - \frac{6}{s} \\
I\,(s) &= \frac{s}{4s+2}V\,(s) - \frac{6}{4s+2} \\
&= \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{8s+4}\right\}V\,(s) - \frac{3}{2s+1} \\
&= \frac{1}{4}V\,(s) - \frac{1}{8\left(s+\frac{1}{2}\right)}V\,(s) - \frac{3}{2\left(s+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{1}{4}v\,(t) - \frac{1}{8}e^{-\frac{t}{2}} * v\,(t) - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)
\end{aligned}$$

quindi

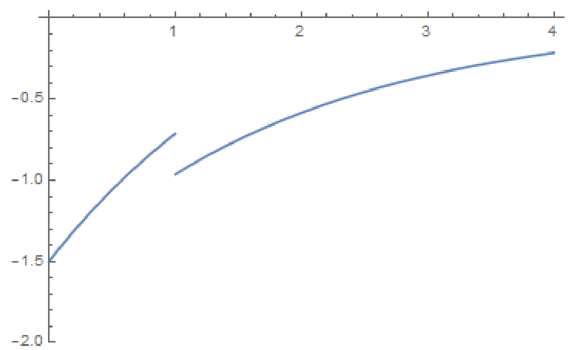
$$i\,(t) = \frac{1}{4}v\,(t) - \frac{1}{8}\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}v\,(\tau)\,d\tau - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}}.$$

Per $v\,(t) = t\chi_{(0,1)}\,(t)$, discontinua, la soluzione sarà discontinua per $t = 1$. Si ha

$$i\,(t) = \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}\tau d\tau - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \\ \text{se } t \geq 1 & -\frac{1}{8}\int_0^1 e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}\tau d\tau - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \end{cases}$$

$$\int e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}\tau d\tau = (\text{per parti})\ 2e^{-\frac{(t-\tau)}{2}}(\tau - 2)$$

$$\begin{aligned}
i\,(t) &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{t}{4} - \frac{1}{4}\left[(t-2) + 2e^{-\frac{t}{2}}\right] - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \\ \text{se } t \geq 1 & -\frac{1}{4}\left[-e^{-\frac{(t-1)}{2}} + 2e^{-\frac{t}{2}}\right] - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{1}{2} - 2e^{-\frac{t}{2}} \\ \text{se } t \geq 1 & e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{e^{1/2}}{4} - 2\right) \end{cases}
\end{aligned}$$


1
2
3
4
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0