Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Primo appello. Febbraio 2022
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom	
Dom	
Dom	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Fare esempi di successioni di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f_n \to f$ e...

a. f_n converge puntualmente ma non uniformemente. (Giustificare l'affermazione fatta).

b. f_n converge uniformemente. (Giustificare l'affermazione fatta).

c. f_n sono continue ma f è discontinua

d. f_n sono limitate ma f è illimitata

e. f_n sono derivabili ma f non è derivabile.

B. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema di regolarità delle funzioni olomorfe e la formula integrale di Cauchy per le derivate.

C. (6 punti). Enunciare e dimostrare il teorema di Pitagora negli spazi vettoriali con prodotto scalare per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e dimostrare la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

D. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi enunciare con precisione e dimostrare le proprietà della trasformata di Fourier che riguardano: trasformata di una derivata; derivata di una trasformata. Gli enunciati sono richiesti per funzioni di n variabili e derivate di ordine qualsiasi; le dimostrazioni sono richieste solo per funzioni di una variabile e derivata prima.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo in ogni punto di singolarità non essenziale.

$$f(z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)}{\left(e^{z^2-1}-1\right)(z+3)^2}.$$

2. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = xe^{-2|x|}\sin(2\pi x).$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$. Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. A partire dalla trasformata di Fourier considerata nota

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2},$$

calcolare quindi $\widehat{f}$ applicando opportune proprietà della trasformata di Fourier (senza calcolare integrali, ma giustificando i passaggi), e semplificare l'espressione trovata .

3. (5 punti). *a.* Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(t) + \int_0^t (9(t-\tau)+6)\,y(\tau)\,d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita y, per un generico termine noto f supposto $\mathcal{L}$-trasformabile.

b. Successivamente, determinare la soluzione corrispondente a $f(t) = 5$, semplificando l'espressione ottenuta.

[*Suggerimento:* per svolgere il punto b conviene *non* applicare la formula trovata nel punto a per $y(t)$, ma...].

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Recupero 1^a prova in itinere. Febbraio 2022
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom	
Dom	
Dom	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Fare esempi di successioni di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f_n \to f$ e...

a. f_n converge puntualmente ma non uniformemente. (Giustificare l'affermazione fatta).

b. f_n converge uniformemente. (Giustificare l'affermazione fatta).

c. f_n sono continue ma f è discontinua

d. f_n sono limitate ma f è illimitata

e. f_n sono derivabili ma f non è derivabile.

B. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione delle funzioni trascendenti elementari nel campo complesso $e^z, \sin z, \cos z, \text{Sh}\, z, \text{Ch}\, z$**:**

a. dimostrare che si tratta di funzioni olomorfe in tutto il piano complesso;

b. ricavare le formule per la derivata di $\sin z, \text{Sh}\, z$**;**

c. calcolare parte reale, parte immaginaria e modulo delle funzioni $\sin z, \text{Sh}\, z$ come funzioni di x, y**,** mostrando in particolare che le funzioni sono illimitate e determinando i loro zeri nel piano complesso e il loro periodo.

C. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema di regolarità delle funzioni olomorfe e la formula integrale di Cauchy per le derivate.

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di singolarità isolata, singolarità eliminabile, polo di ordine n, enunciare e **dimostrare** il teorema che descrive il comportamento di una funzione in un intorno di un punto di singolarità eliminabile o di un polo (prolungabilità olomorfa di opportune funzioni).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Determinare l'armonica coniugata $v(x,y)$ della seguente funzione $u(x,y)$, armonica in tutto il piano:

$$u(x,y)=e^{x}\left\{\left(x^{2}-y^{2}\right)\cos y-2xy\sin y\right\}.$$

Quindi, riconoscere la funzione $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ come funzione della variabile complessa $z=x+iy$ (e non solo come funzione di x,y).

2. (5 punti). Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo in ogni punto di singolarità non essenziale.

$$f(z)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)}{\left(e^{z^{2}-1}-1\right)(z+3)^{2}}.$$

3. (5 punti). Calcolare il seguente integrale, utilizzando il metodo dei residui:

$$I=\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos(2\pi x)}{(x+i)^{2}\left(x^{2}+3\right)}dx.$$

(Riportare impostazione e passaggi, e semplificare il risultato ottenuto).

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Recupero 2^a prova in itinere. Febbraio 2022
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom	
Dom	
Dom	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$ (distinguendo il caso $p < \infty$ e $p = \infty$) e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi enunciare e dimostrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita.

