Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria

Terzo appello. Luglio 2021

A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di convergenza semplice e uniforme per una successione di funzioni, enunciare con precisione il teorema sulla derivabilità del limite di una successione di funzioni derivabili. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi. Quindi, enunciare e **dimostrare** il teorema che riguarda $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$.

B. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema di Cauchy dell'integrale nullo, definendo accuratamente tutti i concetti coinvolti. Spiegare poi cosa significa, nel calcolo di un integrale lungo un circuito, che "due circuiti sono equivalenti", **dimostrando** il risultato relativo.

C. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$ (distinguendo il caso $p < \infty$ e $p = \infty$) e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi enunciare e dimostrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita.

D. (6 punti). La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$: dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà (senza dimostrazione), **dimostrare** come sfruttando queste proprietà è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo negli eventuali poli del prim'ordine.

$$f(z) = \frac{e^{2z-1} - 1}{\cos^2(\pi z)} \operatorname{Ch}\left(\frac{1}{z}\right).$$

2. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+i)}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$. Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ e riscrivere l'espressione trovata per $\operatorname{Re}\widehat{f}(\xi)$ nella forma più semplice.

3. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di un circuito RC in serie:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

con $R = 5, C = 3, q_0 = 4$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere esplicitamente la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

b. Si consideri ora il caso

$$v(t) = e^{-t}\chi_{(0,2)}(t).$$

Prevedere, prima di risolvere l'equazione, in base alla regolarità del dato $v(t)$ e alla struttura dell'equazione, la regolarità che si attende per $i(t)$. Quindi ottenere la soluzione esplicita $i(t)$ corrispondente a questo dato.

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Terzo appello. Luglio 2021
A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di convergenza semplice e uniforme per una successione di funzioni, enunciare con precisione il teorema sulla derivabilità del limite di una successione di funzioni derivabili. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi. Quindi, enunciare e **dimostrare** il teorema che riguarda $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$.
Risposta: v. libro di testo, §1.2.1-1.2.2.

B. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema di Cauchy dell'integrale nullo, definendo accuratamente tutti i concetti coinvolti. Spiegare poi cosa significa, nel calcolo di un integrale lungo un circuito, che "due circuiti sono equivalenti", **dimostrando** il risultato relativo.
Risposta: v. libro di testo, §6.5.2.

C. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p\in[1,\infty]$ (distinguendo il caso $p<\infty$ e $p=\infty$) e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi enunciare e dimostrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita.
Risposta: v. libro di testo, §2.4

D. (6 punti). La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$: dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà (senza dimostrazione), **dimostrare** come sfruttando queste proprietà è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Risposta: v. libro di testo, §7.4.2.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo negli eventuali poli del prim'ordine.

$$f(z) = \frac{e^{2z-1} - 1}{\cos^2(\pi z)} \operatorname{Ch}\left(\frac{1}{z}\right).$$

I punti da esaminare sono:
$z = 0$;
$z : \cos(\pi z) = 0, \pi z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$, quindi $z = \frac{1}{2} + k$ per $k \in \mathbb{Z}$.

$z = 0$ è una singolarità essenziale, perché la funzione $\operatorname{Ch}\left(\frac{1}{z}\right)$ ha infinite potenze negative nel suo sviluppo di Laurent.

In $z = \frac{1}{2} + k$ il denominatore $\cos^2(\pi z)$ si annulla del second'ordine perché $\cos(\pi z)$ si annulla del prim'ordine, in quanto $(\cos(\pi z))'_{z=\frac{1}{2}+k} = -\pi \sin(\pi z)_{/z=\frac{1}{2}+k} = (-1)^{k+1} \pi \neq 0$.

Inoltre in $z = \frac{1}{2}$ il numeratore si annulla del prim'ordine perché $(2z-1) = 0$ e

$$\left(e^{2z-1} - 1\right)' = e^{2z-1} = 1 \text{ in } z = \frac{1}{2}.$$

In conclusione:
$z = \frac{1}{2}$ è polo del 1° ordine, mentre
$z = \frac{1}{2} + k$ con $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ sono poli del 2° ordine.
Calcoliamo $\operatorname{Res}\left(f(z), \frac{1}{2}\right)$.

$$\operatorname{Res}\left(f(z), \frac{1}{2}\right) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) f(z).$$

