**Recupero sulla prima prova in itinere**
**di Analisi Matematica 2**
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

| Es. | Punti |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| Tot. | |

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)________________________________________

## 1. Equazioni differenziali del prim'ordine

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \frac{\log^2 x}{x} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

## 2. Equazioni differenziali del second'ordine

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' + 2y = e^x \sin x.$$

Per risolvere l'equazione completa si richiede di usare il metodo dell'esponenziale complesso.

## 3. Curve e integrali di linea

Si consideri l'arco di curva piana $\gamma$ di equazione parametriche:

$$\rho = R \cos^2 \theta \text{ per } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $R$ costante positiva. Calcolare l'elemento d'arco $ds$ e l'integrale di linea:

$$\int_\gamma |\sin \theta| \, ds,$$

semplificando le espressioni trovate.

**4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili**
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\left(x^2-y^3\right)\sin(x+y)}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

*a.* Stabilire se $f$ è continua in $(0,0)$.
*b.* Stabilire se $f$ è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
*c.* Stabilire se $f$ è differenziabile nell'origine.
*Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.*

**5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili**
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = y^2\left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right) + \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x.$$

**Recupero sulla seconda prova in itinere**
**di Analisi Matematica 2**
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

| Es. | Punti |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| Tot. | |

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)________________________________________

**1.** Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_{\Omega} \left| x - y^2 \right| dxdy$$

con $\Omega = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Si raccomanda di fare una figura e sfruttare le simmetrie. Riportare impostazione e passaggi.

**2.** Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse $z$ del solido

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\right\}$$

avente densità

$$\delta (x, y, z) = \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\mu}{R^3},$$

dove $R, \mu$ sono costanti positive aventi le dimensioni di lunghezza e massa, rispettivamente.

**3.** Calcolare il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F} (x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} (y, -x)$$

lungo l'arco di curva $\gamma$ espresso in forma polare dall'equazione

$$\rho = Re^{-2\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi],$$

con $R > 0$ costante.

**4.** Sia $\Sigma$ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse $z$ la curva $\gamma$ che nel piano $xz$ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ z = \log t \end{cases} \quad t \in [1, 2]$$

Dopo aver scritto le equazioni parametriche di $\gamma$ e di $\Sigma$, l'elemento d'area di $\Sigma$, e aver individuato gli eventuali punti singolari della superficie, calcolare l'integrale

$$\int\int_{\Sigma} |y| \, dS.$$

**5.** Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[0, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ per } x \in [0, 1] \\ 1 \text{ per } x \in [1, 2] \end{cases}$$

e riflessa pari in $[-2, 0]$.

*a.* Dopo aver disegnato il grafico di $f$, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

*b.* Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di $f$, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

**Analisi Matematica 2. Appello di febbraio 2022**
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
**Tema n°1**

| Es. | Punti |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| Tot. | |

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)_______________________________________

**1. Equazioni differenziali del prim'ordine**
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \frac{\log^2 x}{x} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

**2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili**
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\left(x^2-y^3\right)\sin(x+y)}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

*a.* Stabilire se $f$ è continua in $(0,0)$.
*b.* Stabilire se $f$ è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
*c.* Stabilire se $f$ è differenziabile nell'origine.
*Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.*

**3. Curve e integrali di linea**
Si consideri l'arco di curva piana $\gamma$ di equazione parametriche:

$$\rho = R\cos^2\theta \text{ per } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $R$ costante positiva. Calcolare l'elemento d'arco $ds$ e l'integrale di linea:

$$\int_\gamma |\sin\theta|\, ds,$$

semplificando le espressioni trovate.

**4. Integrali tripli**
Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse $z$ del solido

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \ge 0\right\}$$

avente densità

$$\delta(x, y, z) = \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\mu}{R^3},$$

dove $R, \mu$ sono costanti positive aventi le dimensioni di lunghezza e massa, rispettivamente.

**5. Serie di Fourier**
Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[0, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ per } x \in [0, 1] \\ 1 \text{ per } x \in [1, 2] \end{cases}$$

e riflessa pari in $[-2, 0]$.
*a.* Dopo aver disegnato il grafico di $f$, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
*b.* Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di $f$, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

**Analisi Matematica 2. Appello di febbraio 2022**
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

| Es. | Punti |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| Tot. | |

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)_________________________________________

**1. Equazioni differenziali del second'ordine**
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' + 2y = e^x \sin x.$$

Per risolvere l'equazione completa si richiede di usare il metodo dell'esponenziale complesso.

