Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Seconda prova in itinere. Gennaio 2021
A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si discuta poi qualche applicazione di questo teorema che si è incontrata nel corso.

B. (6 punti). Dare la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare (in particolare, riportando gli assiomi di prodotto scalare), spazio di Hilbert, e fare esempi di spazi di Hilbert, di spazi con prodotto scalare che non sono di Hilbert, e di spazi di Banach che non sono di Hilbert, giustificando le proprie affermazioni.

C. (6 punti). Mostrare come si risolve mediante la trasformata di Fourier il problema di Cauchy per l'equazione del calore in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\Delta u(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(con D costante positiva). Non si richiede di discutere le ipotesi di validità della formula ottenuta, ma di mostrare in dettaglio come si ottiene la formula, citando con precisione le varie proprietà della trasformata di Fourier che si utilizzano.

D. (6 punti). Dare la definizione di *problema di Sturm-Liouville regolare* e enunciare il teorema relativo ai suoi autovalori e autofunzioni, dimostrando le due affermazioni riguardanti la positività degli autovalori e l'ortogonalità delle autofunzioni.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (4 punti). Considerando nota la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}$$

e sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier:

a. Calcolare
$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) \text{ per } a > 0 \text{ qualsiasi;}$$
quindi calcolare
$$\mathcal{F}\left(e^{-3x^2} * e^{-5x^2}\right)$$
(in entrambi i casi, si chiede di riportare i passaggi, non limitarsi a scrivere il risultato), riscrivendo il risultato nella forma il più possibile semplificata.

b. Calcolare $e^{-3x^2} * e^{-5x^2}$, sfruttando il risultato del punto precedente. (Suggerimento: non occorre calcolare l'integrale di convoluzione; ricondursi alle trasformate appena calcolate). Si richiede di arrivare a un'espressione analitica esplicita del risultato, che non contenga integrali o trasformate.

2. (6 punti). Si consideri l'equazione integrodifferenziale di un circuito LCR in serie:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

con $L = 1, C = 0.04, R = 6, q_0 = 0$ e condizione iniziale $i(0) = 2$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere esplicitamente la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

b. Si consideri ora il caso

$$v(t) = e^{-3t}\chi_{(0,\pi)}(t).$$

Prevedere, prima di risolvere l'equazione, in base alla regolarità del dato $v(t)$ e alla struttura dell'equazione, la regolarità che si attende per $i(t)$. Quindi ottenere la soluzione esplicita $i(t)$ corrispondente a questo dato.

3. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{(x^2+3)^2}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui.

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Seconda prova in itinere. Gennaio 2021
A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si discuta poi qualche applicazione di questo teorema che si è incontrata nel corso.

Risposta: v. libro di testo, §2.5

B. (6 punti). Dare la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare (in particolare, riportando gli assiomi di prodotto scalare), spazio di Hilbert, e fare esempi di spazi di Hilbert, di spazi con prodotto scalare che non sono di Hilbert, e di spazi di Banach che non sono di Hilbert, giustificando le proprie affermazioni.

Risposta: v. libro di testo, §4.1-4.2

C. (6 punti). Mostrare come si risolve mediante la trasformata di Fourier il problema di Cauchy per l'equazione del calore in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\Delta u(x,t) & \text{per } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(con D costante positiva). Non si richiede di discutere le ipotesi di validità della formula ottenuta, ma di mostrare in dettaglio come si ottiene la formula, citando con precisione le varie proprietà della trasformata di Fourier che si utilizzano.

Risposta: v. libro di testo, §7.3.2

D. (6 punti). Dare la definizione di *problema di Sturm-Liouville regolare* e enunciare il teorema relativo ai suoi autovalori e autofunzioni, dimostrando le due affermazioni riguardanti la positività degli autovalori e l'ortogonalità delle autofunzioni.

Risposta: v. libro di testo, §4.7.1.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (4 punti). Considerando nota la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}$$

e sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier:

a. Calcolare

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) \text{ per } a > 0 \text{ qualsiasi;}$$

quindi calcolare

$$\mathcal{F}\left(e^{-3x^2} * e^{-5x^2}\right)$$

(in entrambi i casi, si chiede di riportare i passaggi, non limitarsi a scrivere il risultato), riscrivendo il risultato nella forma il più possibile semplificata.

b. Calcolare $e^{-3x^2} * e^{-5x^2}$, sfruttando il risultato del punto precedente. (Suggerimento: non occorre calcolare l'integrale di convoluzione; ricondursi alle trasformate appena calcolate). Si richiede di arrivare a un'espressione analitica esplicita del risultato, che non contenga integrali o trasformate.

a. Sia $g(x) = e^{-x^2}, \mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}$ allora

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(g^{\sqrt{a}}(x)\right)(\xi) = \widehat{g}_{\sqrt{a}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}.$$

Perciò

$$\mathcal{F}\left(e^{-3x^2} * e^{-5x^2}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(e^{-3x^2}\right)(\xi) \cdot \mathcal{F}\left(e^{-5x^2}\right)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{5}}e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{5}}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{15}}e^{-\pi^2\xi^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)} = \frac{\pi}{\sqrt{15}}e^{-\pi^2\frac{8}{15}\xi^2}.$$

b.

