# Note integrative
# sulla teoria delle funzioni olomorfe
# per il corso di
# Metodi Matematici per l'Ingegneria

Marco Bramanti

22 luglio 2021

## 1 Introduzione

Queste note sono state scritte per il mio corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria e sono pensate per essere lette tenendo a fianco il libro di testo:

M. Bramanti. Metodi di analisi matematica per l'ingegneria. Ed. Esculapio, 2019. Cap. 6.

Seguendo queste note, dove lo studio di opportuni paragrafi del testo citato si alterna a queste pagine, come indicato nel seguito, si ottiene una presentazione della teoria elementare delle funzioni olomorfe secondo un percorso logico leggermente diverso da quello presentato sul libro di testo (e cioè da quello più comunemente seguito nelle esposizioni didattiche).

Lo scopo è snellire il più possibile la presentazione, arrivando il più rapidamente possibile al cosiddetto metodo dei residui, che si utilizza operativamente per il calcolo di certi integrali. Questo obiettivo viene raggiunto eliminando completamente l'utilizzo delle serie di potenze (e serie bilatere), a favore dell'utilizzo esclusivo dell'integrale di linea nel campo complesso. In sostanza, invece di sviluppare la teoria utilizzando, come si fa di solito, *due* strumenti (serie di potenze + integrali di linea), la si sviluppa facendo uso di un unico strumento. Questo dovrebbe portare una certa "economia di pensiero" e costituire forse un percorso più semplice per lo studente. Si può naturalmente obiettare che così facendo ci si perde una delle idee fondamentali della teoria delle funzioni olomorfe, e cioè la centralità del concetto di serie di potenze. E' esattamente così: ci si perde qualcosa, guadagnando, spero, in semplicità concettuale.

Si tratta di un esperimento didattico, del cui successo decideranno gli studenti.

# 2 Generalità sulle funzioni complesse di variabile complessa

Richiami sui numeri complessi: **v. §6.1.1, "Il piano complesso".**

Riguardo all'esponenziale complesso, nel nostro percorso assumiamo la seguente

**Definizione 1** *Per ogni* $z = x + iy \in \mathbb{C}$*, poniamo*

$$\exp(z) = e^{x}(\cos y + i \sin y).$$

Da questa definizione segue la forma esponenziale dei numeri complessi,

$$z = \rho e^{i\theta},$$

come modo alternativo di rappresentare il numero che in forma trigonometrica si scrive

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Utilizzando la definizione precedente e le formule di De Moivre per il prodotto di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica *si dimostra* facilmente il

**Teorema 2** *Per ogni* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *si ha:*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$$

Quindi, si veda:
**§6.1.1. "Funzioni complesse di variabile complessa"**
**§6.1.2. "Topologia nel piano complesso"**

## 2.1 Funzioni trascendenti elementari

Dalla definizione dell'esponenziale complesso $\exp(z)$ si vede subito che se $z = x \in \mathbb{R}$, $\exp(z)$ coincide con la "vecchia" funzione reale di variabile reale $e^x$. Per questo motivo d'ora in poi scriveremo semplicemente $e^z$ anziché $\exp(z)$.

In modo analogo arriviamo alla definizione di altre funzioni elementari non algebriche nel campo complesso.

Dalla definizione di esponenziale complesso si ricavano subito le formule di Eulero

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}; \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \text{ per } y \in \mathbb{R}$$

e per questo motivo si dà la seguente

**Definizione 3** *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$*, poniamo:*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

In altre parole, le funzioni $\cos z, \sin z$ sono state definite per $z$ complesso in modo tale che, nel caso particolare in cui $z$ è reale, si riottengano le funzioni reali di variabile reale già note che chiamiamo cos e sin. Vedremo più avanti che questa definizione (che a questo punto del discorso ha una certa arbitrarietà) è, in un certo senso, l'unica ragionevole.

Analogamente:

**Definizione 4** *Per ogni $z \in \mathbb{C}$, poniamo:*

$$\mathrm{Sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \mathrm{Ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Infatti anche in questo caso per $z$ reale si ritrovano le funzioni reali di variabile reale che chiamiamo $\mathrm{Sh}\, x$ e $\mathrm{Ch}\, x$.