B. (6 punti). Enunciare e dimostrare il teorema di Pitagora negli spazi vettoriali con prodotto scalare per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e dimostrare la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

C. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi enunciare con precisione e dimostrare le proprietà della trasformata di Fourier che riguardano: trasformata di una derivata; derivata di una trasformata. Gli enunciati sono richiesti per funzioni di n variabili e derivate di ordine qualsiasi; le dimostrazioni sono richieste solo per funzioni di una variabile e derivata prima.

D. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e dimostrare le proprietà che riguardano la L-trasformata della convoluzione e della funzione integrale.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{(x+i)^2 (x^2+3)}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$. Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ e riscrivere l'espressione trovata nella forma più semplice.

2. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = xe^{-2|x|} \sin(2\pi x).$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$. Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. A partire dalla trasformata di Fourier considerata nota

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2},$$

calcolare quindi $\widehat{f}$ applicando opportune proprietà della trasformata di Fourier (senza calcolare integrali, ma giustificando i passaggi), e semplificare l'espressione trovata .

3. (5 punti). *a.* Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(t) + \int_0^t (9(t-\tau)+6)\, y(\tau)\, d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita y, per un generico termine noto f supposto $\mathcal{L}$-trasformabile.

b. Successivamente, determinare la soluzione corrispondente a $f(t) = 5$, semplificando l'espressione ottenuta.

[*Suggerimento:* per svolgere il punto b conviene *non* applicare la formula trovata nel punto a per $y(t)$, ma...].

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Primo appello. Febbraio 2022
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

	Punti
Dom	
Dom	
Dom	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Fare esempi di successioni di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f_n \to f$ e...

a. f_n converge puntualmente ma non uniformemente. (Giustificare l'affermazione fatta).

b. f_n converge uniformemente. (Giustificare l'affermazione fatta).

c. f_n sono continue ma f è discontinua

d. f_n sono limitate ma f è illimitata

e. f_n sono derivabili ma f non è derivabile.

Risposta: v. libro di testo, § 1.2.1, 1.2.2.

B. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema di regolarità delle funzioni olomorfe e la formula integrale di Cauchy per le derivate.

Risposta: v. dispensa integrativa, § 4.

C. (6 punti). Enunciare e dimostrare il teorema di Pitagora negli spazi vettoriali con prodotto scalare per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e dimostrare la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

Risposta: v. libro di testo, § 4.1, 4.2.

D. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi enunciare con precisione e dimostrare le proprietà della trasformata di Fourier che riguardano: trasformata di una derivata; derivata di una trasformata. Gli enunciati sono richiesti per funzioni di n variabili e derivate di ordine qualsiasi; le dimostrazioni sono richieste solo per funzioni di una variabile e derivata prima.

Risposta: v. libro di testo, § 7.1.1.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo in ogni punto di singolarità non essenziale.

$$f(z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)}{\left(e^{z^2-1}-1\right)(z+3)^2}.$$

Studiamo i punti (dove si annullano i vari denominatori):
$z = 0; z = \pm 1; z = -3$.
Per $z \to 0$,

$$f(z) \sim \frac{1}{(e^{-1}-1)\,9}\cos\left(\frac{\pi}{z}\right),$$

e $z = 0$ è una singolarità essenziale per la presenza del fattore $\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)$.
Per $z \to 1$,

$$f(z) \sim \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z^2-1)\,16} = \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z-1)(z+1)\,16} \sim \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z-1)\,32}$$

e per De L'Hospital,

$$\lim_{z\to 1}\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z-1)\,32} = \lim_{z\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{32} = \frac{\pi}{64},$$

perciò $z = 1$ è una singolarità eliminabile e $\operatorname{Res}(f(z), 1) = 0$.
Analogamente, Per $z \to -1$,

$$f(z) \sim \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z^2-1)\,4} = \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z-1)(z+1)\,4} \sim \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z+1)\,8}$$

e per De L'Hospital,

$$\lim_{z\to -1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z+1)\,8} = \lim_{z\to -1}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{8} = \frac{\pi}{16},$$

perciò $z = -1$ è una singolarità eliminabile e $\operatorname{Res}(f(z), 1) = 0$.
Per $z \to -3$,

$$f(z) \sim \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{(e^8-1)(z+3)^2} \sim \frac{1}{(e^8-1)\,2}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z+3)^2}.$$

