Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria

Secondo appello. Giugno 2022

A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom	
Dom	
Dom	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare con precisione il teorema sulla derivabilità del limite di una successione di funzioni derivabili. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi. Quindi, enunciare e **dimostrare** il teorema che riguarda $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$.

B. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di derivabilità e derivata per una funzione complessa di variabile complessa, spiegare (enunciando un teorema preciso) la relazione tra il concetto di funzione $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ derivabile in senso complesso e funzione $\underline{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ differenziabile. **Dimostrare** la validità delle condizioni di Cauchy-Riemann per una funzione derivabile in senso complesso. Quindi, enunciare con precisione e **dimostrare** le conseguenze delle condizioni di Cauchy-Riemann sulle funzioni con parte reale o immaginaria costante.

C. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) in uno spazio di Hilbert, enunciare e dimostrare il teorema che riguarda la trasformata e le serie di Fourier in spazi di Hilbert, rispetto a un s.o.n.c.

D. (6 punti). Dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ delle funzioni a decrescenza rapida, enunciare le proprietà di questo spazio rilevanti dal punto di vista della teoria della trasformata di Fourier, dimostrandone alcune.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Calcolare il seguente integrale nel campo complesso, *semplificando l'espressione ottenuta*:

$$\int_{\gamma_4(3i)} \frac{\mathrm{Ch}\,(\pi z)}{\left(z^2+4\right)^2} dz$$

Si richiede di *non usare il teorema dei residui*, ma applicare opportunamente altri teoremi integrali studiati nel corso, giustificando brevemente il procedimento seguito.

2. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = x(\sin x)\,\chi_{(-\pi,\pi)}(x),$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$. Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. Calcolare ora $\widehat{f}(\xi)$ seguendo i seguenti passi:

1. Calcolare $\mathcal{F}\left(\chi_{(-\pi,\pi)}(x)\right)$ in base alla definizione (e semplificare il risultato ottenuto);

2. A partire dal risultato precedente e usando opportune proprietà della trasformata, calcolare $\mathcal{F}\left((\sin x)\,\chi_{(-\pi,\pi)}(x)\right)$ (e semplificare il risultato ottenuto);

3. A partire dal risultato precedente e usando opportune proprietà della trasformata, calcolare $\mathcal{F}\left(x(\sin x)\,\chi_{(-\pi,\pi)}(x)\right)$ (e semplificare il risultato ottenuto).

Si chiede di seguire tassativamente il procedimento indicato e di semplificare il più possibile i risultati ottenuti via via.

3. (5 punti).

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 13y = f(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

cioè scrivere una formula risolutiva esplicita che assegna la soluzione in funzione del generico termine noto $f(t)$, che si suppone L-trasformabile.

b. Ottenere ora la soluzione esplicita $y(t)$ corrispondente al dato:

$$f(t) = e^{-3t}\chi_{(0,\pi)}(t).$$

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Secondo appello. Giugno 2022
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

	Punti
Dom	
Dom	
Dom	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare con precisione il teorema sulla derivabilità del limite di una successione di funzioni derivabili. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi. Quindi, enunciare e **dimostrare** il teorema che riguarda $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$.
Risposta: v. libro di testo, § 1.2.1, 1.2.2.

B. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di derivabilità e derivata per una funzione complessa di variabile complessa, spiegare (enunciando un teorema preciso) la relazione tra il concetto di funzione $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ derivabile in senso complesso e funzione $\underline{F}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ differenziabile. **Dimostrare** la validità delle condizioni di Cauchy-Riemann per una funzione derivabile in senso complesso. Quindi, enunciare con precisione e **dimostrare** le conseguenze delle condizioni di Cauchy-Riemann sulle funzioni con parte reale o immaginaria costante.
Risposta: v. libro di testo, §6.2.

C. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) in uno spazio di Hilbert, enunciare e dimostrare il teorema che riguarda la trasformata e le serie di Fourier in spazi di Hilbert, rispetto a un s.o.n.c.
Risposta: v. libro di testo, § 4.3.

D. (6 punti). Dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ delle funzioni a decrescenza rapida, enunciare le proprietà di questo spazio rilevanti dal punto di vista della teoria della trasformata di Fourier, dimostrandone alcune.
Risposta: v. libro di testo, § 7.4.1.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Calcolare il seguente integrale nel campo complesso, *semplificando l'espressione ottenuta*:

$$\int_{\gamma_4(3i)} \frac{\mathrm{Ch}\,(\pi z)}{(z^2+4)^2} dz$$

Si richiede di *non usare il teorema dei residui*, ma applicare opportunamente altri teoremi integrali studiati nel corso, giustificando brevemente il procedimento seguito.