Le 5 funzioni $e^z, \cos z, \sin z, \mathrm{Ch}\, z, \mathrm{Sh}\, z$ sono dette funzioni trascendenti elementari nel campo complesso.

*Proprietà delle funzioni trascendenti elementari:*

1. Valgono le relazioni di Eulero

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

(basta calcolare $\cos z + i \sin z$ utilizzando la definizione di $\sin z, \cos z$ data qui sopra).

2. Valgono le identità:

$$\mathrm{Ch}\,(iz) = \cos z$$
$$\mathrm{Sh}\,(iz) = i \sin z$$

(basta calcolare $\mathrm{Ch}\,(iz), \mathrm{Sh}\,(iz)$ in base alla definizione di Ch, Sh e poi utilizzare la definizione di $\cos z, \sin z$).

3. Si possono scomporre le 5 funzioni trascendenti elementari in parte reale e parte immaginaria, calcolarne il modulo, osservare le loro periodicità e calcolare i punti in cui si annullano: si vedano, per queste proprietà:

**Proposizione 6.15, Proposizione 6.16, Proposizione 6.17, nel §6.4 (con le stesse dimostrazioni riportate nel §6.4, pp.256-258).**

**Le identità della Proposizione 6.15 si possono utilizzare anche per la risoluzione di equazioni, come illustrato a p.259, Esempio 6.32.**

# 3 Funzioni derivabili di variabile complessa

**Si veda il §6.2 e (per quanto svolto nel corso) il §6.3**

*Derivate delle funzioni trascendenti elementari:*

**Proposizione 5**

$$(e^z)' = e^z.$$

**Dimostrazione.** Come funzione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ la funzione $e^z$ è evidentemente $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, quindi per provare che $f$ è olomorfa è sufficiente verificare le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) = e^x \cos y \\
u_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos y\right) = -e^x \sin y \\
v_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \sin y\right) = e^x \sin y \\
v_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \sin y\right) = e^x \cos y
\end{aligned}$$

e si osserva che effettivamente $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Allora

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\left(\cos y + i \sin y\right)\right) = e^x\left(\cos y + i \sin y\right) = e^z.$$

■

Le funzioni $\sin z, \cos z, \operatorname{Ch} z, \operatorname{Sh} z$ risultano allora olomorfe perché somma di funzioni olomorfe, e le loro derivate si calcolano a partire da queste con le regole del calcolo differenziale, ad esempio:

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Con calcoli analoghi si trova

$$\begin{aligned}
(\cos z)' &= -\sin z \\
(\operatorname{Ch} z)' &= \operatorname{Sh} z \\
(\operatorname{Sh} z)' &= \operatorname{Ch} z.
\end{aligned}$$

# 4 Integrale nel campo complesso, teoremi integrali di Cacuhy e regolarità delle funzioni olomorfe

**Si veda il §6.1.5 "Curve nel piano complesso", il § 6.5.1 "Definizione e prime proprietà dell'integrale di linea in $C$", quindi il §.6.5.2 "Teoremi integrali di Cauchy", fino a p.274 (cioè esculso il Teorema 6.16, che qui trattiamo diversamente).**

Veniamo ora al risultato che, in questa presentazione, sostituisce il Teorema 616:

**Teorema 6** *Sia $f : A \to \mathbb{C}$ olomorfa in un aperto $A$, allora $f$ è infinitamente derivabile in $A$, e per ogni disco $B_r(z_0)$ tale che $\overline{B_r(z_0)} \subset A$ si ha:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \text{ per ogni } z \in B_r(z_0) \text{ e } n = 1, 2, 3....$$

Notiamo subito che, una volta stabilite le identità precedenti, queste continuano a valere se l'integrale è calcolato, anziché su $\gamma_r(z_0)$, su qualunque circuito equivalente a questo per la funzione integranda.