$$\mathcal{F}\left(e^{-3x^2} * e^{-5x^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{\sqrt{15}}e^{-\pi^2\frac{8}{15}\xi^2} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{15}}\sqrt{\frac{15/8}{\pi}}\right)\sqrt{\frac{\pi}{15/8}}e^{-\pi^2\xi^2/\frac{15}{8}}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{8}}\mathcal{F}\left(e^{-\frac{15}{8}x^2}\right) = \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}}e^{-\frac{15}{8}x^2}\right)$$

perciò

$$e^{-3x^2} * e^{-5x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}e^{-\frac{15}{8}x^2}.$$

2. (6 punti). Si consideri l'equazione integrodifferenziale di un circuito LCR in serie:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

con $L = 1, C = 0.04, R = 6, q_0 = 0$ e condizione iniziale $i(0) = 2$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere esplicitamente la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

b. Si consideri ora il caso

$$v(t) = e^{-3t}\chi_{(0,\pi)}(t).$$

Prevedere, prima di risolvere l'equazione, in base alla regolarità del dato $v(t)$ e alla struttura dell'equazione, la regolarità che si attende per $i(t)$. Quindi ottenere la soluzione esplicita $i(t)$ corrispondente a questo dato.

L'equazione è

$$i'(t) + 6i(t) + 25\int_0^t i(\tau)\,d\tau = v(t)$$

Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri e ponendo $I(s) = \mathcal{L}(i)(s), V(s) = \mathcal{L}(v)(s)$ si ha:

$$\begin{aligned} sI(s) - i(0) + 6I(s) + \frac{25}{s}I(s) &= V(s) \\ \left(\frac{s^2+6s+25}{s}\right)I(s) &= V(s) + 2 \\ I(s) &= V(s)\frac{s}{s^2+6s+25} + \frac{2s}{s^2+6s+25} \\ &\equiv V(s)H(s) + G(s) \end{aligned}$$

con

$$H(s) = \frac{s}{s^2+6s+25}; G(s) = 2H(s),$$

funzioni che dobbiamo ora antitrasformare.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s}{(s+3)^2+16} = \frac{s+3}{(s+3)^2+4^2} - \frac{3}{4}\frac{4}{(s+3)^2+4^2} \\ &= \mathcal{L}\left(e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{4}e^{-3t}\sin 4t\right). \end{aligned}$$

$$G(s) = 2H(s) = \mathcal{L}\left(2e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{2}e^{-3t}\sin 4t\right)$$

$$I(s) = \mathcal{L}\left(v(t) * \left(e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{4}e^{-3t}\sin 4t\right) + 2e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{2}e^{-3t}\sin 4t\right)$$

perciò la soluzione è:

$$\begin{aligned} i(t) &= v(t) * \left(e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{4}e^{-3t}\sin 4t\right) + 2e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{2}e^{-3t}\sin 4t \\ &= 2e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{2}e^{-3t}\sin 4t + \int_0^t \left(e^{-3(t-\tau)}\cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4}e^{-3(t-\tau)}\sin 4(t-\tau)\right)v(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

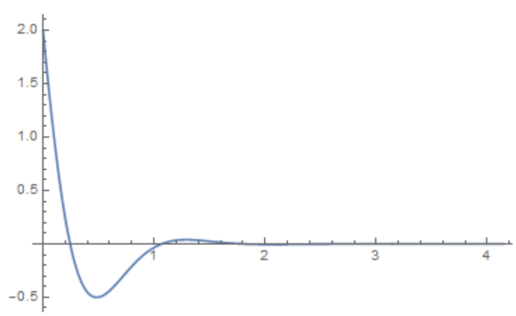
b. Poiché il termine noto è discontinuo in $t = \pi$, la soluzione continua, derivabile a tratti, ma non esisterà $i'(\pi)$. Calcoliamo la convoluzione

$$\int_0^t \left(e^{-3(t-\tau)} \cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4} e^{-3(t-\tau)} \sin 4(t-\tau) \right) v(\tau)\, d\tau$$
$$= e^{-3t} \int_0^t \left(\cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4} \sin 4(t-\tau) \right) \chi_{(0,\pi)}(\tau)\, d\tau$$
$$= \begin{cases} \text{se } t < \pi & e^{-3t} \int_0^t \left(\cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4} \sin 4(t-\tau) \right) d\tau \\ \text{se } t > \pi & e^{-3t} \int_0^\pi \left(\cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4} \sin 4(t-\tau) \right) d\tau \end{cases}$$

$$\int_0^t \left(\cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4} \sin 4(t-\tau) \right) d\tau = \int_0^t \left(\cos 4\tau - \frac{3}{4} \sin 4\tau \right) d\tau$$
$$= \left[\frac{1}{4} \sin 4\tau + \frac{3}{16} \cos 4\tau \right]_0^t = \frac{1}{4} \sin 4t + \frac{3}{16} (\cos 4t - 1).$$