Poiché se $g(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ si ha $g(-3) = 0, g'(z) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right), g'(-3) = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) \sim \frac{\pi}{2}(z+3),$$

perciò

$$f(z) \sim \frac{1}{(e^8-1)\,2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{(z+3)}$$

e $z=-3$ è un polo del prim'ordine. Inoltre

$$\operatorname{Res}(f(z), -3) = \lim_{z \to -3} (z+3) f(z) = \frac{\pi}{4(e^8-1)}.$$

2. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = xe^{-2|x|} \sin(2\pi x).$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$. Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. A partire dalla trasformata di Fourier considerata nota

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2},$$

calcolare quindi $\widehat{f}$ applicando opportune proprietà della trasformata di Fourier (senza calcolare integrali, ma giustificando i passaggi), e semplificare l'espressione trovata .

a. f è reale e pari, quindi $\widehat{f}$ sarà reale e pari. $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni n, quindi $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0_*(\mathbb{R})$. Esiste $f'' \in C^0_*(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, f'' derivabile a tratti, quindi $\widehat{f}(\xi) = o\left(1/\xi^3\right)$ per $\xi \to \pm\infty$.

b. Per la formula della dilatazione,

$$\mathcal{F}\left(e^{-2|x|}\right)(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{1+4\pi^2\frac{\xi^2}{4}} = \frac{1}{1+\pi^2\xi^2}.$$

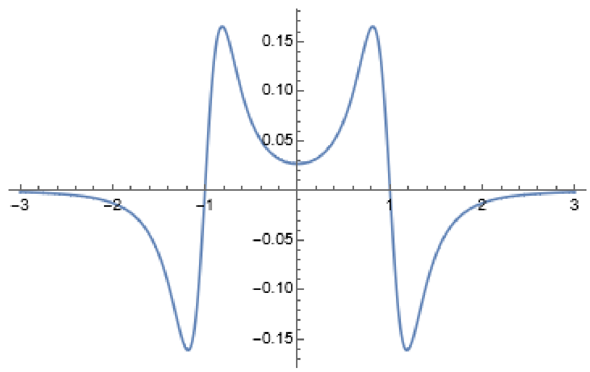
Per la formula della derivata della trasformata,

$$\mathcal{F}\left(xe^{-2|x|}\right)(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{1+\pi^2\xi^2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\frac{2\pi^2\xi}{\left(1+\pi^2\xi^2\right)^2} = -\frac{i\pi\xi}{\left(1+\pi^2\xi^2\right)^2}.$$

Per la formula della trasformata di $f(x)\,e^{2\pi i a x}$,

$$\mathcal{F}\left(f(x)\sin(2\pi x)\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(f(x)\frac{e^{2\pi i x} - e^{-2\pi i x}}{2i}\right)(\xi) = \frac{1}{2i}\left(\widehat{f}(\xi-1) - \widehat{f}(\xi+1)\right)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(xe^{-2|x|}\sin(2\pi x)\right)(\xi) &= \frac{-i\pi}{2i}\left(\frac{(\xi-1)}{\left(1+\pi^2(\xi-1)^2\right)^2} - \frac{(\xi+1)}{\left(1+\pi^2(\xi+1)^2\right)^2}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2}\left(\frac{\xi-1}{\left(1+\pi^2\left(\xi^2+1\right)-2\pi^2\xi\right)^2} - \frac{\xi+1}{\left(1+\pi^2\left(\xi^2+1\right)-2\pi^2\xi\right)^2}\right).\end{aligned}$$



3. (5 punti). *a.* Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(t) + \int_0^t (9(t-\tau) + 6)\, y(\tau)\, d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita y, per un generico termine noto f supposto $\mathcal{L}$-trasformabile.

b. Successivamente, determinare la soluzione corrispondente a $f(t) = 5$, semplificando l'espressione ottenuta.

[*Suggerimento:* per svolgere il punto *b* conviene *non* applicare la formula trovata nel punto *a* per $y(t)$, ma...].

a. Applichiamo la trasformata di Laplace, ponendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$, $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$:

$$Y(s) + Y(s)\left(\frac{9}{s^2} + \frac{6}{s}\right) = F(s)$$

$$Y(s)\left(1 + \frac{6}{s} + \frac{9}{s^2}\right) = F(s)$$

$$Y(s) = F(s)\left(\frac{s^2}{s^2+6s+9}\right) = F(s)\left(1 - \frac{6s+9}{(s+3)^2}\right)$$

$$= F(s) - F(s) \cdot \frac{6(s+3)-9}{(s+3)^2}$$

$$\frac{6s+9}{(s+3)^2} = \frac{6(s+3)-9}{(s+3)^2} = \frac{6}{s+3} - \frac{9}{(s+3)^2} = \mathcal{L}\left(6e^{-4t} - 9te^{-3t}\right)$$