**2. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili**
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = y^2 \left( \frac{x^2}{2} - x + 1 \right) + \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$$

**3. Integrali doppi**
Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_\Omega \left| x - y^2 \right| dxdy$$

con $\Omega = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. Si raccomanda di fare una figura e sfruttare le simmetrie. Riportare impostazione e passaggi.

**4. Campi vettoriali**

Calcolare il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}(y,-x)$$

lungo l'arco di curva $\gamma$ espresso in forma polare dall'equazione

$$\rho = Re^{-2\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi],$$

con $R > 0$ costante.

**5. Integrali di superficie**

Sia $\Sigma$ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse $z$ la curva $\gamma$ che nel piano $xz$ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ z = \log t \end{cases} \quad t \in [1,2]$$

Dopo aver scritto le equazioni parametriche di $\gamma$ e di $\Sigma$, l'elemento d'area di $\Sigma$, e aver individuato gli eventuali punti singolari della superficie, calcolare l'integrale

$$\int\int_{\Sigma} |y|\, dS.$$

**Recupero sulla prima prova in itinere**
**di Analisi Matematica 2**
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
**Svolgimento**

| Es. | Punti |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 7 |
| 3 | 6 |
| 4 | 7 |
| 5 | 7 |
| Tot. | 33 |

**1. Equazioni differenziali del prim'ordine**
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \frac{\log^2 x}{x} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione a variabili separabili, il secondo membro ha senso per $x > 0$. Soluzione costante dell'equazione è $y = 0$, che non risolve il problema. Risolviamo:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{\log^2 x}{x} dx$$
$$-\frac{1}{y} = \frac{\log^3 x}{3} + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(1) = 3$:

$$-\frac{1}{3} = c$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$-\frac{1}{y} = \frac{\log^3 x - 1}{3}$$

quindi:

$$y = \frac{3}{1 - \log^3 x}.$$

Poiché $x$ deve variare in un intorno di 1 e dev'essere $x > 0$ (dall'equazione) e $\log^3 x \neq 1, x \neq e$, dovrà essere

$$x \in (0, e).$$

Questo è l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione.

**2. Equazioni differenziali del second'ordine**
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' + 2y = e^x \sin x.$$

Per risolvere l'equazione completa si richiede di usare il metodo dell'esponenziale complesso.

$$\begin{aligned}\alpha^2+\alpha+2&=0\\ \alpha&=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}.\end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right).$$

Metodo di somiglianza, notando che il termine noto *non è* soluzione dell'omogenea, poiché $e^x\sin x=\operatorname{Im}\left(e^{x(1+i)}\right)$, consideriamo l'equazione

$$w''+w'+2w=e^{x(1+i)}$$

e cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$\begin{aligned}w(x)&=Ae^{x(1+i)}\\ w'&=A(1+i)e^{x(1+i)}\\ w''&=A(1+i)^2e^{x(1+i)}\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione si ha:

$$\begin{aligned}Ae^{x(1+i)}\left\{(1+i)^2+(1+i)+2\right\}&=e^{x(1+i)}\\ A\{2i+1+i+2\}&=1\\ A&=\frac{1}{3(1+i)}=\frac{1}{6}(1-i)\end{aligned}$$

$$w(x)=\frac{1}{6}(1-i)e^{x(1+i)}$$

quindi una soluzione particolare dell'equazione non omogenea reale è:

$$\begin{aligned}\overline{y}(x)=\operatorname{Im}w(x)&=\frac{1}{6}e^x\operatorname{Im}((1-i)(\cos x+i\sin x))\\ &=\frac{1}{6}e^x(\sin x-\cos x).\end{aligned}$$

Integrale generale dell'equazione completa:

$$y(x)=\frac{1}{6}e^x(\sin x-\cos x)+e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right).$$

**3. Curve e integrali di linea**

Si consideri l'arco di curva piana $\gamma$ di equazione parametriche:

$$\rho=R\cos^2\theta \text{ per } \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

con $R$ costante positiva. Calcolare l'elemento d'arco $ds$ e l'integrale di linea:

$$\int_\gamma |\sin\theta|\, ds,$$

semplificando le espressioni trovate.

$$\begin{aligned}
\rho'(\theta) &= -2R\sin\theta\cos\theta \\
|\underline{r}'(\theta)|^2 &= \rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 \\
&= R^2\left(\cos^4\theta + 4\sin^2\theta\cos^2\theta\right) \\
&= R^2\cos^2\theta\left(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta\right) \\
ds &= R|\cos\theta|\sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}d\theta \\
&= R|\cos\theta|\sqrt{1 + 3\sin^2\theta}d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma |\sin\theta|\, ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R|\cos\theta||\sin\theta|\sqrt{1+3\sin^2\theta}d\theta \\
&= 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\sqrt{1+3\sin^2\theta}d\theta \\
&= 2R\left[\frac{1}{9}\left(1+3\sin^2\theta\right)^{3/2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{9}R\left[4^{3/2}-1\right] = \frac{14}{9}R.
\end{aligned}$$