$$I = \int_{\gamma_4(3i)} \frac{\mathrm{Ch}\,(\pi z)}{(z^2+4)^2} dz = \int_{\gamma_4(3i)} \frac{f(z)}{(z-2i)^2} dz$$

$$\text{con } f(z) = \frac{\mathrm{Ch}\,(\pi z)}{(z+2i)^2} \text{ olomorfa in } B_4(3i).$$

Perciò dalla seconda formula integrale di Cauchy per le derivate prime abbiamo

$$f'(2i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_4(3i)} \frac{f(z)}{(z-2i)^2} dz$$

e quindi

$$I = 2\pi i f'(2i)$$

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\pi\,\mathrm{Sh}\,(\pi z)(z+2i)^2 - 2(z+2i)\,\mathrm{Ch}\,(\pi z)}{(z+2i)^4} \\
&= \frac{\pi\,\mathrm{Sh}\,(\pi z)(z+2i) - 2\,\mathrm{Ch}\,(\pi z)}{(z+2i)^3}. \\
f'(2i) &= \frac{4i\pi\,\mathrm{Sh}\,(2\pi i) - 2\,\mathrm{Ch}\,(2\pi i)}{(4i)^3} = 2\frac{2i\pi \cdot 0 - 1}{-64i} = -\frac{1}{32i} \\
I &= 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{32i}\right) = -\frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

2. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = x(\sin x)\,\chi_{(-\pi,\pi)}(x),$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$. Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. Calcolare ora $\widehat{f}(\xi)$ seguendo i seguenti passi:

1. Calcolare $\mathcal{F}\left(\chi_{(-\pi,\pi)}(x)\right)$ in base alla definizione (e semplificare il risultato ottenuto);

2. A partire dal risultato precedente e usando opportune proprietà della trasformata, calcolare $\mathcal{F}\left((\sin x)\,\chi_{(-\pi,\pi)}(x)\right)$ (e semplificare il risultato ottenuto);

3. A partire dal risultato precedente e usando opportune proprietà della trasformata, calcolare $\mathcal{F}\left(x\,(\sin x)\,\chi_{(-\pi,\pi)}(x)\right)$ (e semplificare il risultato ottenuto).

Si chiede di seguire tassativamente il procedimento indicato e di semplificare il più possibile i risultati ottenuti via via.

a. f è continua, limitata e a supporto compatto, in particolare f e $x^n f$ sono integrabili per ogni n, perciò, perciò $\widehat{f}$ è infinitamente derivabile e tende a zero all'infinito; f è reale e pari, perciò $\widehat{f}$ è reale e pari; f è continua e regolare a tratti con derivata integrabile perciò $\widehat{f}(\xi)=o(1/\xi)$ per $|\xi|\to\infty$.

b.

$$\mathcal{F}\left(\chi_{(-\pi,\pi)}(x)\right)(\xi)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-2\pi i\xi x}dx=2\int_{0}^{\pi}\cos(2\pi\xi x)\,dx=\left[\frac{2\sin(2\pi\xi x)}{2\pi\xi}\right]_{0}^{\pi}=\frac{\sin\left(2\pi^2\xi\right)}{\pi\xi}.$$

$$\mathcal{F}\left((\sin x)\,g(x)\right)(\xi)=\mathcal{F}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}g(x)\right)(\xi)=\frac{1}{2i}\left(\widehat{g}\left(\xi-\frac{1}{2\pi}\right)-\widehat{g}\left(\xi+\frac{1}{2\pi}\right)\right)$$

perciò

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left((\sin x)\,\chi_{(-\pi,\pi)}(x)\right)&=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\sin\left(2\pi^2\left(\xi-\frac{1}{2\pi}\right)\right)}{\left(\xi-\frac{1}{2\pi}\right)}-\frac{\sin\left(2\pi^2\left(\xi+\frac{1}{2\pi}\right)\right)}{\left(\xi+\frac{1}{2\pi}\right)}\right)\\&=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{-\sin\left(2\pi^2\xi\right)}{\left(\xi-\frac{1}{2\pi}\right)}-\frac{-\sin\left(2\pi^2\xi\right)}{\left(\xi+\frac{1}{2\pi}\right)}\right)=\frac{\sin\left(2\pi^2\xi\right)}{2\pi i}\left(\frac{1}{\left(\xi+\frac{1}{2\pi}\right)}-\frac{1}{\left(\xi-\frac{1}{2\pi}\right)}\right)\\&=\frac{\sin\left(2\pi^2\xi\right)}{2\pi i}\left(\frac{-\frac{1}{4\pi}}{\left(\xi^2-\frac{1}{4\pi^2}\right)}\right)=\frac{\sin\left(2\pi^2\xi\right)}{2\pi i}\left(\frac{-\pi}{\left(4\pi^2\xi^2-1\right)}\right)\\&=\frac{\sin\left(2\pi^2\xi\right)}{2\left(4\pi^2\xi^2-1\right)}i.\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\left(xg(x)\right)(\xi)=\frac{1}{-2\pi i}\frac{d}{d\xi}\widehat{g}(\xi)$$

