Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria

Seconda prova in itinere. Gennaio 2022

A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom	
Dom	
Dom	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare il teorema della convergenza dominata per l'integrale di Lebesgue. Fare esempi di *applicazioni teoriche* del teorema della convergenza dominata incontrate nel corso, enunciando con precisione uno o più teoremi nella cui dimostrazione si utilizza il teorema della convergenza dominata e dimostrando *uno* di questi risultati.

B. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale (finito), enunciare e dimostrare il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert.

C. (6 punti). Si consideri l'equazione di Laguerre

$$xy'' + (1-x)\,y' + \lambda y = 0 \quad \text{per } x \in (0,+\infty)\,.$$

Dopo averla riscritta nella forma di problema di Sturm-Liouville singolare (perché non è regolare?), dimostrare che gli autovalori sono non negativi e le autofunzioni relative ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali in $L^2\left((0,+\infty)\,, e^{-x}dx\right)$.

D. (6 punti). La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$: dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà (senza dimostrazione), dimostrare come sfruttando queste proprietà è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2 (x^2+2)},$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$. Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ e riscrivere l'espressione trovata nella forma più semplice.

2. (4 punti). *a.* Supponendo nota la trasformata di Fourier $\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|\xi|}$ (per $a>0$) calcolare, in base a proprietà note della trasformata (e *non* calcolando l'integrale),

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right) \text{ (per } a>0).$$

b. In base ai risultati del punto precedente, calcolare la trasformata

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{4+x^2} * \frac{x}{1+x^2}\right)$$

dopo aver previsto in base alla teoria le sue proprietà (per quanto è possibile prevedere dalle proprietà della convoluzione).

c. Dedurre dai risultati del punto precedente quanto vale la convoluzione $\frac{1}{4+x^2} * \frac{x}{1+x^2}$ (senza calcolare nuovi integrali). *Giustificare i propri passaggi.*

3. (6 punti). Si consideri l'equazione integrodifferenziale di un circuito LCR in serie:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

con $L = 0.5, C = 0.1, R = 2, q_0 = 4$ e condizione iniziale $i(0) = 1$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere esplicitamente la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

b. Si consideri ora il caso

$$v(t) = e^{-2t}\chi_{\left(0,\frac{\pi}{4}\right)}(t).$$

Prevedere, prima di risolvere l'equazione, in base alla regolarità del dato $v(t)$ e alla struttura dell'equazione, la regolarità che si attende per $i(t)$. Quindi ottenere la soluzione esplicita $i(t)$ corrispondente a questo dato.

Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Seconda prova in itinere. Gennaio 2022
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare il teorema della convergenza dominata per l'integrale di Lebesgue. Fare esempi di *applicazioni teoriche* del teorema della convergenza dominata incontrate nel corso, enunciando con precisione uno o più teoremi nella cui dimostrazione si utilizza il teorema della convergenza dominata e dimostrando *uno* di questi risultati.

Risposta: v. libro di testo, §2.3.3 (e altri paragrafi per le applicazioni).

B. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale (finito), enunciare e dimostrare il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert.

Risposta: v. libro di testo, §4.3.

C. (6 punti). Si consideri l'equazione di Laguerre

$$xy'' + (1-x)\,y' + \lambda y = 0 \quad \text{per } x \in (0, +\infty)\,.$$

Dopo averla riscritta nella forma di problema di Sturm-Liouville singolare (perché non è regolare?), dimostrare che gli autovalori sono non negativi e le autofunzioni relative ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali in $L^2\left((0,+\infty), e^{-x}dx\right)$.

Risposta: v. libro di testo, §4.7.2.

D. (6 punti). La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$: dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà (senza dimostrazione), dimostrare come sfruttando queste proprietà è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Risposta: v. libro di testo, §7.4.1-7.4.2.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2 \left(x^2+2\right)},$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire cosa è possibile prevedere su $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti:

se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$. Giustificare tutte le affermazioni fatte.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ e riscrivere l'espressione trovata nella forma più semplice.

a. f è reale e pari, $\widehat{f}$ sarà reale e pari. $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $x^4 f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f} \in C^4(\mathbb{R}) \cap C_*^0(\mathbb{R})$. Per ogni $n = 1,2,3$ esiste $f^{(n)} \in C_*^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, quindi $\widehat{f}(\xi) = o(1/\xi^n)$ per $\xi \to \pm\infty$.

b. Calcoliamo $\widehat{f}(\xi)$ per $\xi > 0$ col metodo dei residui, e poi simmetrizziamo.

$\left(z^2+1\right)^2 \left(z^2+2\right) = 0$ per $z = \pm i\sqrt{2}$ (polo del prim'ordine) e $z = \pm i$ (poli doppi).