**4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili**
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\left(x^2-y^3\right)\sin(x+y)}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

*a.* Stabilire se $f$ è continua in $(0,0)$.
*b.* Stabilire se $f$ è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
*c.* Stabilire se $f$ è differenziabile nell'origine.
*Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.*

*a.* Scriviamo:

$$\begin{aligned}
|f(x,y)| &\leq \frac{x^2}{x^2+y^2}|\sin(x+y)| + \frac{|y|^3}{x^2+y^2}|\sin(x+y)| \\
&\leq |\sin(x+y)| + |y| \to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0)
\end{aligned}$$

Perciò

$$f(x,y)\to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0)$$

e $f$ è continua.
*b.*

$$\begin{aligned} f(x,0) &= \frac{x^2 \sin x}{x^2} = \sin x \sim x \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0,y) &= \frac{-y^3 \sin y}{y^2} = -y \sin y \sim -y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

Quindi $f$ è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (1,0)$.
*c.* Per definizione $f$ è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$h(x,y) \equiv \frac{f(x,y) - x}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Ma:

$$h(x,y) = \frac{\frac{\left(x^2-y^3\right)\sin(x+y)}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\left(x^2-y^3\right)\sin(x+y) - x^3 - xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}.$$

In particolare,

$$h(x,x) = \frac{-2x^3}{\left(2x^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x^3}{|x|^3} \to \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ per } x \to 0^{\pm}.$$

Poiché $h(x,x)$ non tende a zero, $f$ non è differenziabile in $(0,0)$.

**5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili**
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = y^2\left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right) + \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$$

$$\begin{cases} f_x = y^2(x-1) + x^2 + 2x - 3 = 0 \\ f_y = 2y\left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà

$$y^2(x-1) + x^2 + 2x - 3 = y^2(x-1) + (x-1)(x+3) = (x-1)\left(y^2+x+3\right) = 0$$

che implica $x = 1$ o $x = -3 - y^2$.
La seconda equazione per $x = 1$ dà $y = 0$, quindi $(1,0)$.
La seconda equazione per $x = -3 - y^2$ dà

$$2y\left(\frac{\left(3+y^2\right)^2}{2} + 3 + y^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ quindi } x = -3, \text{ perciò } (-3,0).$$

I punti stazionari sono:

$$(1,0)\,,(-3,0)\,.$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$Hf\,(x,y)=\begin{bmatrix} y^2+2x+2 & 2y\,(x-1) \\ 2y\,(x-1) & 2\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right)\end{bmatrix}.$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf\,(1,0)=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\text{ definita positiva,}$$
$$(1,0)\ \text{ è punto di minimo relativo.}$$

$$Hf\,(-3,0)=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{9}{2}+4\right)\end{bmatrix}\text{ indefinita,}$$
$$(-3,0)\ \text{ punto di sella.}$$

**Recupero sulla seconda prova in itinere**
**di Analisi Matematica 2**
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
**Svolgimento**

| Es. | Punti |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 6 |
| 3 | 7 |
| 4 | 7 |
| 5 | 7 |
| Tot. | 33 |

**1.** Calcolare l'integrale doppio
$$\int\int_{\Omega}\left|x-y^2\right|dxdy$$
con $\Omega=\{(x,y):|x|\leq 1,|y|\leq 1\}$. Si raccomanda di fare una figura e sfruttare le simmetrie. Riportare impostazione e passaggi.

Per simmetria,
$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega}\left|x-y^2\right|dxdy=2\int\int_{\{(x,y):-1\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\}}\left|x-y^2\right|dxdy\\
&=2\left\{\int\int_{\{(x,y):-1\leq x\leq y^2,0\leq y\leq 1\}}\left(y^2-x\right)dxdy+\int\int_{\{(x,y):y^2\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\}}\left(x-y^2\right)dxdy\right\}\\
&=2\left\{\int_0^1\left[\left(\int_{-1}^{y^2}\left(y^2-x\right)dx\right)+\left(\int_{y^2}^1\left(x-y^2\right)dx\right)\right]dy\right\}\\
&=2\left\{\int_0^1\left(y^2\left(y^2+1\right)-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{y^2}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{1}-y^2\left(1-y^2\right)\right)dy\right\}\\
&=2\left\{\int_0^1\left(y^4+y^2-\frac{y^4-1}{2}+\frac{1-y^4}{2}-y^2+y^4\right)dy\right\}\\
&=2\left\{\int_0^1\left(y^4+1\right)dy\right\}=2\left(\frac{1}{5}+1\right)=\frac{12}{5}.
\end{aligned}$$