$$y(t) = f(t) - \left(6e^{-4t} - 9te^{-3t}\right) * f(t)$$

b. Se $f(t) = 5$ si trova:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= F(s)\left(\frac{s^2}{s^2+6s+9}\right) = Y(s) = \frac{5}{s}\left(\frac{s^2}{s^2+6s+9}\right) = \frac{5s}{(s+3)^2} \\
&= 5\frac{(s+3)}{(s+3)^2} - \frac{15}{(s+3)^2} = \frac{5}{(s+3)} - \frac{15}{(s+3)^2} \\
&= \mathcal{L}\left(5e^{-3t} - 15te^{-3t}\right)
\end{aligned}$$

perciò

$$y(t) = 5e^{-3t} - 15te^{-3t}.$$

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Recupero 1^a prova in itinere. Febbraio 2022
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

	Punti
Dom	
Dom	
Dom	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Fare esempi di successioni di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f_n \to f$ e...

a. f_n converge puntualmente ma non uniformemente. (Giustificare l'affermazione fatta).

b. f_n converge uniformemente. (Giustificare l'affermazione fatta).

c. f_n sono continue ma f è discontinua

d. f_n sono limitate ma f è illimitata

e. f_n sono derivabili ma f non è derivabile.

Risposta: v. libro di testo, §.1.2.1, 1.2.2.

B. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione delle funzioni trascendenti elementari nel campo complesso $e^z, \sin z, \cos z, \operatorname{Sh} z, \operatorname{Ch} z$:

a. dimostrare che si tratta di funzioni olomorfe in tutto il piano complesso;

b. ricavare le formule per la derivata di $\sin z, \operatorname{Sh} z$;

c. calcolare parte reale, parte immaginaria e modulo delle funzioni $\sin z, \operatorname{Sh} z$ come funzioni di x, y, mostrando in particolare che le funzioni sono illimitate e determinando i loro zeri nel piano complesso e il loro periodo.

Risposta: v. libro di testo § 6.4.2, dispensa integrativa § 2, 3.

C. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema di regolarità delle funzioni olomorfe e la formula integrale di Cauchy per le derivate.

Risposta: v. dispensa integrativa, § 4.

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di singolarità isolata, singolarità eliminabile, polo di ordine n, enunciare e **dimostrare** il teorema che descrive il comportamento di una funzione in un intorno di un punto di singolarità eliminabile o di un polo (prolungabilità olomorfa di opportune funzioni).

Risposta: v. libro di testo, § dispensa integrativa, §5.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Determinare líarmonica coniugata $v(x,y)$ della seguente funzione $u(x,y)$, armonica in tutto il piano:

$$u(x,y) = e^x \left\{ \left(x^2 - y^2\right) \cos y - 2xy \sin y \right\}.$$

Quindi, riconoscere la funzione $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ come funzione della variabile complessa $z = x + iy$ (e non solo come funzione di x, y).

Cerchiamo $v(x,y)$ per cui si abbia:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \cos y \cdot \partial_x \left(e^x \left(x^2 - y^2\right)\right) - 2y \sin y \cdot \partial_x \left(e^x x\right) \\ &= \cos y \left(e^x \left(x^2 - y^2 + 2x\right)\right) - 2y \sin y \left(e^x (x+1)\right) \\ &= e^x \left\{ \left(x^2 - y^2 + 2x\right) \cos y - 2(x+1) y \sin y \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y(x,y) &= e^x \cdot \partial_y \left\{ \left(x^2 - y^2\right) \cos y - 2xy \sin y \right\} \\ &= e^x \left\{ -x^2 \sin y - 2y \cos y + y^2 \sin y - 2x \sin y - 2xy \cos y \right\} \\ &= e^x \left\{ \left(-x^2 + y^2 - 2x\right) \sin y - 2(1+x) y \cos y \right\} \end{aligned}$$

$$v_y(x,y) = u_x = e^x \left\{ \left(x^2 - y^2 + 2x\right) \cos y - 2(x+1) y \sin y \right\}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int e^x \left\{ \left(x^2 - y^2 + 2x\right) \cos y - 2(x+1) y \sin y \right\} dy \\ &= e^x \left\{ \left(x^2 + 2x\right) \int \cos y dy - \int y^2 \cos y dy - 2(x+1) \int y \sin y dy \right\} \\ &= e^x \left\{ \left(x^2 + 2x\right) \sin y - \left[y^2 \sin y - \int 2y \sin y dy \right] - 2(x+1) \int y \sin y dy \right\} \\ &= e^x \left\{ \left(x^2 + 2x\right) \sin y - y^2 \sin y - 2x \int y \sin y dy \right\} \end{aligned}$$

