Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Quarto appello. Agosto 2021
A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di derivabilità e derivata per una funzione complessa di variabile complessa, spiegare (enunciando un teorema preciso) la relazione tra il concetto di funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivabile in senso complesso e funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenziabile. **Dimostrare** la validità delle condizioni di Cauchy-Riemann per una funzione derivabile in senso complesso. Quindi, enunciare con precisione e **dimostrare** le conseguenze delle condizioni di Cauchy-Riemann sulle funzioni con parte reale o immaginaria costante.

B. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sull'insieme degli zeri di una funzione analitica in un aperto. Mostrare come da questo si deduce il principio di identità delle funzioni analitiche, e illustrarne qualche conseguenza vista nel corso.

C. (6 punti). Sia dia la definizione di operatore lineare continuo tra due spazi vettoriali normati, enunciando anche il teorema che sta alla base di tale definizione. Si dia la definizione di norma di un operatore lineare continuo. Si facciano esempi, incontrati nel corso, di operatori lineari continui *tra spazi di funzioni*, e un esempio di operatore lineare non continuo.

D. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà della trasformata di Fourier che riguardano: trasformata di una derivata; derivata di una trasformata (enunciare i teoremi per funzioni di una variabile e derivata n-esima; dimostrarli per funzioni di una variabile e derivata prima).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Calcolare il seguente integrale col metodo dei residui, giustificando brevemente il procedimento seguito.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 \cos(2x)}{(3+x^2)^2} dx.$$

2. (5 punti). Si consideri la seguente convoluzione:

$$xe^{-2\pi|x|} * e^{-2\pi|x|}.$$

In questo esercizio si vuole calcolare la convoluzione precedente sfruttando opportunamente le proprietà della trasformata di Fourier (convoluzione e formule delle derivate). Seguire questi passaggi:

a. Calcolare la trasformata di Fourier della convoluzione, sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier e la seguente trasformata che consideriamo nota:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}.$$

b. Antitrasformare la trasformata appena ottenuta, sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier e la seguente trasformata che consideriamo nota:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{2}(1+2\pi|\xi|)e^{-2\pi|\xi|}.$$

Giustificare il procedimento seguito. [*Importante*: la consegna dell'esercizio consiste nel calcolare la convoluzione *mediante il procedimento suggerito*: non calcolatela direttamente in altri modi].

3. (5 punti). *a.* Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 10y = f(t) \\ y(0) = -4 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

cioè scrivere una formula risolutiva esplicita che assegna la soluzione in funzione del generico termine noto $f(t)$, che si suppone L-trasformabile.

b. Ottenere ora la soluzione esplicita $y(t)$ corrispondente al dato:

$$f(t) = e^t \chi_{(0,1)}(t).$$

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Quarto appello. Agosto 2021
A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di derivabilità e derivata per una funzione complessa di variabile complessa, spiegare (enunciando un teorema preciso) la relazione tra il concetto di funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivabile in senso complesso e funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenziabile. **Dimostrare** la validità delle condizioni di Cauchy-Riemann per una funzione derivabile in senso complesso. Quindi, enunciare con precisione e **dimostrare** le conseguenze delle condizioni di Cauchy-Riemann sulle funzioni con parte reale o immaginaria costante.
Risposta: v. libro di testo, §6.2.

B. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sull'insieme degli zeri di una funzione analitica in un aperto. Mostrare come da questo si deduce il principio di identità delle funzioni analitiche, e illustrarne qualche conseguenza vista nel corso.
Risposta: v. libro di testo, §6.5.4.

C. (6 punti). Sia dia la definizione di operatore lineare continuo tra due spazi vettoriali normati, enunciando anche il teorema che sta alla base di tale definizione. Si dia la definizione di norma di un operatore lineare continuo. Si facciano esempi, incontrati nel corso, di operatori lineari continui *tra spazi di funzioni*, e un esempio di operatore lineare non continuo.
Risposta: v. libro di testo, §3.1

D. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà della trasformata di Fourier che riguardano: trasformata di una derivata; derivata di una trasformata (enunciare i teoremi per funzioni di una variabile e derivata n-esima; dimostrarli per funzioni di una variabile e derivata prima).
Risposta: v. libro di testo, §7.1.1.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Calcolare il seguente integrale col metodo dei residui, giustificando brevemente il procedimento seguito.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 \cos(2x)}{(3+x^2)^2} dx.$$