**2.** Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse $z$ del solido
$$\Omega=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq R^2,z\geq 0\right\}$$
avente densità
$$\delta\left(x,y,z\right)=\left(1+\frac{z}{R}\right)\frac{\mu}{R^3},$$
dove $R,\mu$ sono costanti positive aventi le dimensioni di lunghezza e massa, rispettivamente.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_{\Omega} \delta(x,y,z)\left(x^2+y^2\right) dxdydz \\
&= \int_0^R \left(1+\frac{z}{R}\right)\frac{\mu}{R^3}\left(\int\int_{x^2+y^2\le R^2-z^2}\left(x^2+y^2\right) dxdy\right) dz \\
&= \int_0^R \left(1+\frac{z}{R}\right)\frac{\mu}{R^3}\left(2\pi\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho^3 d\rho\right) dz \\
&= 2\pi\frac{\mu}{R^3}\int_0^R \left(1+\frac{z}{R}\right)\frac{1}{4}\left(R^2-z^2\right)^2 dz \\
&= \frac{\pi\mu}{2R^3}\int_0^R \left(1+\frac{z}{R}\right)\left(z^4-2z^2R^2+R^4\right) dz \\
&= \frac{\pi\mu}{2R^3}\int_0^R \left(\frac{z^5}{R}+z^4-2z^3R-2z^2R^2+zR^3+R^4\right) dz \\
&= \frac{\pi\mu}{2}R^2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{2}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1\right) \\
&= \frac{\pi\mu}{2}R^2\frac{7}{10} = \frac{7}{20}\pi\mu R^2.
\end{aligned}
$$

**3.** Calcolare il lavoro del campo vettoriale piano

$$
\underline{F}(x,y) = \frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}(y,-x)
$$

lungo l'arco di curva $\gamma$ espresso in forma polare dall'equazione

$$
\rho = Re^{-2\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi],
$$

con $R > 0$ costante.

Equazione parametrica di $\gamma$:

$$
\begin{aligned}
\underline{r}(\theta) &= \left(R\,e^{-2\theta}\cos\theta, R\,e^{-2\theta}\sin\theta\right) \\
\underline{r}'(\theta) &= R\,e^{-2\theta}\left(-2\cos\theta-\sin\theta, -2\sin\theta+\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{F}\left(\underline{r}(\theta)\right) &= \frac{R^2\,e^{-4\theta}\cos^2\theta}{\left(Re^{-2\theta}\right)^4}R\,e^{-2\theta}\left(\sin\theta, -\cos\theta\right) \\
&= \frac{\cos^2\theta}{Re^{-2\theta}}\left(\sin\theta, -\cos\theta\right).
\end{aligned}
$$

Calcoliamo il lavoro.

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{\gamma} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{Re^{-2\theta}}\left(\sin\theta,-\cos\theta\right)R\,e^{-2\theta}\left(-2\cos\theta-\sin\theta,-2\sin\theta+\cos\theta\right) d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} \cos^2\theta\left(-2\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta\right) d\theta \\
&= -\int_{\pi}^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

**4.** Sia $\Sigma$ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse $z$ la curva $\gamma$ che nel piano $xz$ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ z = \log t \end{cases} \quad t \in [1,2]$$

Dopo aver scritto le equazioni parametriche di $\gamma$ e di $\Sigma$, l'elemento d'area di $\Sigma$, e aver individuato gli eventuali punti singolari della superficie, calcolare l'integrale

$$\int\int_\Sigma |y| \, dS.$$

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = t^2 \\ z = b(t) = \log t \end{cases} \quad t \in [1,2].$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = t^2 \cos\theta \\ y = t^2 \sin\theta \\ z = \log t \end{cases} \quad t \in [1,2], \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned} a'(t) &= 2t, b'(t) = \frac{1}{t} \\ dS &= |a(t)| \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} dt d\theta \\ &= t^2 \sqrt{4t^2 + \frac{1}{t^2}} dt d\theta \\ &= t\sqrt{4t^4 + 1} dt d\theta \end{aligned}$$

Poiché $t \in [1,2]$ non ci sono punti singolari.

$$\begin{aligned} \int\int_\Sigma |y| \, dS &= \left( \int_0^{2\pi} |\sin\theta| \, d\theta \right) \left( \int_1^2 t^3 \sqrt{4t^4 + 1} dt \right) \\ &= \left( 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \right) \left[ \frac{1}{24} \left(4t^4 + 1\right)^{3/2} \right]_1^2 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{24} \left(65^{3/2} - 5^{3/2}\right) = \frac{1}{6} \left(65^{3/2} - 5^{3/2}\right). \end{aligned}$$

**5.** Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[0,2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ per } x \in [0,1] \\ 1 \text{ per } x \in [1,2] \end{cases}$$

e riflessa pari in $[-2, 0]$.

