Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria

Prima provain itinere. Novembre 2021

A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
Cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Di ciascuno dei seguenti spazi di funzioni, dire se è vettoriale, se è normato, se è completo, fornendo le opportune giustificazioni:

a. Lo spazio $C^0(a,b)$ con la norma $\sup_{x\in(a,b)}|f(x)|$.

b. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

c. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

d. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

e. Lo spazio $C^0_*(\mathbb{R})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e che tendono a zero all'infinito, con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

f. Lo spazio $C^0_0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e nulle fuori da un intervallo chiuso e limitato (variabile da funzione a funzione), con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

B. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il principio di annullamento di una funzione olomorfa in un aperto. Mostrare come da questo si deduce il principio di identità delle funzioni analitiche, e illustrarne qualche conseguenza vista nel corso.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di residuo, enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema dei residui. Quindi, enunciare e **dimostrare** le formule per il calcolo del residuo in un polo del prim'ordine o di ordine n.

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di funzione armonica e qualche significato fisico di queste funzioni, enunciare con precisione e **dimostrare** il risultato che permette di ottenere funzioni armoniche a partire da funzioni olomorfe. **Dimostrare** quindi che una funzione armonica in un aperto è infinitamente derivabile, richiamando anche l'enunciato dei risultati utilizzati in questa dimostrazione.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Calcolare il seguente integrale nel campo complesso:

$$I = \int_\gamma z^2 \left(|z| + \frac{1}{z^2 - 1} \right) dz$$

dove γ è il circuito percorso in verso antiorario e formato dalla semicirconferenza $\gamma_3^d(0)$ di centro 0 e raggio 3 posta nel semipiano $\operatorname{Re} z > 0$ e dal segmento $[3i, -3i]$.

Si raccomanda di riportare impostazione e passaggi, giustificando il procedimento seguito.

2. (5 punti). Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo in ogni singolarità a eccezione dei poli di ordine > 1.

$$f(z) = \frac{\left(z^2 - 1\right)^2 \left(z^2 - 4\right)}{\sin^2(\pi z)} \cos \frac{1}{z}.$$

3. (5 punti). Calcolare il seguente integrale col metodo dei residui, giustificando brevemente il procedimento seguito *e semplificando l'espressione ottenuta*:

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\left(x^2 + 2x + 5\right)^2} dx.$$

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Prima prova in itinere. Novembre 2021
A.A. 2020/2021. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Di ciascuno dei seguenti spazi di funzioni, dire se è vettoriale, se è normato, se è completo, fornendo le opportune giustificazioni:

a. Lo spazio $C^0(a,b)$ con la norma $\sup_{x\in(a,b)}|f(x)|.$

b. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$

c. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$

d. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$

e. Lo spazio $C^0_*(\mathbb{R})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e che tendono a zero all'infinito, con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|.$

f. Lo spazio $C^0_0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e nulle fuori da un intervallo chiuso e limitato (variabile da funzione a funzione), con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|.$

Risposta: v. libro di testo, §1.2.1, 1.2.2, 1.2.5.

B. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il principio di annullamento di una funzione olomorfa in un aperto. Mostrare come da questo si deduce il principio di identità delle funzioni analitiche, e illustrarne qualche conseguenza vista nel corso.

Risposta: v. dispensa integrativa, §4.1.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di residuo, enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema dei residui. Quindi, enunciare e **dimostrare** le formule per il calcolo del residuo in un polo del prim'ordine o di ordine n**.**

Risposta: v. libro di testo, §6.6.3; dispensa integrativa, §5.

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di funzione armonica e qualche significato fisico di queste funzioni, enunciare con precisione e **dimostrare** il risultato che permette di ottenere funzioni armoniche a partire da funzioni olomorfe. **Dimostrare** quindi che una funzione armonica in un aperto è infinitamente derivabile, richiamando anche l'enunciato dei risultati utilizzati in questa dimostrazione.

