Recupero sulla prima prova in itinere
di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xe^{3y}}{1+x^2} \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = 5xe^{-2x}.$$

3. Curve e integrali di linea
Si consideri la curva piana γ di equazione in forma polare

$$\rho = \theta^3 \text{ per } \theta \in [0, 3\pi].$$

Calcolare poi il suo elemento d'arco, semplificando l'espressione ottenuta, stabilire se la curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari sulla curva, e calcolare la lunghezza di γ.

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{e^x x^2 y + y^3 \cos x}{\sqrt{x^2 + y^4}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 4\right) e^{x-y}.$$

Recupero sulla seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)____________________________________
codice persona (o n°di matricola)____________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Integrali doppi. Sia Ω la lamina materiale (ellittica) descritta da:

$$\Omega = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

avente densità

$$\delta (x, y) = (|x| + |y|) \frac{\mu}{b^3}$$

dove b, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e di una massa, rispettivamente. Calcolare il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse z (cioè all'origine).

2. Integrali tripli. Sia Ω la porzione della sfera di centro l'origine e raggio $R > 0$ contenuta nel primo ottante, ossia:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}.$$

Calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int_{\Omega} xyz^2 dxdydz.$$

Si raccomanda di riportare con cura l'impostazione del calcolo, oltre che i passaggi successivi.

3. Campi vettoriali. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F} (x, y) = \left(y \log \left(1 + x^2\right) + \frac{2x^2 y}{1 + x^2} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}, x \log \left(1 + x^2\right) + \log \left(x^2 + y^2\right) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} + y \right).$$

Dopo aver verificato se è irrotazionale nel suo insieme di definizione, stabilire se è conservativo nel suo insieme di definizione e calcolare in tal caso un potenziale.

4. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ che nel piano xz ha equazione polare:

$$\gamma : \rho = \sqrt{\cos\theta}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

a. Stabilire se la curva γ è regolare, o regolare a tratti, se è chiusa o aperta, scrivere le sue equazioni parametriche e il suo elemento di lunghezza ds.
b. Scrivere le equazioni parametriche di Σ, stabilire se è una superficie regolare, o determinare in caso negativo i suoi punti singolari; determinare l'elemento d'area dS e calcolare l'area di Σ.

5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione π-periodica definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \sin x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases} .$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti a_n di Fourier di f (non è richiesto il calcolo dei coefficienti b_n) e semplificare opportunamente l'espressione ottenuta.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.

Analisi Matematica 2. Appello di gennaio 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xe^{3y}}{1+x^2} \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Curve e integrali di linea
Si consideri la curva piana γ di equazione in forma polare

$$\rho = \theta^3 \text{ per } \theta \in [0, 3\pi].$$

Calcolare poi il suo elemento d'arco, semplificando l'espressione ottenuta, stabilire se la curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari sulla curva, e calcolare la lunghezza di γ.

3. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 4\right) e^{x-y}.$$

4. Integrali doppi. Sia Ω la lamina materiale (ellittica) descritta da:

$$\Omega = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

avente densità

$$\delta(x,y) = (|x| + |y|) \frac{\mu}{b^3}$$

dove b, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e di una massa, rispettivamente. Calcolare il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse z (cioè all'origine).

5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione π-periodica definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \sin x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases} \quad .$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti a_n di Fourier di f (non è richiesto il calcolo dei coefficienti b_n) e semplificare opportunamente l'espressione ottenuta.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.

Analisi Matematica 2. Appello di gennaio 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = 5xe^{-2x}.$$

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{e^x x^2 y + y^3 \cos x}{\sqrt{x^2 + y^4}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

3. Integrali tripli. Sia Ω la porzione della sfera di centro l'origine e raggio $R > 0$ contenuta nel primo ottante, ossia:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}.$$

Calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int_\Omega xyz^2 dxdydz.$$

Si raccomanda di riportare con cura l'impostazione del calcolo, oltre che i passaggi successivi.