$$\int_0^\pi \left(\cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4} \sin 4(t-\tau) \right) d\tau = \left[-\frac{1}{4} \sin 4(t-\tau) - \frac{3}{16} \cos 4(t-\tau) \right]_0^\pi$$
$$= -\frac{1}{4} \sin(4t - 4\pi) - \frac{3}{16} \cos(4t - 4\pi) + \frac{1}{4} \sin 4t + \frac{3}{16} \cos 4t = 0$$

$$i(t) = \begin{cases} \text{se } t < \pi & 2e^{-3t} \cos 4t - \frac{3}{2} e^{-3t} \sin 4t + e^{-3t} \left(\frac{1}{4} \sin 4t + \frac{3}{16} \cos 4t - \frac{3}{16} \right) \\ \text{se } t > \pi & 2e^{-3t} \cos 4t - \frac{3}{2} e^{-3t} \sin 4t \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \text{se } t < \pi & e^{-3t} \left\{ \frac{35}{16} \cos 4t - \frac{5}{4} \sin 4t - \frac{3}{16} \right\} \\ \text{se } t > \pi & e^{-3t} \left\{ 2 \cos 4t - \frac{3}{2} \sin 4t \right\} \end{cases}$$



3. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 3)^2}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui.

a. f è reale e dispari, quindi $\widehat{f}$ sarà immaginaria pura e dispari. $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ quindi $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ ma potrebbe essere discontinua. $f \in C^\infty$ quindi $\widehat{f}(\xi) = o\left(1/\xi^k\right)$ per ogni k, per $\xi \to \pm\infty$.

b. Calcoliamo per $\xi > 0$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(x^3 - 2x\right)}{\left(x^2+3\right)^2} e^{-2\pi i \xi x} dx,$$

e poi simmetrizzeremo dispari.

Poiché

$$\left(z^2+3\right)^2 = 0 \text{ per } z = \pm i\sqrt{3},$$

la funzione $f(z) = \frac{\left(z^3-2z\right)}{\left(z^2+3\right)^2} e^{-2\pi i \xi z}$ ha poli del 2° ordine in $z = \pm i\sqrt{3}$.

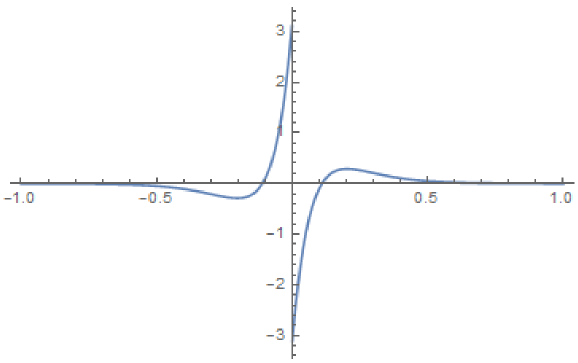
Per $\xi > 0$,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= -2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left(\frac{\left(z^3-2z\right)}{\left(z^2+3\right)^2} e^{-2\pi i \xi z}, -i\sqrt{3} \right) \right\} \\
&= -2\pi i \left(\frac{\left(z^3-2z\right)}{\left(z-i\sqrt{3}\right)^2} e^{-2\pi i \xi z} \right)'_{/z=-i\sqrt{3}} \\
&= -2\pi i \left\{ e^{-2\pi i \xi z} \left[-2\pi i \xi \frac{\left(z^3-2z\right)}{\left(z-i\sqrt{3}\right)^2} + \frac{\left(3z^2-2\right)\left(z-i\sqrt{3}\right)^2 - 2\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z^3-2z\right)}{\left(z-i\sqrt{3}\right)^4} \right] \right\}_{/z=-i\sqrt{3}} \\
&= -2\pi i e^{-2\pi\sqrt{3}\xi} \left\{ -2\pi i \xi \frac{z\left(z^2-2\right)}{\left(-2i\sqrt{3}\right)^2} + \frac{\left(3z^2-2\right)\left(-2i\sqrt{3}\right) - 2z\left(z^2-2\right)}{\left(-2i\sqrt{3}\right)^3} \right\}_{/z=-i\sqrt{3}} \\
&= -2\pi i e^{-2\pi\sqrt{3}\xi} \left\{ -2\pi i \xi \frac{5i\sqrt{3}}{-12} + \frac{(-9-2)\left(-2i\sqrt{3}\right) - 10i\sqrt{3}}{24\sqrt{3}i} \right\} \\
&= \pi i e^{-2\pi\sqrt{3}\xi} \left\{ \frac{5}{3}\sqrt{3}\pi\xi - 1 \right\}.
\end{aligned}$$

Simmetrizzando dispari si ha:

$$\widehat{f}(\xi) = \pi i e^{-2\pi\sqrt{3}|\xi|} \left\{ \frac{5}{3}\sqrt{3}\pi|\xi| - 1 \right\} (\operatorname{sgn}\xi).$$

Grafico di $\operatorname{Im}\widehat{f}(\xi)$:



La funzione ha decadimento esponenziale ed è effettivamente discontinua nell'origine: $\widehat{f}(0^{\pm}) = \mp\pi i$.