

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria

Prima prova in itinere. Novembre 2020

A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
Cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Per una successione di funzioni $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definire le nozioni di convergenza puntuale e convergenza uniforme. Enunciare (senza dimostrazione) i vari teoremi studiati che, sotto opportune ipotesi che coinvolgono il concetto di convergenza uniforme, garantiscono che certe proprietà di f_n si trasferiscono al limite f . Mostrare quindi con esempi espliciti che, se viene a cadere l'ipotesi di convergenza uniforme, le conclusioni dei precedenti teoremi possono venire a cadere.

B. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione delle funzioni trascendenti elementari nel campo complesso $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{Sh} z, \operatorname{Ch} z$:

a. dimostrare, per due a scelta di queste funzioni, che si tratta di funzioni olomorfe in tutto il piano complesso;

b. ricavare la formula per la derivata di $\cos z$;

c. ricavare le identità che legano tra loro le funzioni $e^z, \operatorname{Sh} z, \operatorname{Ch} z$;

d. mostrare come dalle precedenti identità si possono calcolare parte reale, parte immaginaria e modulo della funzione $\operatorname{Ch} z$ come funzioni di x, y , mostrando in particolare che la funzione è periodica e determinando i suoi zeri nel piano complesso.

C. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** la prima formula integrale di Cauchy (NON confonderla con il teorema di Cauchy dell'integrale nullo), richiamando i risultati utilizzati nella dimostrazione.

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di residuo, enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema dei residui. Quindi, enunciare e **dimostrare** le due formule studiate per il calcolo del residuo in un polo *del prim'ordine*.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Determinare l'armonica coniugata $v(x, y)$ della seguente funzione $u(x, y)$, armonica in tutto il piano:

$$u(x, y) = x \operatorname{Ch} x \sin y + y \operatorname{Sh} x \cos y.$$

Quindi, riconoscere la funzione $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ come funzione della variabile complessa $z = x + iy$ (e non solo come funzione di x, y).

2. (5 punti). Si calcoli il seguente integrale di linea nel campo complesso, giustificando il procedimento seguito:

$$I = \int_{\gamma_2(0)} \frac{1}{|z|^3} \left(\bar{z} + \frac{e^{-z}}{(z+i)^2+4} + \frac{e^{z^2}}{z^2+16} \right) dz$$

dove $\gamma_2(0)$, in base alle convenzioni standard, indica la circonferenza di centro 0 e raggio 2 percorsa in verso antiorario.

3. (5 punti). Calcolare il seguente integrale col metodo dei residui, giustificando brevemente il procedimento seguito e semplificando il risultato ottenuto.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{2x^2 + 6x + 9} dx.$$

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria

Prima prova in itinere. Novembre 2019

A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti

Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Per una successione di funzioni $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definire le nozioni di convergenza puntuale e convergenza uniforme. Enunciare (senza dimostrazione) i vari teoremi studiati che, sotto opportune ipotesi che coinvolgono il concetto di convergenza uniforme, garantiscono che certe proprietà di f_n si trasferiscono al limite f . Mostrare quindi con esempi espliciti che, se viene a cadere l'ipotesi di convergenza uniforme, le conclusioni dei precedenti teoremi possono venire a cadere.

Risposta: v. libro di testo, §1.2.1-1.2.2.

B. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione delle funzioni trascendenti elementari nel campo complesso $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{Sh} z, \operatorname{Ch} z$:

a. dimostrare, per due a scelta di queste funzioni, che si tratta di funzioni olomorfe in tutto il piano complesso;

b. ricavare la formula per la derivata di $\cos z$;

c. ricavare le identità che legano tra loro le funzioni $e^z, \operatorname{Sh} z, \operatorname{Ch} z$;

d. mostrare come dalle precedenti identità si possono calcolare parte reale, parte immaginaria e modulo della funzione $\operatorname{Ch} z$ come funzioni di x, y , mostrando in particolare che la funzione è periodica e determinando i suoi zeri nel piano complesso.

Risposta: v. libro di testo, §6.4.2.

C. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** la prima formula integrale di Cauchy (NON confonderla con il teorema di Cauchy dell'integrale nullo), richiamando i risultati utilizzati nella dimostrazione.

Risposta: v. libro di testo, §6.5.2.

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di residuo, enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema dei residui. Quindi, enunciare e **dimostrare** le due formule studiate per il calcolo del residuo in un polo *del prim'ordine*.

Risposta: v. libro di testo, §6.6.3, 6.6.4.2.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Determinare l'armonica coniugata $v(x, y)$ della seguente funzione $u(x, y)$, armonica in tutto il piano:

$$u(x, y) = x \operatorname{Ch} x \sin y + y \operatorname{Sh} x \cos y.$$

Quindi, riconoscere la funzione $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ come funzione della variabile complessa $z = x + iy$ (e non solo come funzione di x, y).