4. Campi vettoriali. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x,y)=\left(y\log\left(1+x^2\right)+\frac{2x^2y}{1+x^2}+\frac{2xy}{x^2+y^2},\, x\log\left(1+x^2\right)+\log\left(x^2+y^2\right)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+y\right).$$

Dopo aver verificato se è irrotazionale nel suo insieme di definizione, stabilire se è conservativo nel suo insieme di definizione e calcolare in tal caso un potenziale.

5. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ che nel piano xz ha equazione polare:

$$\gamma:\rho=\sqrt{\cos\theta},\quad \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

a. Stabilire se la curva γ è regolare, o regolare a tratti, se è chiusa o aperta, scrivere le sue equazioni parametriche e il suo elemento di lunghezza ds.
b. Scrivere le equazioni parametriche di Σ, stabilire se è una superficie regolare, o determinare in caso negativo i suoi punti singolari; determinare l'elemento d'area dS e calcolare l'area di Σ.

Recupero sulla prima prova in itinere
di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xe^{3y}}{1+x^2} \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione a variabili separabili. Non ci sono soluzioni costanti. Risolviamo:

$$\int e^{-3y} dy = \int \frac{xdx}{1+x^2}$$
$$-\frac{1}{3}e^{-3y} = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{3}$:

$$-\frac{1}{3}e^{-1} = c$$
$$c = -\frac{1}{3e}$$

e la soluzione del problema è definita da

$$-\frac{1}{3}e^{-3y} = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) - \frac{1}{3e}$$
$$e^{-3y} = -\frac{3}{2}\log\left(1+x^2\right) + \frac{1}{e}$$
$$y = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{e} - \frac{3}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)$$

Poiché x deve variare in un intorno di 0 e dev'essere

$$\frac{1}{e} - \frac{3}{2}\log\left(1+x^2\right) > 0$$
$$\log\left(1+x^2\right) < \frac{2}{3e}$$
$$x^2 < e^{\left(\frac{2}{3e}\right)} - 1$$
$$-\sqrt{e^{\left(\frac{2}{3e}\right)} - 1} < x < \sqrt{e^{\left(\frac{2}{3e}\right)} - 1}$$

Questo è l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = 5xe^{-2x}.$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 6\alpha + 9 &= 0 \\ \alpha &= -3. \end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2 x).$$

Soluzione particolare dell'equazione completa. Osservo che il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea. Perciò in base al metodo di somiglianza, cerco

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= e^{-2x}(Ax + B) \\ \overline{y}'(x) &= e^{-2x}(-2Ax - 2B + A) \\ \overline{y}''(x) &= e^{-2x}(4Ax + 4B - 4A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-2x}\{(4Ax + 4B - 4A) + 6(-2Ax - 2B + A) + 9(Ax + B)\} &= 5xe^{-2x} \\ 4Ax + 4B - 4A - 12Ax - 12B + 6A + 9Ax + 9B &= 5x \\ Ax + B + 2A &= 5x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A = 5 \\ B + 2A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5 \\ B = -10 \end{cases}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa è allora

$$\overline{y}(x) = e^{-2x}(5x - 10) = 5e^{-2x}(x - 2)$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2 x) + 5e^{-2x}(x - 2).$$

3. Curve e integrali di linea
Si consideri la curva piana γ di equazione in forma polare

$$\rho = \theta^3 \text{ per } \theta \in [0, 3\pi].$$

Calcolare poi il suo elemento d'arco, semplificando l'espressione ottenuta, stabilire se la curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari sulla curva, e calcolare la lunghezza di γ.

Detto $f(\theta) = \theta^3$ si ha $f'(\theta) = 3\theta^2$,

$$ds = \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta = \sqrt{\theta^6 + 9\theta^4} d\theta = \theta^2\sqrt{\theta^2 + 9} d\theta.$$