*a.* Dopo aver disegnato il grafico di $f$, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

*b.* Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di $f$, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

*a.* La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di $f$ converge puntualmente a $f$ in $[-2,2]$. I coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{k}\right)$.
*b.* La funzione è pari, perciò $b_k = 0$ per ogni $k$. Per calcolare gli $a_k$, poiché $T=4$, $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, per $k \geq 1$ si ha:

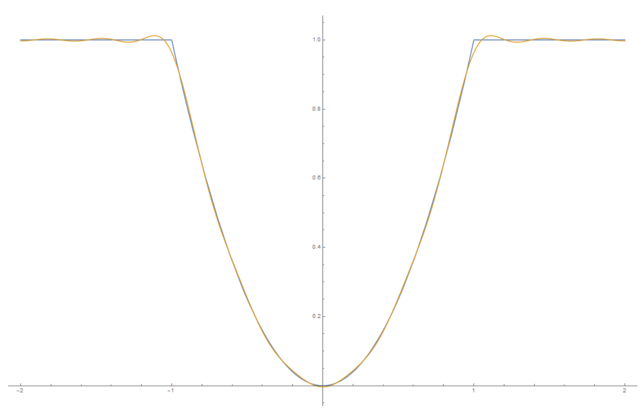
$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \int_0^2 f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx \\
&= \int_0^1 x^2\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx \\
&= \left[x^2\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx + \left[\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^2 \\
&= \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{k\pi}\left\{\left[-\frac{2}{k\pi}x\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 + \frac{2}{k\pi}\int_0^1\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx\right\} - \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{4}{k\pi}\left\{-\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\left[\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1\right\} \\
&= \frac{8}{(k\pi)^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{16}{(k\pi)^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

$$a_0 = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 dx = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$$

La serie di Fourier di $f$ è

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi k^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right]\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right).
\end{aligned}$$

Grafico di $f(x)$ insieme alla sua somma parziale di Fourier fino a $n=10$:



**Analisi Matematica 2. Appello di febbraio 2022**
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
**Svolgimento Tema n°1**

| Es. | Punti |
|---|---|
| 1 | 7 |
| 2 | 7 |
| 3 | 6 |
| 4 | 6 |
| 5 | 7 |
| Tot. | 33 |

**1. Equazioni differenziali del prim'ordine**
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \frac{\log^2 x}{x} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione a variabili separabili, il secondo membro ha senso per $x > 0$. Soluzione costante dell'equazione è $y = 0$, che non risolve il problema. Risolviamo:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{\log^2 x}{x} dx$$
$$-\frac{1}{y} = \frac{\log^3 x}{3} + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(1) = 3$:

$$-\frac{1}{3} = c$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$-\frac{1}{y} = \frac{\log^3 x - 1}{3}$$

quindi:

$$y = \frac{3}{1 - \log^3 x}.$$

Poiché $x$ deve variare in un intorno di 1 e dev'essere $x > 0$ (dall'equazione) e $\log^3 x \neq 1, x \neq e$, dovrà essere

$$x \in (0, e).$$

Questo è l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione.

**2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili**
Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\left(x^2 - y^3\right) \sin(x+y)}{x^2+y^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

*a.* Stabilire se $f$ è continua in $(0, 0)$.

*b.* Stabilire se $f$ è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
*c.* Stabilire se $f$ è differenziabile nell'origine.
*Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.*

*a.* Scriviamo:

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \frac{x^2}{x^2+y^2}|\sin(x+y)| + \frac{|y|^3}{x^2+y^2}|\sin(x+y)| \\ &\leq |\sin(x+y)| + |y| \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0) \end{aligned}$$

Perciò

$$f(x,y) \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)$$

e $f$ è continua.
*b.*

$$\begin{aligned} f(x,0) &= \frac{x^2 \sin x}{x^2} = \sin x \sim x \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0,y) &= \frac{-y^3 \sin y}{y^2} = -y \sin y \sim -y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

Quindi $f$ è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (1,0)$.
*c.* Per definizione $f$ è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$h(x,y) \equiv \frac{f(x,y) - x}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Ma:

$$h(x,y) = \frac{\frac{(x^2-y^3)\sin(x+y)}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x^2-y^3)\sin(x+y) - x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

In particolare,

$$h(x,x) = \frac{-2x^3}{(2x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x^3}{|x|^3} \to \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ per } x \to 0^{\pm}.$$

Poiché $h(x,x)$ non tende a zero, $f$ non è differenziabile in $(0,0)$.