Il teorema segue facilmente dal prossimo risultato

**Lemma 7** *Per $n = 1, 2, 3...$ consideriamo la funzione*

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^n} dw \text{ per } z \in B_r(z_0)$$

*dove $r > 0$ è fissato e $f$ si suppone almeno definita e continua nei punti di $\gamma_r(z_0)$. Allora $F$ è olomorfa in $B_r(z_0)$ e*

$$F_n'(z) = nF_{n+1}(z) = \frac{n}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \text{ per } z \in B_r(z_0).$$

Notiamo che il teorema segue applicando iterativamente questo lemma alla funzione $f$, a partire dalla prima formula integrale di Cauchy, che stabilisce che $F_1(z) = f(z)$ in $B_r(z_0)$.

**Dimostrazione del Lemma.** Fissiamo $B_r(z_0)$ come nell'enunciato, fissiamo un interno positivo $n$ e consideriamo la funzione

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z)^n} dw \text{ per } z \in B_r(z_0).$$

Consideriamo, per $z \in B_r(z_0)$ fissato e $h$ abbastanza piccolo da avere $z + h \in B_r(z_0)$,

$$\frac{F_n(z+h) - F_n(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} f(w) \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{(w-(z+h))^n} - \frac{1}{(w-z)^n} \right] dw$$

Dobbiamo mostrare che, per $h \to 0$, la seguente espressione tende a zero:

$$\begin{aligned} &\frac{F_n(z+h) - F_n(z)}{h} - nF_{n+1}(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} f(w) \left\{ \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{(w-(z+h))^n} - \frac{1}{(w-z)^n} \right] - \frac{n}{(w-z)^{n+1}} \right\} dw \\ &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} f(w) \{G_n(w,z,h)\} dw. \end{aligned}$$

Maggioreremo l'espressione $G_n(w,z,h)$ ricordandoci che $w \in \gamma_r(z_0)$, $z$ sta all'interno del cerchio, quindi possiamo assumere $|w-z| > \delta$ per un certo $\delta > 0$, e possiamo assumere $|h| < \delta/2$ in modo che $|w-(z+h)| > \delta/2$ (quindi i denominatori sono discosti da zero). Ponendo $w - z = u$ si ha:

$$\begin{aligned} G_n(w,z,h) &= \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{(u-h)^n} - \frac{1}{u^n} \right] - \frac{n}{u^{n+1}} \\ &= \frac{u^{n+1} - u(u-h)^n - nh(u-h)^n}{h(u-h)^n u^{n+1}} \equiv \frac{q_n(u,h)}{h(u-h)^n u^{n+1}}. \end{aligned}$$

La funzione $q_n$ è un polinomio in $u, h$. Proviamo che da questo polinomio si può raccogliere $h^2$, cioè che il polinomio non contiene né monomi nella sola $u$ né monomi del tipo $a(u)h$. Basta osservare che:

$$\begin{aligned} q_n(u,0) &= u^{n+1} - u^{n+1} = 0 \\ \frac{\partial q_n}{\partial h}(u,h) &= nu(u-h)^{n-1} - n(u-h)^n + n^2 h (u-h)^{n-1} \\ \frac{\partial q_n}{\partial h}(u,0) &= nu^n - nu^n = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, per $n$ fissato, $u$ variabile su un insieme chiuso e limitato, e $|h| < 1$, si ha

$$|q_n(u,h)| \leq c\,|h|^2.$$

Di conseguenza,

$$|G_n(w,z,h)| \leq \frac{c\,|h|^2}{|hu^{n+1}(u-h)^n|} \leq \frac{c\,|h|}{\delta^{n+1}\cdot\left(\frac{\delta}{2}\right)^n},$$

quindi, se $|f(w)| \leq M$ per $w \in \gamma_r(z_0)$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{F_n(z+h)-F_n(z)}{h} - nF_{n+1}(z)\right| &\leq \frac{1}{2\pi} M \cdot 2\pi r \cdot \frac{c\,|h|}{\delta^{n+1}\cdot\left(\frac{\delta}{2}\right)^n} \\ &= c\,|h| \to 0 \text{ per } h \to 0 \end{aligned}$$

e il Lemma è dimostrato. ■

Abbiamo quindi mostrato che una funzione olomorfa ($C^1$) in un aperto è in realtà infinitamente derivabile.