Per $z \to \frac{1}{2}$ si ha

$$\left(z - \frac{1}{2}\right) f(z) \sim \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)(2z-1)}{\cos^2(\pi z)} \operatorname{Ch}(2) = \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}{\cos^2(\pi z)} 2 \operatorname{Ch}(2)$$
$$= \left[\frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)}{\cos(\pi z)}\right]^2 2 \operatorname{Ch}(2)$$
$$\lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)}{\cos(\pi z)} \quad \text{(De L'Hospital)}$$
$$= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{1}{-\pi \sin(\pi z)} = -\frac{1}{\pi}$$

perciò

$$\operatorname{Res}\left(f(z), \frac{1}{2}\right) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) f(z) = \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 2 \operatorname{Ch}(2) = \frac{2}{\pi^2} \operatorname{Ch}(2).$$

2. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+i)}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$. Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ e riscrivere l'espressione trovata per $\operatorname{Re}\widehat{f}(\xi)$ nella forma più semplice.

a. $f \in L^1(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f} \in C^0_*(\mathbb{R})$; f non è né reale né immaginaria, è pari, quindi $\widehat{f}$ è pari (anche se non sarà né reale né immaginaria pura); f è infinitamente derivabile (con derivate $L^1 \cap C^0_*$), quindi $\widehat{f}(\xi) = o(1/\xi^n)$ per ogni n, per $\xi \to \pm\infty$.

$x^2 f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ ma $x^3 f(x) \notin L^1(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f} \in C^2(\mathbb{R})$ ma ci aspettiamo non sarà $C^3(\mathbb{R})$.

b.

$$\left(x^2+1\right)\left(x^2+i\right) = 0 \text{ per } z = \pm i, z = \pm\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right),$$

poli del prim'ordine. Calcoliamo $\widehat{f}(\xi)$ per $\xi > 0$ e poi simmetrizziamo pari.

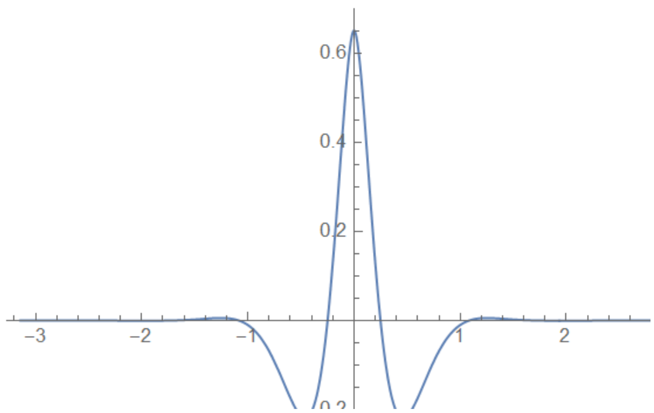
$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{(x^2+1)(x^2+i)} dx = -2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z^2+1)(z^2+i)}, -i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z^2+1)(z^2+i)^2}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right\} \\
&= -2\pi i \left\{ \left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{2z(z^2+i)}\right)_{/z=-i} + \left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{(z^2+1)2z}\right)_{/z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}} \right\} \\
&= -\pi i \left\{ \frac{e^{-2\pi\xi}}{-i(-1+i)} + \frac{e^{\sqrt{2}\pi\xi(-i-1)}}{(-i+1)\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)} \right\} = \pi \left\{ \frac{e^{-2\pi\xi}}{(-1+i)} + \frac{e^{\sqrt{2}\pi\xi(-i-1)}}{\sqrt{2}} \right\} \\
&= \pi \left\{ \frac{e^{-2\pi\xi}(-1-i)}{2} + \frac{e^{-\sqrt{2}\pi\xi}}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\xi\right) - i\sin\left(\sqrt{2}\pi\xi\right)\right) \right\}
\end{aligned}$$

Simmetrizzando pari, per ogni ξ si ha:

$$\widehat{f}(\xi) = \pi \left\{ \frac{e^{-2\pi|\xi|}(-1-i)}{2} + \frac{e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|}}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\xi\right) - i\sin\left(\sqrt{2}\pi|\xi|\right)\right) \right\}.$$

$$\operatorname{Re}\widehat{f}(\xi) = \pi \left\{ -\frac{e^{-2\pi|\xi|}}{2} + \frac{e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|}}{\sqrt{2}} \cos\left(\sqrt{2}\pi\xi\right) \right\}.$$

Grafico di $\operatorname{Re}\widehat{f}(\xi)$:



3. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di un circuito RC in serie:

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\left(q_0+\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right)=v(t)$$

con $R=5, C=3, q_0=4$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere esplicitamente la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

b. Si consideri ora il caso

$$v(t)=e^{-t}\chi_{(0,2)}(t).$$

Prevedere, prima di risolvere l'equazione, in base alla regolarità del dato $v(t)$ e alla struttura dell'equazione, la regolarità che si attende per $i(t)$. Quindi ottenere la soluzione esplicita $i(t)$ corrispondente a questo dato.

a. Riscriviamo l'equazione:

$$5i(t)+\frac{1}{3}\left(4+\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right)=v(t)$$

e applichiamo la trasformata di Laplace, ponendo $I(s)=\mathcal{L}(i(t)), V(s)=\mathcal{L}(v(t))$:

$$5I(s)+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{s}+\frac{I(s)}{s}\right)=V(s)$$
$$I(s)\left(5+\frac{1}{3s}\right)=V(s)-\frac{4}{3s}$$

$$
\begin{aligned}
I(s) &= V(s)\left(\frac{3s}{15s+1}\right) - \frac{4}{15s+1} \\
&= V(s)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5(15s+1)}\right) - \frac{4}{15s+1} \\
&= \frac{1}{5}V(s) - \frac{1}{75}\frac{1}{s+\frac{1}{15}}V(s) - \frac{4}{15}\frac{1}{s+\frac{1}{15}} \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{1}{5}v(t) - \frac{1}{75}e^{-\frac{t}{15}} * v(t) - \frac{4}{15}e^{-\frac{t}{15}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
i(t) = \frac{1}{5}v(t) - \frac{1}{75}\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{15}} v(\tau)\, d\tau - \frac{4}{15}e^{-\frac{t}{15}}
$$

b. Poiché $v(t)$ è discontinua in $t = 2$, ci aspettiamo soluzione $i(t)$ continua a tratti ma discontinua nel punto $t = 2$.

$$
i(t) = \frac{1}{5}e^{-t}\chi_{(0,2)}(t) - \frac{1}{75}e^{-\frac{t}{15}}\int_0^t e^{\frac{\tau}{15}}e^{-\tau}\chi_{(0,2)}(\tau)\, d\tau - \frac{4}{15}e^{-\frac{t}{15}}.
$$

$$
\int_0^t e^{\frac{\tau}{15}}e^{-\tau}\chi_{(0,2)}(\tau)\, d\tau = \begin{cases} \text{se } t<2 & \int_0^t e^{-\frac{14}{15}\tau}d\tau \\ \text{se } t>2 & \int_0^2 e^{-\frac{14}{15}\tau}d\tau \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} \text{se } t<2 & \left[-\frac{15}{14}e^{-\frac{14}{15}\tau}\right]_0^t \\ \text{se } t>2 & \left[-\frac{15}{14}e^{-\frac{14}{15}\tau}\right]_0^2 \end{cases} = \begin{cases} \text{se } t<2 & \frac{15}{14}\left(1-e^{-\frac{14}{15}t}\right) \\ \text{se } t>2 & \frac{15}{14}\left(1-e^{-\frac{28}{15}}\right) \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \begin{cases} \text{se } t<2 & \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{75}e^{-\frac{t}{15}}\frac{15}{14}\left(1-e^{-\frac{14}{15}t}\right) - \frac{4}{15}e^{-\frac{t}{15}} \\ \text{se } t>2 & -\frac{1}{75}e^{-\frac{t}{15}}\frac{15}{14}\left(1-e^{-\frac{28}{15}}\right) - \frac{4}{15}e^{-\frac{t}{15}} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{se } t<2 & \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{70}\left(e^{-\frac{t}{15}} - e^{-t}\right) - \frac{4}{15}e^{-\frac{t}{15}} \\ \text{se } t>2 & -\frac{1}{70}e^{-\frac{t}{15}}\left(1-e^{-\frac{28}{15}}\right) - \frac{4}{15}e^{-\frac{t}{15}} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{se } t<2 & \frac{3}{14}e^{-t} - \frac{59}{210}e^{-\frac{t}{15}} \\ \text{se } t>2 & e^{-\frac{t}{15}}\left(\frac{1}{70}e^{-\frac{28}{15}} - \frac{59}{210}\right) \end{cases}
\end{aligned}
$$