La curva è regolare ad eccezione del punto singolare per $\theta = 0$, che è l'origine.
Lunghezza:

$$l(\gamma) = \int_0^{3\pi} \theta^2 \sqrt{\theta^2 + 9} d\theta.$$

$$\theta = 3 \operatorname{Sh} t; d\theta = 3 \operatorname{Ch} t dt;$$

$$\sqrt{\theta^2 + 9} = \sqrt{9\left(1 + \operatorname{Sh}^2 t\right)} = 3 \operatorname{Ch} t$$

$$t \in [0, \operatorname{SettSh} \pi]$$

$$l(\gamma) = \int_0^{\operatorname{SettSh} \pi} (3 \operatorname{Sh} t)^2 \, 3 \operatorname{Ch} t \cdot 3 \operatorname{Ch} t dt = 81 \int_0^{\operatorname{SettSh} \pi} \left(\operatorname{Sh}^2 t \operatorname{Ch}^2 t\right) dt.$$

$$\operatorname{Sh}^2 t \operatorname{Ch}^2 t = \frac{\operatorname{Sh}^2(2t)}{4}$$

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \frac{81}{4} \int_0^{\operatorname{SettSh} \pi} \operatorname{Sh}^2(2t) \, dt = \frac{81}{16} \left[\operatorname{Sh}(2t) \operatorname{Ch}(2t) - 2t\right]_0^{\operatorname{SettSh} \pi} \\ &= \frac{81}{16} \left[\frac{\operatorname{Sh}(4t)}{2} - 2t\right]_0^{\operatorname{SettSh} \pi} \\ &= \frac{81}{16} \left[\frac{e^{4 \operatorname{SettSh} \pi} - e^{-4 \operatorname{SettSh} \pi}}{4} - 2 \operatorname{SettSh} \pi\right]. \end{aligned}$$

$$\operatorname{SettSh} \pi = \log\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)$$

$$l(\gamma) = \frac{81}{16} \left[\frac{\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)^4 - \left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)^{-4}}{4} - 2 \log\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)\right]$$

—

Scritture semplificate: sfruttando il fatto che

$$\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)^{-1} = \sqrt{1 + \pi^2} - 1$$

si ha

$$\begin{aligned} &\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)^4 - \left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)^{-4} = \left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)^4 - \left(\sqrt{1 + \pi^2} - 1\right)^4 \\ &= \left[\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)^2 - \left(\sqrt{1 + \pi^2} - 1\right)^2\right] \left[\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)^2 + \left(\sqrt{1 + \pi^2} - 1\right)^2\right] \\ &= 8\pi \sqrt{1 + \pi^2} \left(2\pi^2 + 1\right) \end{aligned}$$

perciò

$$l(\gamma) = \frac{81}{8} \left[\pi \sqrt{1 + \pi^2} \left(2\pi^2 + 1\right) - \log\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)\right].$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{e^x x^2 y + y^3 \cos x}{\sqrt{x^2+y^4}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0)\,,\ f(0,0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Scriviamo:

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \frac{e^x x^2 |y|}{\sqrt{x^2+y^4}} + \frac{|y|^3 |\cos x|}{\sqrt{x^2+y^4}} \\ &\leq \frac{e^x x^2 |y|}{\sqrt{x^2}} + \frac{|y|^3}{\sqrt{y^4}} = e^x |xy| + |y| \equiv g(x,y)\,. \end{aligned}$$

Poiché $g(x,y)$ è continua e $g(0,0) = 0$, per il teorema del confronto, $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, perciò f è continua.
b.

$$f(x,0) = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\begin{aligned} f(0,y) &= \frac{y^3}{y^2} = y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 1. \end{aligned}$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (0,1)$.
c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$g(x,y) \equiv \frac{f(x,y) - y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)\,.$$

Ma:

$$g(x,y) = \frac{e^x x^2 y + y^3 \cos x - y\sqrt{x^2+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^4}}.$$

In particolare,

$$g(x,x) = \frac{e^x x^3 + x^3 \cos x - x\sqrt{x^2+y^4}}{\sqrt{2x^2}\sqrt{x^2+x^4}} \sim \frac{-x|x|}{\sqrt{2}|x||x|} = \frac{-x}{\sqrt{2}|x|} \to \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ per } x \to 0^{\pm}.$$