Cerchiamo $v(x, y)$ per cui si abbia:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= (\operatorname{Ch} x + x \operatorname{Sh} x) \sin y + y \operatorname{Ch} x \cos y. \\ u_y(x, y) &= x \operatorname{Ch} x \cos y + \operatorname{Sh} x (\cos y - y \sin y). \end{aligned}$$

Poiché

$$v_x = -u_y = -x \operatorname{Ch} x \cos y + \operatorname{Sh} x (y \sin y - \cos y)$$

si ha:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int [-x \operatorname{Ch} x \cos y + \operatorname{Sh} x (y \sin y - \cos y)] dx \\ &= -\cos y \int x \operatorname{Ch} x dx + (y \sin y - \cos y) \int \operatorname{Sh} x dx + c(y) \\ \int x \operatorname{Ch} x dx &= x \operatorname{Sh} x - \int \operatorname{Sh} x dx = x \operatorname{Sh} x - \operatorname{Ch} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= -\cos y (x \operatorname{Sh} x - \operatorname{Ch} x) + (y \sin y - \cos y) \operatorname{Ch} x + c(y) \\ &= -x \operatorname{Sh} x \cos y + \operatorname{Ch} x (y \sin y) + c(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y &= x \operatorname{Sh} x \sin y + \operatorname{Ch} x (\sin y + y \cos y) + c'(y) \\ &= u_x = (\operatorname{Ch} x + x \operatorname{Sh} x) \sin y + y \operatorname{Ch} x \cos y \end{aligned}$$

quindi $c' = 0$, $c = \text{costante}$ e, a meno di costante

$$v(x, y) = -x \operatorname{Sh} x \cos y + \operatorname{Ch} x (y \sin y).$$

Si ha in definitiva:

$$f(x + iy) = [x \operatorname{Ch} x \sin y + y \operatorname{Sh} x \cos y] + i[-x \operatorname{Sh} x \cos y + \operatorname{Ch} x (y \sin y)].$$

Ponendo $y = 0$ nella precedente si ha

$$f(x) = -ix \operatorname{Sh} x \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Per il principio di identità delle funzioni analitiche, segue:

$$f(z) = -iz \operatorname{Sh} z \text{ per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

2. (5 punti). Si calcoli il seguente integrale di linea nel campo complesso, giustificando il procedimento seguito:

$$I = \int_{\gamma_2(0)} \frac{1}{|z|^3} \left(\bar{z} + \frac{e^{-z}}{(z+i)^2+4} + \frac{e^{z^2}}{z^2+16} \right) dz$$

dove $\gamma_2(0)$, in base alle convenzioni standard, indica la circonferenza di centro 0 e raggio 2 percorsa in verso antiorario.

Poiché su $\gamma_2(0)$ è $|z| = 2$ si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \int_{\gamma_2(0)} \left(\bar{z} + \frac{e^{-z}}{(z+i)^2+4} + \frac{e^{z^2}}{z^2+16} \right) dz \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \int_{\gamma_2(0)} \bar{z} dz + \int_{\gamma_2(0)} \frac{e^{-z}}{(z+i)^2+4} dz + \int_{\gamma_2(0)} \frac{e^{z^2}}{z^2+16} dz \right\} \\ &\equiv \frac{1}{8} \{I_1 + I_2 + I_3\}. \end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i tre integrali.

I_1 , dalla definizione di integrale:

$$\gamma_2(0) : z = 2e^{it} \text{ per } t \in [0, 2\pi]; \bar{z} = 2e^{-it}; dz = 2ie^{it} dt$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} 2e^{-it} 2ie^{it} dt = 4i \int_0^{2\pi} dt = 8\pi i.$$

I_2 , dal teorema dei residui: la funzione $f(z) = \frac{e^{-z}}{(z+i)^2+4}$ è olomorfa a eccezione dei due poli del prim'ordine in cui si annulla il denominatore, cioè:

$$\begin{aligned} (z+i)^2+4 &= 0 \\ (z+i) &= \pm 2i \\ z &= i, z = -3i. \end{aligned}$$

All'interno del circuito $\gamma_2(0)$ cade solo il polo $z = i$, perciò

$$I_2 = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-z}}{(z+i)^2+4}, i \right) = 2\pi i \left(\frac{e^{-z}}{2(z+i)} \right)_{z=i} = 2\pi i \left(\frac{e^{-i}}{4i} \right) = \frac{\pi}{2} e^{-i}.$$

I_3 dal teorema di Cauchy dell'integrale nullo: la funzione $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2+16}$ è olomorfa tranne nei poli $z = \pm 4i$, che non cadono all'interno di $\gamma_2(0)$, perciò

$$I_3 = 0.$$

In definitiva,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \{I_1 + I_2 + I_3\} = \frac{1}{8} \left\{ 8\pi i + \frac{\pi}{2} e^{-i} + 0 \right\} = \pi i + \frac{\pi}{16} e^{-i} \\ &= \pi \left(\frac{1}{16} \cos 1 + i \left(1 - \frac{1}{16} \sin 1 \right) \right). \end{aligned}$$

3. (5 punti). Calcolare il seguente integrale col metodo dei residui, giustificando brevemente il procedimento seguito e semplificando il risultato ottenuto.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{2x^2 + 6x + 9} dx.$$

Si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{2x^2 + 6x + 9} dx = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{2x^2 + 6x + 9} dx$$

L'integranda complessa è del tipo $e^{ix} R(x)$ dove $R(x)$ è una funzione razionale con denominatore che non si annulla per x reale e ha grado 2, numeratore costante.

$$2z^2 + 6z + 9 = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-18}}{2} = \frac{-3 \pm 3i}{2} \text{ poli del prim'ordine.}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{2x^2 + 6x + 9} dx &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{2z^2 + 6z + 9}, \frac{-3 + 3i}{2} \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{iz}}{4z + 6} \right)_{/z = \frac{-3+3i}{2}} = \pi i \left\{ \frac{e^{i\left(\frac{-3+3i}{2}\right)}}{3i} \right\} \\ &= \frac{\pi}{3} \left\{ e^{\frac{3}{2}(-1-i)} \right\} = \frac{\pi}{3} e^{-3/2} \left\{ \cos \left(\frac{3}{2} \right) - i \sin \left(\frac{3}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{2x^2 + 6x + 9} dx = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{2x^2 + 6x + 9} dx = \frac{\pi}{3} e^{-3/2} \cos \left(\frac{3}{2} \right)$$