Risposta: v. libro di testo, §6.3.1.3, 6.5.2.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Calcolare il seguente integrale nel campo complesso:

$$I = \int_\gamma z^2 \left(|z| + \frac{1}{z^2 - 1} \right) dz$$

dove γ è il circuito percorso in verso antiorario e formato dalla semicirconferenza $\gamma_3^d(0)$ di centro 0 e raggio 3 posta nel semipiano $\operatorname{Re} z > 0$ e dal segmento $[3i, -3i]$.

Si raccomanda di riportare impostazione e passaggi, giustificando il procedimento seguito.

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma z^2 |z|\, dz + \int_\gamma \left(\frac{z^2}{z^2 - 1} \right) dz \\ &= \int_{\gamma_3^d(0)} 3z^2 dz + \int_{[3i,-3i]} z^2 |z|\, dz + \int_\gamma \left(\frac{z^2}{z^2 - 1} \right) dz \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

I_1 si calcola col teorema fondamentale del calcolo integrale: essendo $F(z) = z^3$ una primitiva di $3z^2$, si ha:

$$I_1 = \left[z^3 \right]_{-3i}^{3i} = 27 \left(i^3 - i^{-3} \right) = -54i.$$

I_2 si calcola dalla definizione: parametrizzando il segmento come $z = 3i + t(-3i - 3i) = 3i(1 - 2t)$ per $t \in [0, 1]$ si ha $dz = -6idt$ e $|z| = |3 - 6t| = 3|1 - 2t|$, perciò

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 -9(1 - 2t)^2\, 3|1 - 2t|\,(-6i)\, dt = (1 - 2t = u; -2dt = du) \\ &= 6i \frac{27}{2} \int_{-1}^1 u^2 |u|\, du = 81i \int_0^1 u^3 du = \frac{81}{4} i. \end{aligned}$$

I_3 si calcola col teorema dei residui: il circuito circonda il polo del prim'ordine 1,

$$I_3 = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{z^2 - 1}, 1 \right) = 2\pi i \left(\frac{z^2}{2z} \right)_{/z=1} = \pi i.$$

Perciò

$$I = \frac{81}{4} i + \pi i - 54i = \left(\pi - \frac{27}{2} \right) i$$

2. (5 punti). Classificare le singolarità della seguente funzione e calcolare il residuo in ogni singolarità a eccezione dei poli di ordine >1.

$$f(z)=\frac{\left(z^2-1\right)^2\left(z^2-4\right)}{\sin^2(\pi z)}\cos\frac{1}{z}.$$

I punti da studiare sono $z=k\in\mathbb{Z}$.

$z=0$ è singolarità essenziale, per la presenza del fattore $\cos\frac{1}{z}$.

Poiché $f(z)$ è pari, $\operatorname{Res}(f(z),0)=0$.

In $z=\pm1,\pm2,\pm3,...$ la funzione $\sin^2(\pi z)$ si annulla del 2° ordine (perché $\sin(\pi z)$ si annulla del prim'ordine). In $z=\pm1$ il termine $\left(z^2-1\right)^2$ a numeratore si annulla del 2° ordine, perciò:

$z=\pm1$ singolarità eliminabili, quindi $\operatorname{Res}(f(z),\pm1)=0$.

In $z=\pm2$ il termine $\left(z^2-4\right)$ a numeratore si annulla del 1° ordine, perciò:

$z=\pm2$ sono poli del 1° ordine. Calcoliamo i residui.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z),2)&=\lim_{z\to2}(z-2)\frac{\left(z^2-1\right)^2\left(z^2-4\right)}{\sin^2(\pi z)}\cos\frac{1}{z}\\&=\lim_{z\to2}\left(\frac{z-2}{\sin(\pi z)}\right)^2\left(z^2-1\right)^2(z+2)\cos\frac{1}{z}\\&=3^2\cdot4\cdot\cos\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{z\to2}\frac{z-2}{\sin(\pi z)}\right)^2.\end{aligned}$$