$$\int y \sin y dy = -y \cos y + \int \cos y dy = -y \cos y + \sin y$$

$$\begin{aligned} v(x,y) &= e^x \left\{ \left(x^2 + 2x\right) \sin y - y^2 \sin y - 2x(-y \cos y + \sin y) \right\} \\ &= e^x \left\{ \left(x^2 - y^2\right) \sin y + 2xy \cos y \right\} + g(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x(x,y) &= e^x \left\{ \left(x^2 - y^2 + 2x\right) \sin y + 2(x+1) y \cos y \right\} + g'(x) \\ &= -u_y = e^x \left\{ \left(x^2 - y^2 + 2x\right) \sin y + 2(1+x) y \cos y \right\} \end{aligned}$$

quindi $g'(x) = 0, g =$cost. (che possiamo scegliere 0), e

$$v(x,y) = e^x \left\{ \left(x^2 - y^2\right) \sin y + 2xy \cos y \right\}.$$

Perciò

$$f(x+y) = u+iv = e^x \left\{ \left(x^2 - y^2\right) \cos y - 2xy \sin y \right\} + ie^x \left\{ \left(x^2 - y^2\right) \sin y + 2xy \cos y \right\}.$$

In particolare, per $y = 0$ abbiamo

$$f(x) = e^x x^2 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e per il principio di indentità delle funzioni olomorfe, questo significa che

$$f(z) = e^z z^2 \text{ per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

2. (5 punti). Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo in ogni punto di singolarità non essenziale.

$$f(z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{z}\right)}{\left(e^{z^2-1} - 1\right)(z+3)^2}.$$

Studiamo i punti (dove si annullano i vari denominatori):
$z = 0; z = \pm 1; z = -3$.
Per $z \to 0$,

$$f(z) \sim \frac{1}{(e^{-1} - 1) 9} \cos\left(\frac{\pi}{z}\right),$$

e $z = 0$ è una singolarità essenziale per la presenza del fattore $\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)$.
Per $z \to 1$,

$$f(z) \sim \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{(z^2 - 1) 16} = \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{(z-1)(z+1) 16} \sim \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{(z-1) 32}$$

e per De L'Hospital,

$$\lim_{z \to 1} \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{(z-1) 32} = \lim_{z \to 1} \frac{\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{32} = \frac{\pi}{64},$$

perciò $z = 1$ è una singolarità eliminabile e $\operatorname{Res}(f(z), 1) = 0$.
Analogamente, Per $z \to -1$,

$$f(z) \sim \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{(z^2 - 1) 4} = \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{(z-1)(z+1) 4} \sim \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{(z+1) 8}$$

e per De L'Hospital,

$$\lim_{z \to -1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{(z+1) 8} = \lim_{z \to -1} \frac{-\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right)}{8} = \frac{\pi}{16},$$

perciò $z = -1$ è una singolarità eliminabile e $\text{Res}(f(z), 1) = 0$.

Per $z \to -3$,

$$f(z) \sim \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{(e^8 - 1)(z+3)^2} \sim \frac{1}{(e^8-1)\,2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z+3)^2}.$$

Poiché se $g(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ si ha $g(-3) = 0, g'(z) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right), g'(-3) = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) \sim \frac{\pi}{2}(z+3),$$

perciò

$$f(z) \sim \frac{1}{(e^8-1)\,2} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{(z+3)}$$

e $z = -3$ è un polo del prim'ordine. Inoltre

$$\text{Res}(f(z), -3) = \lim_{z \to -3}(z+3)f(z) = \frac{\pi}{4(e^8-1)}.$$

3. (5 punti). Calcolare il seguente integrale, utilizzando il metodo dei residui:

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2\pi x)}{(x+i)^2(x^2+3)}dx.$$

(Riportare impostazione e passaggi, e semplificare il risultato ottenuto).

Scrivendo $\cos(2\pi x) = \frac{e^{2\pi ix}+e^{-2\pi ix}}{2}$ abbiamo

$$I = \frac{1}{2}\left\{\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi ix}}{(x+i)^2(x^2+3)}dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi ix}}{(x+i)^2(x^2+3)}dx\right\} \equiv \frac{1}{2}(I_1 + I_2).$$

Possiamo calcolare I_1, I_2 col metodo dei residui.