Si ha, per simmetria,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 \cos(2x)}{(3+x^2)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 e^{2ix}}{(3+x^2)^2} dx,$$

che si calcola coi residui. Poli di $f(z) = \frac{z^2}{(3+z^2)^2}$:

$$z = \pm i\sqrt{3}, \text{ poli del second'ordine.}$$

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(3+z^2)^2} e^{2iz}, i\sqrt{3}\right) = 2\pi i \left(\left(z - i\sqrt{3}\right)^2 \frac{z^2}{(3+z^2)^2} e^{2iz}\right)'_{/z=i\sqrt{3}}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{z^2}{\left(z+i\sqrt{3}\right)^2} e^{2iz}\right)'_{/z=i\sqrt{3}}$$

$$= 2\pi i \left(e^{2iz}\left(2i\frac{z^2}{\left(z+i\sqrt{3}\right)^2} + \frac{2z\left(z+i\sqrt{3}\right)^2 - 2\left(z+i\sqrt{3}\right)z^2}{\left(z+i\sqrt{3}\right)^4}\right)\right)_{/z=i\sqrt{3}}$$

$$= 2\pi i e^{-2\sqrt{3}}\left(2i\frac{-3}{\left(2i\sqrt{3}\right)^2} + \frac{2i\sqrt{3}\left(2i\sqrt{3}\right) - 2(-3)}{\left(2i\sqrt{3}\right)^3}\right)$$

$$= 2\pi i e^{-2\sqrt{3}}\left(2i\frac{3}{12} + \frac{-12+6}{-i24\sqrt{3}}\right) = 2\pi i e^{-2\sqrt{3}}\left(i\frac{1}{2} + \frac{1}{i4\sqrt{3}}\right) = \pi e^{-2\sqrt{3}}\left(-1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

2. (5 punti). Si consideri la seguente convoluzione:

$$xe^{-2\pi|x|} * e^{-2\pi|x|}.$$

In questo esercizio si vuole calcolare la convoluzione precedente sfruttando opportunamente le proprietà della trasformata di Fourier (convoluzione e formule delle derivate). Seguire questi passaggi:

a. Calcolare la trasformata di Fourier della convoluzione, sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier e la seguente trasformata che consideriamo nota:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}.$$

b. Antitrasformare la trasformata appena ottenuta, sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier e la seguente trasformata che consideriamo nota:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\right)(\xi)=\frac{\pi}{2}\left(1+2\pi\left|\xi\right|\right)e^{-2\pi|\xi|}.$$

Giustificare il procedimento seguito. [*Importante*: la consegna dell'esercizio consiste nel calcolare la convoluzione *mediante il procedimento suggerito*: non calcolatela direttamente in altri modi].

Poiché $\frac{1}{1+x^2}$ e $\pi e^{-2\pi|\xi|}$ sono $L^1(\mathbb{R})$, per il teorema di inversione si ha:

$$\mathcal{F}\left(e^{-2\pi|x|}\right)(\xi)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\xi^2}.$$

Si ha anche, per i teoremi sulle derivate:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(xe^{-2\pi|x|}\right)(\xi)&=-\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}\left(\mathcal{F}\left(e^{-2\pi|x|}\right)(\xi)\right)\\&=-\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\xi^2}\right)=\frac{1}{\pi^2 i}\left(\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^2}\right)\end{aligned}$$

e quindi per il teorema sulla convoluzione:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(xe^{-2\pi|x|}*e^{-2\pi|x|}\right)(\xi)&=\mathcal{F}\left(xe^{-2\pi|x|}\right)(\xi)\cdot\mathcal{F}\left(e^{-2\pi|x|}\right)(\xi)\\&=\frac{1}{\pi^2 i}\left(\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^2}\right)\cdot\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{1}{\pi^3 i}\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^3}.\end{aligned}$$

Osserviamo ora che, per il teorema di inversione:

$$\begin{aligned}xe^{-2\pi|x|}*e^{-2\pi|x|}&=\mathcal{F}\mathcal{F}\left(xe^{-2\pi|x|}*e^{-2\pi|x|}\right)(-x)\\&=\mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi^3 i}\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^3}\right)(-x)\end{aligned}$$

d'altro canto

$$\frac{1}{\pi^3 i}\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^3}=\frac{d}{d\xi}\left(-\frac{1}{4\pi^3 i}\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^2}\right)$$

quindi

$$
\begin{aligned}
xe^{-2\pi|x|} * e^{-2\pi|x|} &= \mathcal{F}\left(\frac{d}{d\xi}\left(-\frac{1}{4\pi^3 i}\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^2}\right)\right)(-x) \\
&= \left(-\frac{1}{4\pi^3 i}\cdot 2\pi i\xi\mathcal{F}\left(\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^2}\right)\right)(-x) \\
&= \left(-\frac{1}{2\pi^2}\xi\frac{\pi}{2}\left(1+2\pi\left|\xi\right|\right)e^{-2\pi|\xi|}\right)(-x) \\
&= \frac{1}{4\pi}x\left(1+2\pi\left|x\right|\right)e^{-2\pi|x|}.
\end{aligned}
$$