**3. Curve e integrali di linea**
Si consideri l'arco di curva piana $\gamma$ di equazione parametriche:

$$\rho = R\cos^2\theta \text{ per } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $R$ costante positiva. Calcolare l'elemento d'arco $ds$ e l'integrale di linea:

$$\int_\gamma |\sin\theta| \, ds,$$

semplificando le espressioni trovate.

$$\begin{aligned}
\rho'(\theta) &= -2R\sin\theta\cos\theta \\
|\underline{r}'(\theta)|^2 &= \rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 \\
&= R^2\left(\cos^4\theta + 4\sin^2\theta\cos^2\theta\right) \\
&= R^2\cos^2\theta\left(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta\right) \\
ds &= R|\cos\theta|\sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta d\theta} \\
&= R|\cos\theta|\sqrt{1 + 3\sin^2\theta d\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma |\sin\theta|\, ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R|\cos\theta||\sin\theta|\sqrt{1+3\sin^2\theta d\theta} \\
&= 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\sqrt{1+3\sin^2\theta d\theta} \\
&= 2R\left[\frac{1}{9}\left(1+3\sin^2\theta\right)^{3/2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{9}R\left[4^{3/2}-1\right] = \frac{14}{9}R.
\end{aligned}$$

**4. Integrali tripli**

Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse $z$ del solido

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z \geq 0\right\}$$

avente densità

$$\delta(x,y,z) = \left(1+\frac{z}{R}\right)\frac{\mu}{R^3},$$

dove $R, \mu$ sono costanti positive aventi le dimensioni di lunghezza e massa, rispettivamente.

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_\Omega \delta(x,y,z)\left(x^2+y^2\right) dxdydz \\
&= \int_0^R \left(1+\frac{z}{R}\right)\frac{\mu}{R^3}\left(\int\int_{x^2+y^2\leq R^2-z^2}\left(x^2+y^2\right)dxdy\right)dz \\
&= \int_0^R \left(1+\frac{z}{R}\right)\frac{\mu}{R^3}\left(2\pi\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\rho^3 d\rho\right)dz \\
&= 2\pi\frac{\mu}{R^3}\int_0^R\left(1+\frac{z}{R}\right)\frac{1}{4}\left(R^2-z^2\right)^2 dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi\mu}{2R^3}\int_0^R \left(1+\frac{z}{R}\right)\left(z^4-2z^2R^2+R^4\right)dz \\
&= \frac{\pi\mu}{2R^3}\int_0^R \left(\frac{z^5}{R}+z^4-2z^3R-2z^2R^2+zR^3+R^4\right)dz \\
&= \frac{\pi\mu}{2}R^2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{2}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1\right) \\
&= \frac{\pi\mu}{2}R^2\frac{7}{10}=\frac{7}{20}\pi\mu R^2.
\end{aligned}
$$

**5. Serie di Fourier**

Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[0,2]$ da

$$
f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ per } x\in[0,1] \\ 1 \text{ per } x\in[1,2] \end{cases}
$$

e riflessa pari in $[-2,0]$.

*a.* Dopo aver disegnato il grafico di $f$, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

*b.* Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di $f$, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

*a.* La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di $f$ converge puntualmente a $f$ in $[-2,2]$. I coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{k}\right)$.

*b.* La funzione è pari, perciò $b_k=0$ per ogni $k$. Per calcolare gli $a_k$, poiché $T=4$, $\omega=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, per $k\geq 1$ si ha:

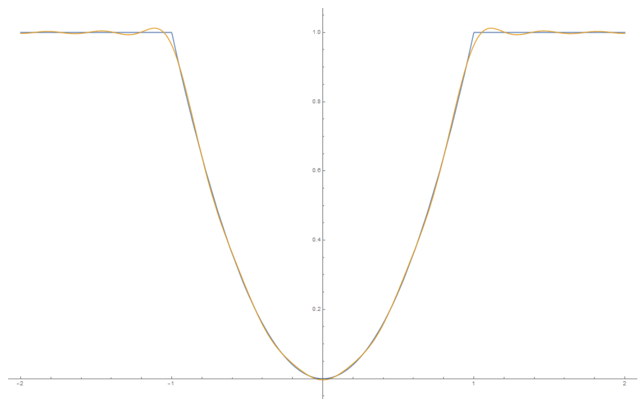
$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx=\int_0^2 f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx \\
&= \int_0^1 x^2\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx+\int_1^2\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx \\
&= \left[x^2\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1-\int_0^1 2x\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx+\left[\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^2 \\
&= \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)-\frac{4}{k\pi}\left\{\left[-\frac{2}{k\pi}x\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1+\frac{2}{k\pi}\int_0^1\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx\right\}-\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{4}{k\pi}\left\{-\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\left[\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1\right\} \\
&= \frac{8}{(k\pi)^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)-\frac{16}{(k\pi)^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

