Calcolo differenziale per funzioni $\underline{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$D\underline{f}(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\underline{x}_0)$$

matrice jacobiana.

3 tipi di oggetti matematici

- trasformazioni di coordinate in $\mathbb{R}^n$ — $\underline{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- superfici (parametrizzate, nello spazio) — $\underline{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
- campi vettoriali

Trasformazioni di coordinate in $\mathbb{R}^n$.

Problema dell'invertibilità di una funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

Quando una funzione definita da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ è invertibile?

2 esempi "facili":

1. Trasformazioni lineari $\underline{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Fissata una base T si rappresenta mediante

[illegible] , si può rappresentare tramite
una matrice A

$$\underline{x} \mapsto A\underline{x}$$

~~Teor~~

La trasf. è invertibile $\iff \det A \neq 0$.

In questo caso $\exists \, A^{-1}$

$$A\underline{x} = \underline{y}$$

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{y}$$

(invertibilità globale).

$$\underline{f}(\underline{x}) = A\underline{x}$$

$\underline{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Col linguaggio del calcolo differenziale, chi è la matrice A?

$$f_i(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij} \qquad A = D\underline{f}$$

Per una trasf. lineare, la matrice A coincide con la matrice jacobiana (costante!).

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. continua.

f è invertibile (cioè iniettiva) se è strettam. monotona.

Se f è anche derivabile, f è invertibile se $f'(x) > 0 \quad \forall x$

o $< 0 \quad \forall x$

Se ci interessa il fatto che f sia invertibile almeno localmente, cioè in un intorno del punto x_0, basta chiedere che: $f'(x_0) \neq 0$

(supponiamo $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$).

Se ad es. $f'(x_0) > 0$, poiché f' è continua, sarà $f'(x) > 0$ in un intorno di x_0, quindi f strettam. cresc., e quindi invertibile, in un intorno di x_0.

Def. Sia $\underline{f} : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Diciamo che $\underline{f}$ è (globalmente) invertibile in A se è iniettiva, cioè

$$\forall\, \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in A \qquad \underline{x}_1 \neq \underline{x}_2 \Rightarrow \underline{f}(\underline{x}_1) \neq \underline{f}(\underline{x}_2).$$

In tal caso $\underline{f} : A \to \underline{f}(A)$ è biunivoca.

Diciamo che $\underline{f}$ è <u>localmente</u> invertibile in A se ogni punto di A ha un intorno in cui $\underline{f}$ è invertibile.

Th. di invertibilità locale Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto,

$\underline{f} : A \to \mathbb{R}^n$, $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A)$.

Supponiamo che $\underline{x}_0 \in A$ e $\det D\underline{f}(\underline{x}_0) \neq 0$.

Allora $\exists$ un intorno U di $\underline{x}_0$ ed $\exists$ un intorno V di $y_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$ tale che $\underline{f} : U \to V$ è biunivoca, quindi $\exists$ $\underline{f}^{-1} : V \to U$.

Inoltre: $\underline{f}^{-1}$ è differenziabile in V (anzi $\mathcal{C}^1(V)$)

e $D(\underline{f}^{-1})(y_0) = \left(D\underline{f}(\underline{x}_0)\right)^{-1}$

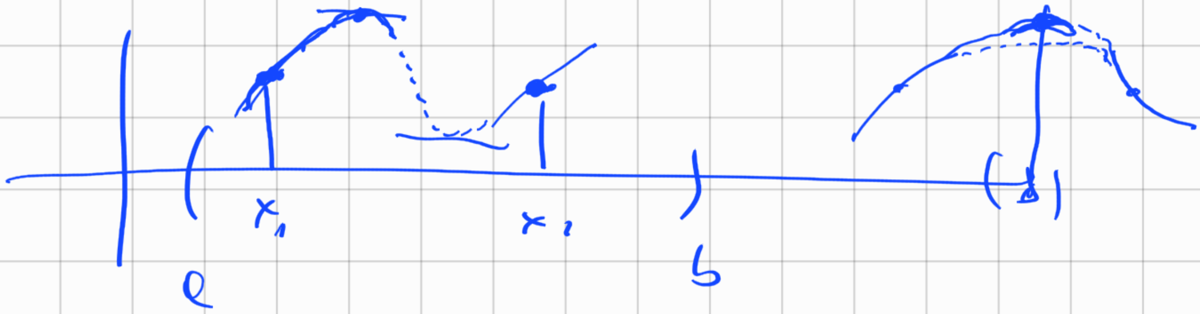
In particolare: se $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A)$ e $\det D\underline{f}(\underline{x}) \neq 0$ $\forall \underline{x} \in A$ allora $\underline{f}$ è localmente invertibile in A.

(Il th. non consente di affermare che $\underline{f}$ sia globalmente invertibile).

Relazione tra invertibilità globale e locale.

In dimensione 1, f localm. invertibile in

$(a,b) \Rightarrow$ f globalm. " " (a,b).



In dim. 2, esistono funzioni localmente inv. ma non globalm. invertibili:

$$\underline{F}(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$$

$$D\underline{F} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\det D\underline{F}(x,y) = e^{2x} > 0.$$

$\Rightarrow$ In ogni punto del piano posso applicare il th. dell'inversa $\Rightarrow$ ogni punto ha un intorno in cui $\underline{f}$ è invertibile.

Ma $\underline{F}$ non è globalm. inv.

$$\underline{F}(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$$

$$\underline{F}(x, y + 2\pi) = \underline{F}(x,y) \qquad \forall x,y$$

$\underline{F}$ non è globalm. invertibile.

Si dice che $\underline{f} : \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\text{aperto}}{A}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{\underline{f}(A)}$ è un

<u>diffeomorfismo globale</u> se $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A)$,

biunivoca tra A e $\underline{f}(A)$ e

la sua funzione inversa è $\mathcal{C}^1(\underline{f}(A))$.

<u>diffeomorfismo locale</u> se $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A)$,

e ogni punto $\underline{x}_0 \in A$ ha un intorno $U(\underline{x}_0)$

tale che $\underline{f} : U(\underline{x}_0) \longrightarrow \underline{f}(U(\underline{x}_0))$ è

un diffeomorfismo globale.

(La tesi del th. dell'inversa è che $\underline{f}$ è un diffeomorfismo locale).

<u>Def.</u> Si dice <u>trasformazione regolare di coordinate</u> in $\mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo globale $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Quando $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ e la def. precedente è soddisfatta tranne in alcuni punti, diremo che quei punti sono <u>punti singolari della trasformaz.</u>