Si vedano i vari commenti e conseguenze che si trovano sul testo, pp.274, 276:

1. Il comportamento delle funzioni complesse di variabile complessa è completamente diverso da quello delle funzioni reali di variabile reale, relativamente al concetto di derivabilità: mentre esistono funzioni reali di variabile reale che sono derivabili una volta ma non due,...., $k$ volte ma non $k+1$ volte (per qualsiasi $k = 1, 2, 3...$) una funzione complessa di variabile complessa se in un aperto è $C^1$ allora è $C^\infty$!
2. **Corollario 6.3 p.276** (regolarità delle funzioni armoniche).
3. **Corollario 6.4 p.276** (regolarità delle funzioni con primitiva).

## 4.1 Altre conseguenze della formula delle derivate

La formula delle derivate ha altre conseguenze che ora illustriamo.

**Teorema 8 (Principio di annullamento)** *Sia $f$ olomorfa in $B_r(z_0)$ e supponiamo che*

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \textit{ per } n = 0, 1, 2, 3....$$

*Allora $f$ è identicamente nulla in $B_r(z_0)$.*

**Dimostrazione.** Per ogni $\rho \in (0, r)$ possiamo scrivere

$$0 = f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

calcolando l'integrale dalla definizione

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)}{\rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta.$$

Dunque

$$\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta = 0 \text{ per } n = 0, 1, 2, 3...$$

Se proviamo che è anche

$$\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) e^{in\theta} d\theta = 0 \text{ per } n = 1, 2, 3... \tag{1}$$

avremo che la funzione continua

$$g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$$
$$g(\theta) = f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)$$

ha tutti i coefficienti di Fourier nulli, quindi è identicamente nulla. Ne segue che

$$f(z) = 0 \forall z \in \gamma_\rho(z_0),$$

e poiché questo è vero per ogni $\rho \in (0, r)$, ne seguirà che $f$ è identicamente nulla in $B_r(z_0)$.

Per provare (1) consideriamo la funzione, olomorfa in $B_r(z_0)$,

$$g(z) = f(z)(z - z_0)^{2n} \text{ per } n = 1, 2, 3....$$

Per questa funzione si ha:

$$g^{(k)}(z_0) = 0 \text{ per } k = 0, 1, 2, 3....$$

quindi applicando a $g$ la prima parte della dimostrazione otteniamo

$$0 = \int_0^{2\pi} g\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) \rho^{2n} e^{i2n\theta} e^{-in\theta} d\theta$$
$$= \rho^{2n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) e^{in\theta} d\theta,$$

da cui la (1). ■

**Corollario 9 (Unicità del prolungamento analitico)** *Sia $f$ una funzione olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ e supponiamo che $f$ sia identicamente nulla su un intervallo $(a, b)$ della retta reale. Allora $f$ è identicamente nulla in $\mathbb{C}$. Di conseguenza, se $g$ è una funzione reale di variabile reale, esiste al più una funzione $f$ olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ che coincide con $g$ sull'asse reale (o su un intervallo della retta reale).*

**Dimostrazione.** Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa e supponiamo che $f(x) = 0$ per $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$. Quindi $f^{(n)}(x_0) = 0$ per $n = 0, 1, 2, 3...$, intendendo le derivate in senso reale. Poiché, d'altro canto, la derivata in senso complesso di $f(x + iy)$, se esiste, si può calcolare come $\frac{\partial f}{\partial x}$, ne segue che $f^{(n)}(x_0) = 0$ per $n = 0, 1, 2, 3...$ anche in senso complesso. Poiché, per ogni $r > 0$, $f$ è olomorfa in $B_r(x_0)$ (cerchio del piano complesso di centro $x_0 \in \mathbb{R}$), dal teorema precedente si conclude che $f$ è identicamente nulla in $B_r(x_0)$ e quindi, per l'arbitrarietà di $r$, in $\mathbb{C}$. Questo dimostra la prima affermazione. Se ora $f_1, f_2$ sono due funzioni olomorfe in $\mathbb{C}$ che coincidono con una assegnata $g(x)$ su un certo intervallo dell'asse reale, applicando il primo punto del teorema a $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ si conclude che $f_1 \equiv f_2$. ■