$$a_0 = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 dx = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

La serie di Fourier di $f$ è

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi k^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right]\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right). \end{aligned}$$

Grafico di $f(x)$ insieme alla sua somma parziale di Fourier fino a $n = 10$:



**Analisi Matematica 2. Appello di febbraio 2022**
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
**Svolgimento Tema n°2**

| Es. | Punti |
|---|---|
| 1 | 7 |
| 2 | 7 |
| 3 | 6 |
| 4 | 6 |
| 5 | 7 |
| Tot. | 33 |

**1. Equazioni differenziali del second'ordine**
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' + 2y = e^x \sin x.$$

Per risolvere l'equazione completa si richiede di usare il metodo dell'esponenziale complesso.

$$\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$$
$$\alpha = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right).$$

Metodo di somiglianza, notando che il termine noto *non è* soluzione dell'omogenea, poiché $e^x \sin x = \operatorname{Im}\left(e^{x(1+i)}\right)$, consideriamo l'equazione

$$w'' + w' + 2w = e^{x(1+i)}$$

e cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$w(x) = Ae^{x(1+i)}$$
$$w' = A(1+i)e^{x(1+i)}$$
$$w'' = A(1+i)^2 e^{x(1+i)}$$

Sostituendo nell'equazione si ha:

$$Ae^{x(1+i)}\left\{(1+i)^2 + (1+i) + 2\right\} = e^{x(1+i)}$$
$$A\{2i + 1 + i + 2\} = 1$$
$$A = \frac{1}{3(1+i)} = \frac{1}{6}(1-i)$$

$$w(x) = \frac{1}{6}(1-i)e^{x(1+i)}$$

quindi una soluzione particolare dell'equazione non omogenea reale è:

$$\begin{aligned}\overline{y}(x) &= \operatorname{Im} w(x) = \frac{1}{6}e^{x} \operatorname{Im}\left((1-i)(\cos x + i \sin x)\right) \\ &= \frac{1}{6}e^{x}(\sin x - \cos x).\end{aligned}$$

Integrale generale dell'equazione completa:

$$y(x) = \frac{1}{6}e^{x}(\sin x - \cos x) + e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right).$$

**2. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili**

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = y^2\left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right) + \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$$

$$\begin{cases} f_x = y^2(x-1) + x^2 + 2x - 3 = 0 \\ f_y = 2y\left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà

$$y^2(x-1) + x^2 + 2x - 3 = y^2(x-1) + (x-1)(x+3) = (x-1)\left(y^2 + x + 3\right) = 0$$

che implica $x = 1$ o $x = -3 - y^2$.
La seconda equazione per $x = 1$ dà $y = 0$, quindi $(1,0)$.
La seconda equazione per $x = -3 - y^2$ dà

$$2y\left(\frac{(3+y^2)^2}{2} + 3 + y^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ quindi } x = -3, \text{ perciò } (-3,0).$$

I punti stazionari sono:

$$(1,0), (-3,0).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} y^2 + 2x + 2 & 2y(x-1) \\ 2y(x-1) & 2\left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right) \end{bmatrix}.$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf(1,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$

$$(1,0) \text{ è punto di minimo relativo.}$$

$$
Hf(-3,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{9}{2}+4\right) \end{bmatrix} \text{ indefinita,}
$$
$$
(-3,0) \text{ punto di sella.}
$$

**3. Integrali doppi**
Calcolare l'integrale doppio
$$
\int\int_{\Omega} \left|x-y^2\right| dxdy
$$
con $\Omega = \{(x,y) : |x| \le 1, |y| \le 1\}$. Si raccomanda di fare una figura e sfruttare le simmetrie. Riportare impostazione e passaggi.