Per $\xi > 0$ è:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{\left(x^2+1\right)^2 \left(x^2+2\right)} dx \\
&= -2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{\left(z^2+1\right)^2 \left(z^2+2\right)}, -i\sqrt{2} \right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{\left(z^2+1\right)^2 \left(z^2+2\right)}, -i \right) \right\}.
\end{aligned}$$

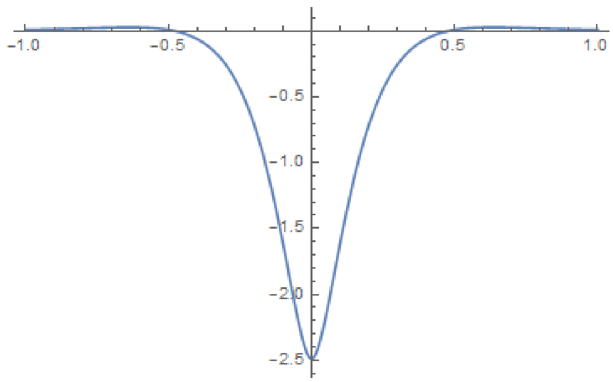
$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{\left(z^2+1\right)^2 \left(z^2+2\right)}, -i\sqrt{2} \right) = \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{\left(z^2+1\right)^2 2z} \right)_{/z=-i\sqrt{2}} = \frac{e^{-4\sqrt{2}\pi\xi}}{-2i\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{\left(z^2+1\right)^2 \left(z^2+2\right)}, -i \right) = \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z-i)^2 \left(z^2+2\right)} \right)'_{/z=-i} \\
&= \left[e^{-2\pi i \xi z} \frac{-2\pi i \xi (z-i)^2 \left(z^2+2\right) - \left(2(z-i)\left(z^2+2\right) + 2z(z-i)^2\right)}{(z-i)^4 \left(z^2+2\right)^2} \right]_{/z=-i} \\
&= e^{-2\pi\xi} \frac{8\pi i \xi - 4i}{2^4} = e^{-2\pi\xi} \frac{2\pi i \xi - i}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= -2\pi i \left\{ \frac{e^{-4\sqrt{2}\pi\xi}}{-2i\sqrt{2}} + e^{-2\pi\xi} \frac{2\pi i \xi - i}{4} \right\} \\
&= \pi \left\{ \frac{e^{-4\sqrt{2}\pi\xi}}{\sqrt{2}} + e^{-2\pi\xi} \frac{2\pi\xi - 1}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Simmetrizzando pari si ha:

$$\widehat{f}(\xi) = \pi \left\{ \frac{e^{-4\sqrt{2}\pi|\xi|}}{\sqrt{2}} + e^{-2\pi|\xi|} \frac{2\pi|\xi| - 1}{2} \right\}$$



2. (4 punti).

a. Supponendo nota la trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\xi|} \text{ (per } a > 0)$$

calcolare, in base a proprietà note della trasformata (e *non* calcolando l'integrale),

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right) \text{ (per } a > 0).$$

b. In base ai risultati del punto precedente, calcolare la trasformata

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{4+x^2} * \frac{x}{1+x^2}\right)$$

dopo aver previsto in base alla teoria le sue proprietà (per quanto è possibile prevedere dalle proprietà della convoluzione).

c. Dedurre dai risultati del punto precedente quanto vale la convoluzione

$$\frac{1}{4+x^2} * \frac{x}{1+x^2}$$

(senza calcolare nuovi integrali).

Giustificare i propri passaggi.

a. In base alla formula della derivata della trasformata,

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \frac{1}{-2\pi i} \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\xi|}\right) = \frac{1}{-2\pi i} \frac{\pi}{a} (-2\pi a) \left(e^{-2\pi a|\xi|}\right) \operatorname{sgn}(\xi)$$
$$= -\pi i e^{-2\pi a|\xi|} \operatorname{sgn}(\xi).$$

b. La funzione $\frac{1}{4+x^2}$ è $L^1(\mathbb{R})$ e reale pari, la funzione $\frac{x}{1+x^2}$ è $L^2(\mathbb{R})$ e reale dispari, la funzione $\frac{1}{4+x^2} * \frac{x}{1+x^2}$ sarà $L^2(\mathbb{R})$ e reale dispari, la sua trasformata sarà $L^2(\mathbb{R})$ (ci aspettiamo discontinua), immaginaria pura e dispari. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{1}{4+x^2} * \frac{x}{1+x^2}\right)(\xi) &= \frac{\pi}{2}e^{-2\pi 2|\xi|} \cdot \left(-\pi i e^{-2\pi|\xi|}\operatorname{sgn}(\xi)\right) \\ &= -\frac{\pi^2}{2} i e^{-6\pi|\xi|}\operatorname{sgn}(\xi).\end{aligned}$$

c. Poiché

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{4+x^2} * \frac{x}{1+x^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(-\pi i e^{-2\pi\cdot 3|\xi|}\operatorname{sgn}(\xi)\right) = \frac{\pi}{2}\mathcal{F}\left(\frac{x}{3^2+x^2}\right)(\xi),$$

si avrà

$$\frac{1}{4+x^2} * \frac{x}{1+x^2} = \frac{\pi x}{2(9+x^2)}.$$

3. (6 punti). Si consideri l'equazione integrodifferenziale di un circuito LCR in serie:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

con $L = 0.5, C = 0.1, R = 2, q_0 = 4$ e condizione iniziale $i(0) = 1$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere esplicitamente la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

b. Si consideri ora il caso

$$v(t) = e^{-2t}\chi_{\left(0,\frac{\pi}{4}\right)}(t).$$

Prevedere, prima di risolvere l'equazione, in base alla regolarità del dato $v(t)$ e alla struttura dell'equazione, la regolarità che si attende per $i(t)$. Quindi ottenere la soluzione esplicita $i(t)$ corrispondente a questo dato.