Ad esempio,

$$\exp(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$$

è l'*unica* funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ che coincide con $e^x$ sull'asse reale. Analogamente le altre 4 trascendenti elementari $\cos z, \sin z, \mathrm{Ch}\, z, \mathrm{Sh}\, z$ sono le uniche funzioni olomorfe in tutto $\mathbb{C}$ che coincidono per $z$ reale con le funzioni reali che portano lo stesso nome. Questo ci convince che la definizione che abbiamo dato delle funzioni trascendenti elementari nel campo complesso è, in un certo senso, l'unica ragionevole.

Il corollario precedente ha anche un'interessante conseguenza riguardo al problema della *ricerca dell'armonica coniugata*: si veda a questo proposito l'**Esercizio 6.14 p.330**.

# 5 Punti singolari di una funzione olomorfa e teorema dei residui

Discuteremo ora il concetto di punto singolare di una funzione olomorfa, il concetto di residuo, e il loro utilizzo nel calcolo di certi integrali, prima nel campo complesso e poi sulla retta reale.

**v. §6.6.2, "Singolarità di una funzione olomorfa"** per: definizione di singolarità isolata, esempi, definizione di tipi di singolarità isolate: pp. 291-293, fino al teorema 6.24 escluso, esclusa la definizione 6.30. (Non parliamo di sviluppi di Laurent e serie bilatere).

Sia $z_0$ un punto di singolarità isolata per $f$, quindi esiste $r > 0$ tale che $f$ è olomorfa in $B_r^*(z_0)$ ma non lo è in $B_r(z_0)$. Allora per ogni $\rho_1, \rho_2$ tali che $0 < \rho_1 < \rho_2 < r$, le circonferenze $\gamma_{\rho_1}(z_0)$ e $\gamma_{\rho_2}(z_0)$ sono circuiti equivalenti per $f$ (nel senso che si ricava dal teorema di Cauchy dell'integrale nullo). Quindi il numero

$$I_\rho = \int_{\gamma_\rho(z_0)} f(z)\, dz$$

è lo stesso per ogni $\rho \in (0, r)$. Questo giustifica la prossima

**Definizione 10** *Sia* $z_0$ *un punto di singolarità isolata per* $f$*. Si dice* residuo di $f$ in $z_0$ *il numero complesso*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho(z_0)} f(z)\, dz.$$

Vale il seguente:

**Teorema 11 (dei residui)** *Sia* $f : A \to \mathbb{C}$ *olomorfa nell'aperto* $A$*, sia* $\gamma$ *un circuito contenuto in* $A$ *(e percorso in verso positivo) e sia* $D$ *l'interno del circuito. Supponiamo che in* $D$ *ci sia un numero finito di singolarità isolate di* $f$*,* $z_1, ..., z_k$ *e che*

$$D \setminus \{z_1, ..., z_k\} \subset A.$$

*Allora*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j).$$

La dimostrazione si fa come sul testo, p.300-301, riconducendosi alla definizione di residuo che abbiamo dato.

Il teorema precedente è utile a calcolare l'integrale di una funzione olomorfa su un circuito che circonda singolarità isolate, a patto di conoscere un metodo semplice (e diverso dalla definizione stessa) per calcolare i residui di $f$.

Ci occupiamo perciò ora del calcolo dei residui nei più comuni punti di singolarità isolata.