Per simmetria,
$$
\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega} \left|x-y^2\right| dxdy = 2\int\int_{\{(x,y):-1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}} \left|x-y^2\right| dxdy \\
&= 2\left\{\int\int_{\{(x,y):-1\le x\le y^2, 0\le y\le 1\}} \left(y^2-x\right) dxdy + \int\int_{\{(x,y):y^2\le x\le 1, 0\le y\le 1\}} \left(x-y^2\right) dxdy\right\} \\
&= 2\left\{\int_0^1 \left[\left(\int_{-1}^{y^2} \left(y^2-x\right) dx\right) + \left(\int_{y^2}^{1} \left(x-y^2\right) dx\right)\right] dy\right\} \\
&= 2\left\{\int_0^1 \left(y^2\left(y^2+1\right) - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{y^2} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{1} - y^2\left(1-y^2\right)\right) dy\right\} \\
&= 2\left\{\int_0^1 \left(y^4+y^2-\frac{y^4-1}{2}+\frac{1-y^4}{2}-y^2+y^4\right) dy\right\} \\
&= 2\left\{\int_0^1 \left(y^4+1\right) dy\right\} = 2\left(\frac{1}{5}+1\right) = \frac{12}{5}.
\end{aligned}
$$

**4. Campi vettoriali**
Calcolare il lavoro del campo vettoriale piano
$$
\underline{F}(x,y) = \frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}(y,-x)
$$
lungo l'arco di curva $\gamma$ espresso in forma polare dall'equazione
$$
\rho = Re^{-2\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi],
$$
con $R > 0$ costante.

Equazione parametrica di $\gamma$:
$$
\begin{aligned}
\underline{r}(\theta) &= \left(R\,e^{-2\theta}\cos\theta, R\,e^{-2\theta}\sin\theta\right) \\
\underline{r}'(\theta) &= R\,e^{-2\theta}\left(-2\cos\theta-\sin\theta, -2\sin\theta+\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{F}\left(\underline{r}\left(\theta\right)\right) &= \frac{R^2\, e^{-4\theta}\cos^2\theta}{\left(Re^{-2\theta}\right)^4} R\, e^{-2\theta}\left(\sin\theta, -\cos\theta\right) \\
&= \frac{\cos^2\theta}{Re^{-2\theta}}\left(\sin\theta, -\cos\theta\right).
\end{aligned}
$$

Calcoliamo il lavoro.

$$
\begin{aligned}
L &= \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_\pi^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{Re^{-2\theta}}\left(\sin\theta, -\cos\theta\right) R\, e^{-2\theta}\left(-2\cos\theta - \sin\theta, -2\sin\theta + \cos\theta\right) d\theta \\
&= \int_\pi^{2\pi} \cos^2\theta\left(-2\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta\right) d\theta \\
&= -\int_\pi^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

**5. Integrali di superficie**

Sia $\Sigma$ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse $z$ la curva $\gamma$ che nel piano $xz$ di equazioni parametriche:

$$
\begin{cases} x = t^2 \\ z = \log t \end{cases} \quad t \in [1, 2]
$$

Dopo aver scritto le equazioni parametriche di $\gamma$ e di $\Sigma$, l'elemento d'area di $\Sigma$, e aver individuato gli eventuali punti singolari della superficie, calcolare l'integrale

$$
\int\int_\Sigma |y|\, dS.
$$

$$
\gamma : \begin{cases} x = a\left(t\right) = t^2 \\ z = b\left(t\right) = \log t \end{cases} \quad t \in [1, 2].
$$

$$
\Sigma : \begin{cases} x = t^2\cos\theta \\ y = t^2\sin\theta \\ z = \log t \end{cases} \quad t \in [1, 2], \theta \in [0, 2\pi].
$$

$$
\begin{aligned}
a'\left(t\right) &= 2t, b'\left(t\right) = \frac{1}{t} \\
dS &= \left|a\left(t\right)\right|\sqrt{a'\left(t\right)^2 + b'\left(t\right)^2} dt d\theta \\
&= t^2\sqrt{4t^2 + \frac{1}{t^2}} dt d\theta \\
&= t\sqrt{4t^4 + 1} dt d\theta
\end{aligned}
$$

Poiché $t \in [1, 2]$ non ci sono punti singolari.

$$
\begin{aligned}
\int\int_\Sigma |y|\, dS &= \left(\int_0^{2\pi} |\sin\theta|\, d\theta\right)\left(\int_1^2 t^3\sqrt{4t^4 + 1} dt\right) \\
&= \left(4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta\right)\left[\frac{1}{24}\left(4t^4 + 1\right)^{3/2}\right]_1^2 \\
&= 4\cdot\frac{1}{24}\left(65^{3/2} - 5^{3/2}\right) = \frac{1}{6}\left(65^{3/2} - 5^{3/2}\right).
\end{aligned}
$$