3. (5 punti). ***a*.** Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, risolvere il problema di Cauchy

$$
\begin{cases}
y'' + 3y' - 10y = f(t) \\
y(0) = -4 \\
y'(0) = 0
\end{cases}
$$

cioè scrivere una formula risolutiva esplicita che assegna la soluzione in funzione del generico termine noto $f(t)$, che si suppone L-trasformabile.

b. Ottenere ora la soluzione esplicita $y(t)$ corrispondente al dato:

$$f(t) = e^t\chi_{(0,1)}(t).$$

a. Applichiamo la trasformata di Laplace, ponendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)), F(s) = \mathcal{L}(v(f))$ e tenendo conto delle condizioni iniziali:

$$
\begin{aligned}
&s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) - 10Y(s) = F(s) \\
&Y(s)\left(s^2+3s-10\right) = F(s) - 4s - 12 \\
&Y(s) = F(s)\cdot\frac{1}{s^2+3s-10} - 4\frac{s+3}{s^2+3s-10}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s^2+3s-10} &= \frac{1}{(s-2)(s+5)} = \frac{1}{7}\left[\frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{(s+5)}\right] = \mathcal{L}\left(\frac{1}{7}\left(e^{2t} - e^{-5t}\right)\right) \\
\frac{s+1}{s^2+3s-10} &= \frac{s+3}{(s-2)(s+5)} = \frac{1}{7}\left[\frac{5}{(s-2)} + \frac{2}{(s+5)}\right] = \mathcal{L}\left(\frac{1}{7}\left(5e^{2t} + 2e^{-5t}\right)\right) \\
Y(s) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{7}\left(e^{2t} - e^{-5t}\right) * f(t) - \frac{4}{7}\left(5e^{2t} + 2e^{-5t}\right)\right) \\
y(t) &= \frac{1}{7}\int_0^t\left[e^{2(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}\right]f(\tau)\,d\tau - \frac{4}{7}\left(5e^{2t} + 2e^{-5t}\right).
\end{aligned}
$$

b. Calcoliamo la convoluzione:

$$\int_0^t \left[e^{2(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}\right] e^{\tau} \chi_{(0,1)}(\tau)\, d\tau = e^{2t}\int_0^t e^{-\tau}\chi_{(0,1)}(\tau)\, d\tau - e^{-5t}\int_0^t e^{6\tau}\chi_{(0,1)}(\tau)\, d\tau$$

$$= \begin{cases} \text{se } t<1 & e^{2t}\int_0^t e^{-\tau} d\tau - e^{-5t}\int_0^t e^{6\tau} d\tau \\ \text{se } t>1 & e^{2t}\int_0^1 e^{-\tau} d\tau - e^{-5t}\int_0^1 e^{6\tau} d\tau \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } t<1 & e^{2t}\left(1-e^{-t}\right) - e^{-5t}\frac{\left(e^{6t}-1\right)}{6} \\ \text{se } t>1 & e^{2t}\left(1-e^{-1}\right) - e^{-5t}\frac{\left(e^{6}-1\right)}{6} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } t<1 & e^{2t} - e^{t} - \frac{\left(e^{t}-e^{-5t}\right)}{6} \\ \text{se } t>1 & e^{2t}\left(1-e^{-1}\right) - e^{-5t}\frac{\left(e^{6}-1\right)}{6} \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \text{se } t<1 & \frac{1}{7}\left[e^{2t} - e^{t} - \frac{\left(e^{t}-e^{-5t}\right)}{6}\right] - \frac{4}{7}\left(5e^{2t}+2e^{-5t}\right) \\ \text{se } t>1 & \frac{1}{7}\left[e^{2t}\left(1-e^{-1}\right) - e^{-5t}\frac{\left(e^{6}-1\right)}{6}\right] - \frac{4}{7}\left(5e^{2t}+2e^{-5t}\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } t<1 & -\frac{19}{7}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{t} - \frac{47}{42}e^{-5t} \\ \text{se } t>1 & \frac{1}{7}\left[e^{2t}\left(-19-e^{-1}\right) - e^{-5t}\left(\frac{\left(e^{6}-1\right)}{6}+8\right)\right] \end{cases}$$