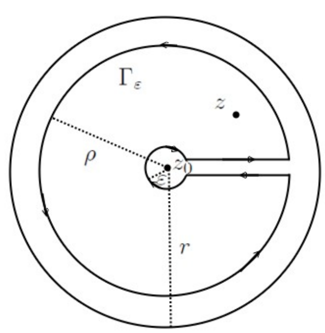
Per far questo, ci servirà conoscere meglio il comportamento di una funzione in un intorno di una singolarità eliminabile o di un polo:

**Teorema 12** *Sia* $z_0$ *una singolarità isolata per* $f(z)$*.*

*(i) Se* $z_0$ *è una singolarità eliminabile, allora* $f$ *(prolungata per continuità anche in* $z_0$*) è olomorfa in un intorno* $B_r(z_0)$*.*

*(ii) Se* $z_0$ *è un polo di ordine* $n$*, allora* $(z - z_0)^n f(z)$ *(prolungata per continuità anche in* $z_0$*) è olomorfa in un intorno* $B_r(z_0)$*.*

**Dimostrazione.** Il punto $(ii)$ segue dal punto $(i)$, perché per definizione di polo di ordine $n$, la funzione $(z - z_0)^n f(z)$ ha una singolarità eliminabile in $z_0$. Perciò proviamo $(i)$. Per $z \in B_r(z_0)$, consideriamo un circuito $\Gamma_\varepsilon$ come in figura.



Notiamo che l'interno di $\Gamma_\varepsilon$ è contenuto in $B_r^*(z_0)$ in cui $f$ è olomorfa, perciò possiamo applicare la prima formula integrale di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Per $\varepsilon \to 0$ si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Notiamo che per $w \in \gamma_\varepsilon(z_0)$ e $\varepsilon \to 0$ si ha $|w-z| \to |z| > 0$ mentre $f(z) \to \lambda \in \mathbb{C}$ quindi

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\max_{|w|=\varepsilon}\frac{|f(w)|}{|w-z|}2\pi\varepsilon \to \frac{|\lambda|}{|z|}\cdot 0 = 0 \text{ per } \varepsilon \to 0.$$

Quindi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}dw \text{ per ogni } z \in B_r^*(z_0).$$

D'altro canto per $z \to z_0$ sappiamo già che $f(z) \to \lambda$ e

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}dw \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{w-z_0}dw$$

quindi prolungando per continuità $f(z_0) = \lambda$ si ha che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}dw \text{ per ogni } z \in B_r(z_0).$$

Dal Lemma 7 per $n = 1$ ne segue che $f$ è olomorfa in $B_r(z_0)$. ■

Impareremo ora a calcolare il residuo nelle situazioni più comuni:

**Teorema 13** *Sia $z_0$ un punto di singolarità isolata per $f$.*

*a. Se $z_0$ è un punto di singolarità eliminabile allora*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 0.$$

*b. Se $z_0$ è un polo del prim'ordine allora*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

*c. Se $z_0$ è un polo del prim'ordine e inoltre $f$ ha la seguente forma:*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

*(con $p, q$ olomorfe in un intorno di $z_0$) dove $p(z_0) \neq 0$ e $q$ ha uno zero del prim'ordine in $z_0$, cioè $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$, allora*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

*d. Sia $z_0$ un polo di ordine $n > 1$ per $f$. Allora:*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{n-1}} \left[ (z - z_0)^n f(z) \right](z_0).$$

**Dimostrazione.** *a.* Sia $z_0$ una singolarità eliminabile per $f$ e sia

$$\lambda = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Poiché $f$ ha limite finito per $z \to z_0$, in particolare sarà limitata in $B_r^*(z_0)$ (per un certo $r > 0$), cioè esiste $M > 0$ tale che

$$|f(z)| \leq M \text{ per ogni } z \in B_r^*(z_0).$$

Allora si ha (calcolando l'integrale su $\gamma_\rho(z_0)$ dalla definizione: $z = z_0 + \rho e^{i\theta}; dz = i\rho e^{i\theta} d\theta; \theta \in [0, 2\pi]$):

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho(z_0)} f(z)\, dz = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) i\rho e^{i\theta} d\theta.$$

Ma:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) i\rho e^{i\theta} d\theta \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) \right| \rho d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\rho d\theta = M\rho \to 0 \text{ per } \rho \to 0, \end{aligned}$$

perciò $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$.