perciò

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(x\,(\sin x)\,\chi_{(-\pi,\pi)}(x)\right)&=\frac{1}{-2\pi i}\frac{d}{d\xi}\frac{\sin\left(2\pi^2\xi\right)}{2\left(4\pi^2\xi^2-1\right)}i=-\frac{1}{4\pi}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\sin\left(2\pi^2\xi\right)}{4\pi^2\xi^2-1}\right)\\&=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\pi^2\cos\left(2\pi^2\xi\right)\left(4\pi^2\xi^2-1\right)-8\pi^2\xi\sin\left(2\pi^2\xi\right)}{\left(4\pi^2\xi^2-1\right)^2}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\left(\frac{4\xi\sin\left(2\pi^2\xi\right)-\cos\left(2\pi^2\xi\right)\left(4\pi^2\xi^2-1\right)}{\left(4\pi^2\xi^2-1\right)^2}\right)\end{aligned}$$

3. (5 punti).

*a***.** Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 13y = f(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

cioè scrivere una formula risolutiva esplicita che assegna la soluzione in funzione del generico termine noto $f(t)$, che si suppone L-trasformabile.

b. Ottenere ora la soluzione esplicita $y(t)$ corrispondente al dato:

$$f(t) = e^{-3t}\chi_{(0,\pi)}(t).$$

a. Applichiamo la trasformata di Laplace, ponendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)), F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ e tenendo conto delle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} &s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 6(sY(s) - y(0)) + 13Y(s) = F(s) \\ &Y(s)\left(s^2 + 6s + 13\right) = F(s) + s + 8 \\ &Y(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s^2+6s+13} + \frac{s+8}{s^2+6s+13}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{s^2+6s+13} = \frac{1}{(s+3)^2+4} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right] = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}e^{-3t}\sin(2t)\right)$$

$$\frac{s+4}{s^2+6s+13} = \frac{s+3}{(s+3)^2+2^2} + \frac{5}{2}\frac{2}{(s+3)^2+2^2} = \mathcal{L}\left(e^{-3t}\cos(2t) + \frac{5}{2}e^{-3t}\sin(2t)\right)$$

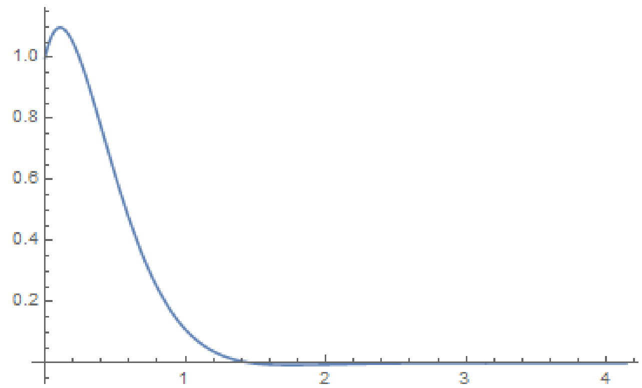
$$Y(s) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}e^{-3t}\sin(2t) * f(t) + e^{-3t}\cos(2t) + \frac{5}{2}e^{-3t}\sin(2t)\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-3(t-\tau)}\sin(2(t-\tau))f(\tau)\,d\tau + e^{-3t}\cos(2t) + \frac{5}{2}e^{-3t}\sin(2t).$$

b. Calcoliamo la convoluzione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^t e^{-3(t-\tau)}\sin(2(t-\tau))f(\tau)\,d\tau &= \frac{1}{2}e^{-3t}\int_0^t \sin(2(t-\tau))\chi_{(0,\pi)}(\tau)\,d\tau \\ &= \begin{cases} \text{se } t < \pi & \frac{1}{2}e^{-3t}\int_0^t \sin(2(t-\tau))\,d\tau \\ \text{se } t > \pi & \frac{1}{2}e^{-3t}\int_0^\pi \sin(2(t-\tau))\,d\tau \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } t < \pi & \frac{1}{4}e^{-3t}\left[\cos(2(t-\tau))\right]_0^t \\ \text{se } t > \pi & \frac{1}{4}e^{-3t}\left[\cos(2(t-\tau))\right]_0^\pi \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } t < \pi & \frac{1}{4}e^{-3t}(1-\cos(2t)) \\ \text{se } t > \pi & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$y(t) = \begin{cases} \text{se } t < \pi & e^{-3t}\left\{\frac{1}{4}(1-\cos(2t)) + \cos(2t) + \frac{5}{2}\sin(2t)\right\} \\ \text{se } t > \pi & e^{-3t}\left\{\cos(2t) + \frac{5}{2}\sin(2t)\right\} \end{cases}$$



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
1
2
3
4