Calcoliamo i poli.

$(z+i)^2\left(z^2+3\right) = 0$ per $z = -i$ (polo del second'ordine) e $z = \pm i\sqrt{3}$ (poli del prim'ordine).

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2\pi i\,\text{Res}\left(\frac{e^{2\pi iz}}{(z+i)^2(z^2+3)}, i\sqrt{3}\right) \\
&= 2\pi i\left\{\left(\frac{e^{2\pi iz}}{(z+i)^2\,2z}\right)_{/z=-i\sqrt{3}}\right\} = -2\pi i\left\{\frac{e^{-2\sqrt{3}\pi}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2\left(2i\sqrt{3}\right)}\right\} \\
&= -\pi\frac{e^{-2\sqrt{3}\pi}}{4\sqrt{3}+6}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x}}{(x+i)^2\,(x^2+3)}dx \\
&= -2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z}}{(z+i)^2\,(z^2+3)}, -i \right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z}}{(z+i)^2\,(z^2+3)}, -i\sqrt{3} \right) \right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z}}{(z+i)^2\,(z^2+3)}, -i \right) &= \left(\frac{e^{-2\pi i z}}{(z^2+3)} \right)'_{/z=-i} \\
&= \left(e^{-2\pi i z} \frac{-2\pi i\left(z^2+3\right) - 2z}{\left(z^2+3\right)^2} \right)_{/z=-i} \\
&= e^{-2\pi} \frac{-4\pi i + 2i}{4} = i e^{-2\pi} \frac{-2\pi+1}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z}}{(z+i)^2\,(z^2+3)}, -i\sqrt{3} \right) &= \left(\frac{e^{-2\pi i z}}{(z+i)^2\,2z} \right)_{/z=--i\sqrt{3}} \\
&= \frac{e^{-2\sqrt{3}\pi}}{\left(1-\sqrt{3}\right)^2\left(2i\sqrt{3}\right)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -2\pi i \left\{ i e^{-2\pi} \frac{-2\pi+1}{2} + \frac{e^{-2\sqrt{3}\pi}}{\left(1-\sqrt{3}\right)^2\left(2i\sqrt{3}\right)} \right\} \\
&= \pi \left\{ e^{-2\pi}\,(1-2\pi) - \frac{e^{-2\sqrt{3}\pi}}{4\sqrt{3}-6} \right\}.
\end{aligned}
$$

In definitiva,

$$
\begin{aligned}
I = \frac{1}{2}\left(I_1+I_2\right) &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{-2\sqrt{3}\pi}}{4\sqrt{3}+6} + e^{-2\pi}\,(1-2\pi) - \frac{e^{-2\sqrt{3}\pi}}{4\sqrt{3}-6} \right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(e^{-2\pi}\,(1-2\pi) - e^{-2\sqrt{3}\pi}\left(\frac{1}{4\sqrt{3}-6} + \frac{1}{4\sqrt{3}+6} \right) \right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(e^{-2\pi}\,(1-2\pi) - \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-2\sqrt{3}\pi} \right).
\end{aligned}
$$

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Recupero 2^a prova in itinere. Febbraio 2022
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

	Punti
Dom	
Dom	
Dom	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$ (distinguendo il caso $p < \infty$ e $p = \infty$) e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi enunciare e dimostrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita.
Risposta: v. libro di testo, § 2.4.

B. (6 punti). Enunciare e dimostrare il teorema di Pitagora negli spazi vettoriali con prodotto scalare per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e dimostrare la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.
Risposta: v. libro di testo, § 4.1, 4.2.

C. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$. Quindi enunciare con precisione e dimostrare le proprietà della trasformata di Fourier che riguardano: trasformata di una derivata; derivata di una trasformata. Gli enunciati sono richiesti per funzioni di n variabili e derivate di ordine qualsiasi; le dimostrazioni sono richieste solo per funzioni di una variabile e derivata prima.
Risposta: v. libro di testo, § 7.1.1.

D. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e dimostrare le proprietà che riguardano la L-trasformata della convoluzione e della funzione integrale.
Risposta: v. libro di testo, § 8.1, 8.2.