*b.* Sia $z_0$ un polo del prim'ordine per $f$, e sia

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Scriviamo:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho(z_0)} \frac{(z - z_0) f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Poiché per $\rho \to 0$ e $z \in \gamma_\rho(z_0)$ è $z \to z_0$, si ha $(z - z_0) f(z) = \lambda + o(1)$ per $\rho \to 0$, quindi

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_0) &= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta} (\lambda + o(1))}{\rho e^{i\theta}} d\theta \\ &= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda + o(1))\, d\theta = \lambda. \end{aligned}$$

*c*. Abbiamo mostrato che

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0) p(z)}{q(z)}.$$

Calcoliamo questo limite utilizzando il fatto che essendo $q$ derivabile in $z_0$ e $q(z_0) = 0$ si ha

$$q(z) = q'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \text{ per } z \to z_0$$

ed essendo $p$ continua in $z_0$

$$p(z) = p(z_0) + o(1) \text{ per } z \to z_0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{(z - z_0) p(z)}{q(z)} &= \frac{(z - z_0)\{p(z_0) + o(1)\}}{q'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)} \\ &= \frac{(z - z_0)\{p(z_0) + o(1)\}}{(z - z_0)\{q'(z_0) + o(1)\}} \\ &= \frac{p(z_0) + o(1)}{q'(z_0) + o(1)} \to \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \end{aligned}$$

*d*. Per il Teorema 12 (ii), se $z_0$ è un polo di ordine $n$ per $f$, la funzione

$$g(z) = (z - z_0)^n f(z)$$

è prolungabile come funzione olomorfa in un intorno $B_r(z_0)$. Calcoliamo in base alla definizione il residuo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_0) &= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho(z_0)} f(z)\, dz = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho(z_0)} \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} dz \\ &= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) i\rho e^{i\theta}}{\rho^n e^{ni\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\int_0^{2\pi} g\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) e^{-i(n-1)\theta} d\theta}{\rho^{n-1}} \equiv \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \to 0^+} \frac{I_n(\rho)}{\rho^{n-1}} \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$I_n(\rho) = \int_0^{2\pi} g\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) e^{-i(n-1)\theta} d\theta.$$

Osserviamo ora che:

$$
\begin{aligned}
I_n(0) &= g(z_0)\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta}d\theta = 0 \text{ (se } n>1)\\
I_n'(\rho) &= \int_0^{2\pi} g'\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)e^{-i(n-2)\theta}d\theta\\
I_n'(0) &= g'(z_0)\int_0^{2\pi} e^{-i(n-2)\theta}d\theta = 0 \text{ (se } n>2)\\
I_n''(\rho) &= \int_0^{2\pi} g''\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)e^{-i(n-3)\theta}d\theta\\
I_n''(0) &= g''(z_0)\int_0^{2\pi} e^{-i(n-3)\theta}d\theta = 0 \text{ (se } n>3)\\
&\dots\\
I_n^{(n-1)}(0) &= g^{(n-1)}(z_0)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi g^{(n-1)}(z_0).
\end{aligned}
$$

Nota: la precedente derivazione sotto il segno di integrale, rispetto alla variabile reale $\rho$, si può giustificare mediante il teorema di Lebesgue, applicato a parte reale e immaginaria della funzione integranda $F(\rho,\theta) = g\left(z_0+\rho e^{i\theta}\right)e^{-i(n-1)\theta}$, a valori complessi, dipendente dal parametro $\rho$.