Linearizzando in $z=2$ la funzione $\sin(\pi z)\sim(\sin\pi z)'_{/z=2}(z-2)=\pi(z-2)$ si ha

$$\lim_{z\to2}\frac{z-2}{\sin(\pi z)}=\frac{1}{\pi},\text{ perciò}$$
$$\operatorname{Res}(f(z),2)=\frac{36}{\pi^2}\cos\frac{1}{2}.$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z),-2)&=\lim_{z\to-2}(z+2)\frac{\left(z^2-1\right)^2\left(z^2-4\right)}{\sin^2(\pi z)}\cos\frac{1}{z}\\&=\lim_{z\to-2}\left(\frac{z+2}{\sin(\pi z)}\right)^2\left(z^2-1\right)^2(z-2)\cos\frac{1}{z}\\&=3^2\cdot(-4)\cdot\cos\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{z\to-2}\frac{z+2}{\sin(\pi z)}\right)^2\\&=-\frac{36}{\pi^2}\cos\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

In $z=\pm3,\pm4,\pm5...$ il numeratore non si annulla, il denominatore si annulla del 2° ordine, perciò sono poli del 2° ordine, in cui l'esercizio *non richiede* di calcolare i residui.

3. (5 punti). Calcolare il seguente integrale col metodo dei residui, giustificando brevemente il procedimento seguito *e semplificando l'espressione ottenuta*:

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\left(x^2+2x+5\right)^2} dx.$$

Il denominatore è un polinomio di 4° grado che non si annulla per x reale, l'integrale esiste e vale:

$$I = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\frac{i\pi x}{4}}}{\left(x^2+2x+5\right)^2} dx,$$

dove l'integrale complesso si può calcolare col metodo dei residui. Cerchiamo i poli di

$$f(z) = \frac{e^{\frac{i\pi z}{4}}}{\left(z^2+2z+5\right)^2}.$$

$$z^2+2z+5 = 0 \text{ per } z = -1 \pm 2i, \text{ poli del } 2^\circ \text{ ordine.}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\frac{i\pi z}{4}}}{\left(x^2+2x+5\right)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), -1+2i\right).$$

$$\operatorname{Res}\left(f(z), -1+2i\right) = \frac{d}{dz}\left(\left(z+1-2i\right)^2 f(z)\right)_{/z=-1+2i} = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{\frac{i\pi z}{4}}}{\left(z+1+2i\right)^2}\right)_{/z=-1+2i}$$

$$= \left(e^{\frac{i\pi z}{4}} \frac{\frac{\pi i}{4}\left(z+1+2i\right)^2 - 2\left(z+1+2i\right)}{\left(z+1+2i\right)^4}\right)_{/z=-1+2i}$$

$$= \left(e^{\frac{i\pi z}{4}} \frac{\frac{\pi i}{4}\left(z+1+2i\right) - 2}{\left(z+1+2i\right)^3}\right)_{/z=-1+2i} = e^{\frac{\pi i}{4}(-1+2i)} \frac{\frac{\pi i}{4}(4i) - 2}{(4i)^3}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}i} e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{-\pi-2}{-64i} = e^{-\frac{\pi}{4}i} e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\pi+2}{64i}.$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\frac{i\pi x}{4}}}{\left(x^2+2x+5\right)^2} dx = 2\pi i \cdot e^{-\frac{\pi}{4}i} e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\pi+2}{64i} = \pi e^{-\frac{\pi}{4}i} e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\pi+2}{32}$$

$$I = \operatorname{Re}\left(\pi e^{-\frac{\pi}{4}i} e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\pi+2}{32}\right) = \pi \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\pi+2}{32} = \frac{\sqrt{2}}{64}\pi\left(\pi+2\right) e^{-\frac{\pi}{2}}.$$