Svolgere i seguenti esercizi

1*. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{(x+i)^2 (x^2+3)}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$. Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ e riscrivere l'espressione trovata nella forma più semplice.

a. f non è né pari né dispari, non mi aspetto particolari simmetrie da $\widehat{f}$. $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $x^2 f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f} \in C^2(\mathbb{R}) \cap C^0_*(\mathbb{R})$. Per ogni $n = 1, 2, 3...$ esiste $f^{(n)} \in C^0_*(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f}(\xi) = o(1/\xi^n)$ per $\xi \to \pm\infty$.

b. Calcoliamo i poli.

$(z+i)^2 (z^2+3) = 0$ per $z = -i$ (polo del second'ordine) e $z = \pm i\sqrt{3}$ (poli del prim'ordine).

Per $\xi > 0$ è:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{(x+i)^2 (x^2+3)} dx \\
&= -2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z+i)^2 (z^2+3)}, -i \right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z+i)^2 (z^2+3)}, -i\sqrt{3} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z+i)^2 (z^2+3)}, -i \right) &= \left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z^2+3)} \right)'_{/z=-i} \\
&= \left(e^{-2\pi i\xi z} \frac{-2\pi i\xi (z^2+3) - 2z}{(z^2+3)^2} \right)_{/z=-i} \\
&= e^{-2\pi\xi} \frac{-4\pi i\xi + 2i}{4} = ie^{-2\pi\xi} \frac{-2\pi\xi + 1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z+i)^2 (z^2+3)}, -i\sqrt{3} \right) &= \left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z+i)^2\, 2z} \right)_{/z=--i\sqrt{3}} \\
&= \frac{e^{-2\sqrt{3}\pi\xi}}{(1-\sqrt{3})^2 (2i\sqrt{3})}.
\end{aligned}$$

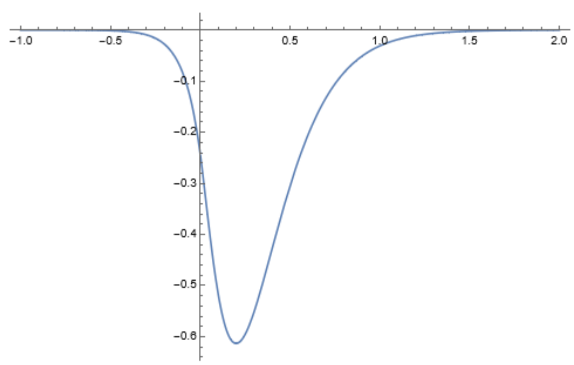
$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= -2\pi i\left\{ie^{-2\pi\xi}\frac{-2\pi\xi+1}{2}+\frac{e^{-2\sqrt{3}\pi\xi}}{\left(1-\sqrt{3}\right)^2\left(2i\sqrt{3}\right)}\right\}\\ &= \pi\left\{e^{-2\pi\xi}\left(1-2\pi\xi\right)-\frac{e^{-2\sqrt{3}\pi\xi}}{4\sqrt{3}-6}\right\}.\end{aligned}$$

Per $\xi<0$ si ha:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= 2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{\left(z+i\right)^2\left(z^2+3\right)}, i\sqrt{3}\right)\\ &= 2\pi i\left\{\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{\left(z+i\right)^2 2z}\right)_{/z=-i\sqrt{3}}\right\} = -2\pi i\left\{\frac{e^{2\sqrt{3}\pi\xi}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2\left(2i\sqrt{3}\right)}\right\}\\ &= -\pi\frac{e^{2\sqrt{3}\pi\xi}}{4\sqrt{3}+6}.\end{aligned}$$

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases}\pi\left\{e^{-2\pi\xi}\left(1-2\pi\xi\right)-\frac{e^{-2\sqrt{3}\pi\xi}}{4\sqrt{3}-6}\right\} & \text{per } \xi>0\\ -\pi\frac{e^{2\sqrt{3}\pi\xi}}{4\sqrt{3}+6} & \text{per } \xi<0\end{cases}$$

Si osserva che la trasformata di Fourier è reale (cosa non prevista a priori).



2. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = xe^{-2|x|}\sin(2\pi x).$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$. Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. A partire dalla trasformata di Fourier considerata nota

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2},$$

calcolare quindi $\widehat{f}$ applicando opportune proprietà della trasformata di Fourier (senza calcolare integrali, ma giustificando i passaggi), e semplificare l'espressione trovata .

a. f è reale e pari, quindi $\widehat{f}$ sarà reale e pari. $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni n, quindi $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0_*(\mathbb{R})$. Esiste $f'' \in C^0_*(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, f'' derivabile a tratti, quindi $\widehat{f}(\xi) = o\left(1/\xi^3\right)$ per $\xi \to \pm\infty$.