Quindi possiamo applicare De L'Hospital $(n-1)$ volte e calcolare:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\to 0^+}\frac{I_n(\rho)}{\rho^{n-1}} &= \left[\frac{0}{0}\right] \text{ (se } n>1)\\
\frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\to 0^+}\frac{I_n'(\rho)}{(n-1)\rho^{n-2}} &= \left[\frac{0}{0}\right] \text{ (se } n>2)\\
&\dots\\
\frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\to 0^+}\frac{I_n^{(n-1)}(\rho)}{(n-1)!} &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(n-1)!}2\pi g^{(n-1)}(z_0).
\end{aligned}
$$

Nota: la precedente applicazione del teorema di De L'Hospital al quoziente $\frac{I_n(\rho)}{\rho^{n-1}}$ si giustifica perché $\rho^{n-1}$ è reale, perciò $\frac{I_n(\rho)}{\rho^{n-1}} = \frac{\operatorname{Re} I_n(\rho)}{\rho^{n-1}} + i\frac{\operatorname{Im} I_n(\rho)}{\rho^{n-1}}$ e il teorema di De L'Hospital si applica separatamente a ciascuno dei due quozienti. ■

Un altro semplice criterio che talvolta è utile al calcolo del residuo è il seguente:

**Teorema 14** *Supponiamo che $z_0 = 0$ sia una singolarità isolata per $f$ e $f$ sia una funzione pari (cioè $f(z) = f(-z)$ almeno per $z \in B_r^*(0)$). Allora*

$$\operatorname{Res}(f,0) = 0.$$

Notiamo che questo criterio si applica anche a singolarità essenziali, per le quali i criteri precedenti non dicono nulla. Ad esempio,

$$\operatorname{Res}\left(e^{\frac{1}{z^2}},0\right) = 0.$$

**Dimostrazione.** Calcoliamo dalla definizione, per $\rho$ abbastanza piccolo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho(0)} f(z)\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(\rho e^{i\theta}\right)\rho i e^{i\theta}d\theta \\ &= \frac{\rho}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} f\left(\rho e^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta + \int_\pi^{2\pi} f\left(\rho e^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta\right\}. \qquad (2)\end{aligned}$$

Ora nel secondo integrale poniamo $\theta = \phi + \pi$ e abbiamo

$$\int_\pi^{2\pi} f\left(\rho e^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta = \int_0^{\pi} f\left(\rho e^{i\phi}e^{i\pi}\right)e^{i\phi}e^{i\pi}d\theta = -\int_0^{\pi} f\left(-\rho e^{i\phi}\right)e^{i\phi}d\theta$$

poiché $f$ è pari

$$= -\int_0^{\pi} f\left(\rho e^{i\phi}\right)e^{i\phi}d\theta$$

perciò la somma dei due integrali in (2) si annulla e $\operatorname{Res}(f,0) = 0$. ■

Per gli *esempi di calcolo di residui in base ai criteri precedenti*, si veda il testo, esempi contenuti nel **§6.6.4.**

Infine, per l'applicazione del metodo dei residui al calcolo di integrali (nel campo complesso o reale) si veda il **§6.7, "Applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali"**, per la parte sviluppata nel corso.

## 5.1 Altri sviluppi della teoria delle funzioni olomorfe

Concludiamo mostrando un paio di risultati significativi che seguono dalle formule delle derivate:

**Teorema 15 (Principio del massimo)** *Se $f$ è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ ed è limitata, allora è costante.*

**Dimostrazione.** Per ogni $z \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ si ha, in base alla formula delle derivate applicata alla derivata prima:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw.$$

Perciò se $f$ è limitata in tutto il piano complesso, cioè esiste $M > 0$ tale che $|f(w)| \leq M$ per ogni $w$, si deduce:

$$|f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^2}\cdot 2\pi r = \frac{M}{r} \text{ per ogni } r > 0.$$

Per $r \to \infty$ si ottiene $f'(z) = 0$, per ogni $z$, quindi $f$ è costante. ■

**Corollario 16 (Teorema fondamentale dell'algebra)** *Sia $p(z)$ un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi. Allora $p$ ha almeno uno zero. (E di conseguenza ha esattamente $n$ zeri, computati con la dovuta molteplicità).*

**Dimostrazione.** Se, per assurdo, $p(z)$ non ha zeri, allora $1/p(z)$ è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ e limitata (perché lo è sui chiusi e limitati, e all'infinito tende a zero). Quindi, per il teorema precedente, $1/p(z)$ è costante, perciò $p(z)$ è costante, assurdo se è un polinomio di grado almeno 1. ■