a. Riscriviamo l'equazione:

$$\frac{1}{2}i'(t) + 2i(t) + 10\left(4 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t);\, i(0) = 1$$

e applichiamo la trasformata di Laplace, ponendo $I(s) = \mathcal{L}(i(t)), V(s) = \mathcal{L}(v(t))$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(sI(s) - 1) + 2I(s) + 10\left(\frac{4}{s} + \frac{I(s)}{s}\right) &= V(s) \\ I(s)\left(\frac{s}{2} + 2 + \frac{10}{s}\right) &= V(s) + \frac{1}{2} - \frac{40}{s} \\ I(s)\left(\frac{s^2+4s+20}{2s}\right) &= V(s) + \frac{s-80}{2s}\end{aligned}$$

$$I(s) = V(s) \cdot \left(\frac{2s}{s^2+4s+20} \right) + \left(\frac{s-80}{s^2+4s+20} \right)$$

$$\frac{2s}{s^2+4s+20} = 2\frac{(s+2)}{(s+2)^2+4^2} - \frac{4}{(s+2)^2+4^2} = \mathcal{L}\left(2e^{-2t}\cos(4t) - e^{-2t}\sin(4t)\right)$$

$$\frac{s-80}{s^2+4s+20} = \frac{(s+2)}{(s+2)^2+4^2} - \frac{82}{4}\frac{4}{(s+2)^2+4^2} = \mathcal{L}\left(e^{-2t}\cos(4t) - \frac{41}{2}e^{-2t}\sin(4t)\right)$$

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-2t}\left(2\cos(4t) - \sin(4t)\right) * v(t) + e^{-2t}\left(\cos(4t) - \frac{41}{2}\sin(4t)\right) \\ &= \int_0^t e^{-2(t-\tau)}\left(2\cos(4(t-\tau)) - \sin(4(t-\tau))\right) v(\tau)\, d\tau + e^{-2t}\left(\cos(4t) - \frac{41}{2}\sin(4t)\right). \end{aligned}$$

b. Poiché $v(t)$ è discontinua in $t = \frac{\pi}{4}$, ci aspettiamo soluzione $i(t)$ continua e derivabile a tratti, ma non derivabile nel punto $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-2t}\left(\cos(4t) - \frac{41}{2}\sin(4t)\right) + e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}\left(2\cos(4(t-\tau)) - \sin(4(t-\tau))\right) e^{-2\tau}\chi_{\left(0,\frac{\pi}{4}\right)}(\tau)\, d\tau \\ &= e^{-2t}\left(\cos(4t) - \frac{41}{2}\sin(4t)\right) + g(t) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} g(t) &= \begin{cases} \text{se } t < \frac{\pi}{4} & e^{-2t}\int_0^t \left(2\cos(4(t-\tau)) - \sin(4(t-\tau))\right) d\tau \\ \text{se } t > \frac{\pi}{4} & e^{-2t}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cos(4(t-\tau)) - \sin(4(t-\tau))\right) d\tau \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } t < \frac{\pi}{4} & e^{-2t}\left[-\frac{1}{2}\sin(4(t-\tau)) - \frac{1}{4}\cos(4(t-\tau))\right]_0^t \\ \text{se } t > \frac{\pi}{4} & e^{-2t}\left[-\frac{1}{2}\sin(4(t-\tau)) - \frac{1}{4}\cos(4(t-\tau))\right]_0^{\pi/4} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } t < \frac{\pi}{4} & e^{-2t}\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin(4t) + \frac{1}{4}\cos(4t)\right] \\ \text{se } t > \frac{\pi}{4} & e^{-2t}\left[\sin(4t) + \frac{1}{2}\cos(4t)\right] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \begin{cases} \text{se } t < \frac{\pi}{4} & e^{-2t}\left(\cos(4t) - \frac{41}{2}\sin(4t)\right) + e^{-2t}\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin(4t) + \frac{1}{4}\cos(4t)\right] \\ \text{se } t > \frac{\pi}{4} & e^{-2t}\left(\cos(4t) - \frac{41}{2}\sin(4t)\right) + e^{-2t}\left[\sin(4t) + \frac{1}{2}\cos(4t)\right] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } t < \frac{\pi}{4} & e^{-2t}\left[\frac{5}{4}\cos(4t) - 20\sin(4t) - \frac{1}{4}\right] \\ \text{se } t > \frac{\pi}{4} & e^{-2t}\left[\frac{3}{2}\cos(4t) - \frac{39}{2}\sin(4t)\right] \end{cases} \end{aligned}$$