b. Per la formula della dilatazione,

$$\mathcal{F}\left(e^{-2|x|}\right)(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{1+4\pi^2\frac{\xi^2}{4}} = \frac{1}{1+\pi^2\xi^2}.$$

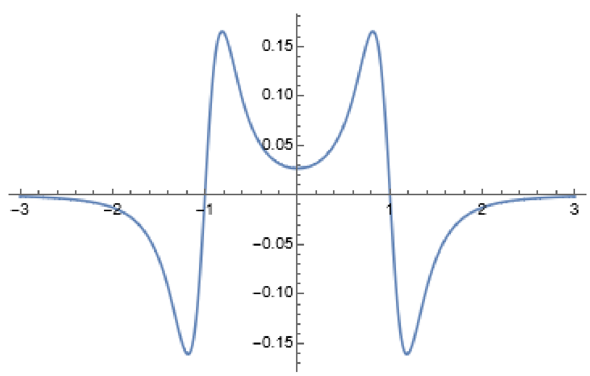
Per la formula della derivata della trasformata,

$$\mathcal{F}\left(xe^{-2|x|}\right)(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{1+\pi^2\xi^2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\frac{2\pi^2\xi}{\left(1+\pi^2\xi^2\right)^2} = -\frac{i\pi\xi}{\left(1+\pi^2\xi^2\right)^2}.$$

Per la formula della trasformata di $f(x)\,e^{2\pi i a x}$,

$$\mathcal{F}\left(f(x)\sin(2\pi x)\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(f(x)\frac{e^{2\pi i x} - e^{-2\pi i x}}{2i}\right)(\xi) = \frac{1}{2i}\left(\widehat{f}(\xi-1) - \widehat{f}(\xi+1)\right)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(xe^{-2|x|}\sin(2\pi x)\right)(\xi) &= \frac{-i\pi}{2i}\left(\frac{(\xi-1)}{\left(1+\pi^2(\xi-1)^2\right)^2} - \frac{(\xi+1)}{\left(1+\pi^2(\xi+1)^2\right)^2}\right)\\ &= -\frac{\pi}{2}\left(\frac{\xi-1}{\left(1+\pi^2\left(\xi^2+1\right)-2\pi^2\xi\right)^2} - \frac{\xi+1}{\left(1+\pi^2\left(\xi^2+1\right)-2\pi^2\xi\right)^2}\right).\end{aligned}$$



3. (5 punti). *a.* Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(t) + \int_0^t \left(9(t-\tau)+6\right) y(\tau)\, d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita y, per un generico termine noto f supposto $\mathcal{L}$-trasformabile.

b. Successivamente, determinare la soluzione corrispondente a $f(t) = 5$, semplificando l'espressione ottenuta.

[*Suggerimento:* per svolgere il punto b conviene *non* applicare la formula trovata nel punto a per $y(t)$, ma...].

a. Applichiamo la trasformata di Laplace, ponendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)), F(s) = \mathcal{L}(f(t))$:

$$
\begin{aligned}
Y(s) + Y(s)\left(\frac{9}{s^2} + \frac{6}{s}\right) &= F(s) \\
Y(s)\left(1 + \frac{6}{s} + \frac{9}{s^2}\right) &= F(s) \\
Y(s) = F(s)\left(\frac{s^2}{s^2+6s+9}\right) &= F(s)\left(1 - \frac{6s+9}{(s+3)^2}\right) \\
&= F(s) - F(s) \cdot \frac{6(s+3)-9}{(s+3)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{6s+9}{(s+3)^2} = \frac{6(s+3)-9}{(s+3)^2} = \frac{6}{s+3} - \frac{9}{(s+3)^2} = \mathcal{L}\left(6e^{-4t} - 9te^{-3t}\right)
$$

$$
y(t) = f(t) - \left(6e^{-4t} - 9te^{-3t}\right) * f(t)
$$

b. Se $f(t) = 5$ si trova:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= F(s)\left(\frac{s^2}{s^2+6s+9}\right) = Y(s) = \frac{5}{s}\left(\frac{s^2}{s^2+6s+9}\right) = \frac{5s}{(s+3)^2} \\
&= 5\frac{(s+3)}{(s+3)^2} - \frac{15}{(s+3)^2} = \frac{5}{(s+3)} - \frac{15}{(s+3)^2} \\
&= \mathcal{L}\left(5e^{-3t} - 15te^{-3t}\right)
\end{aligned}
$$

perciò

$$
y(t) = 5e^{-3t} - 15te^{-3t}.
$$