Poiché $g(x,x)$ non tende a zero, f *non è differenziabile* in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2+y^2-4\right)e^{x-y}.$$

$$\begin{cases} f_x = e^{x-y}\left(x^2+y^2-4+2x\right) = 0 \\ f_y = e^{x-y}\left(-x^2-y^2+4+2y\right) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2+y^2-4+2x = 0 \\ -x^2-y^2+4+2y = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha $2(x+y)=0$, da cui $y=-x$, che sostituita nella prima equazione dà

$$\begin{aligned} &2x^2+2x-4=0 \\ &x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1, x=-2 \end{aligned}$$

I punti stazionari sono:

$$(1,-1), (-2,2).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$Hf(x,y) = e^{x-y}\begin{bmatrix} x^2+y^2-2+4x & -x^2-y^2+4-2x+2y \\ -x^2-y^2+4-2x+2y & x^2+y^2-2-4y \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf(1,-1) = e^2\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$
$$(1,-1) \text{ è punto di minimo.}$$

$$Hf(-2,2) = e^{-4}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$
$$(-2,2) \text{ è punto di sella.}$$

Recupero sulla seconda prova in itinere
di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	6
2	6
3	7
4	7
5	7
Tot.	33

1. Integrali doppi. Sia Ω la lamina materiale (ellittica) descritta da:

$$\Omega = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

avente densità

$$\delta(x, y) = (|x| + |y|) \frac{\mu}{b^3}$$

dove b, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e di una massa, rispettivamente. Calcolare il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse z (cioè all'origine).

$$I = \int\int_\Omega \left(x^2 + y^2\right) \delta(x, y)\, dxdy.$$

Passando alle coordinate polari ellittiche

$$\begin{cases} x = 2b\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases} \quad dxdy = 2b^2\rho d\rho d\theta$$

si ha:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(4b^2\rho^2\cos^2\theta + b^2\rho^2\sin^2\theta\right)(|2b\rho\cos\theta| + |b\rho\sin\theta|)\frac{\mu}{b^3} 2b^2\rho d\theta d\rho \\ &= 2\mu b^2 \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)(2|\cos\theta| + |\sin\theta|)\, d\theta\right) \\ &= 2\mu b^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)(2\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)(2\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - 3\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos^2\theta + 1\right)\sin\theta d\theta \\ &= 2\int_0^1 \left(4 - 3t^2\right) dt + \int_0^1 \left(3t^2 + 1\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(9 - 3t^2\right) dt = \left[9t - t^3\right]_0^1 = 8. \end{aligned}$$

$$I = 2\mu b^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 4 \cdot 8 = \frac{64}{5}\mu b^2.$$

2. Integrali tripli. Sia Ω la porzione della sfera di centro l'origine e raggio $R > 0$ contenuta nel primo ottante, ossia:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}.$$

Calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int_\Omega xyz^2 dxdydz.$$

Si raccomanda di riportare con cura l'impostazione del calcolo, oltre che i passaggi successivi.

Usiamo le coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

per cui

$$\Omega = \left\{(\rho, \phi, \theta) : \rho \in [0, R], \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}, dxdydz = \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$I = \int\int\int_\Omega xyz^2 dxdydz = \int_0^R \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho\sin\phi\cos\theta)(\rho\sin\phi\sin\theta)(\rho\cos\phi)^2 d\theta\right)\sin\phi d\phi\right)\rho^2 d\rho$$
$$= \left(\int_0^R \rho^6 d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi\cos^2\phi d\phi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta\right).$$

$$\int_0^R \rho^6 d\rho = \frac{R^7}{7}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi\cos^2\phi d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\left(1 - \cos^2\phi\right)\cos^2\phi d\phi$$
$$= \int_0^1 t^2\left(1 - t^2\right) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta = \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{R^7}{7} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{R^7}{105}.$$

3. Campi vettoriali. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x, y) = \left(y\log\left(1 + x^2\right) + \frac{2x^2y}{1 + x^2} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}, x\log\left(1 + x^2\right) + \log\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} + y\right).$$

Dopo aver verificato se è irrotazionale nel suo insieme di definizione, stabilire se è conservativo nel suo insieme di definizione e calcolare in tal caso un potenziale.

Il campo è ben definito in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ed è $\underline{F} \in C^1(\Omega)$. Verifichiamo se è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\partial_x F_2 &= \log\left(1+x^2\right) + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
\partial_y F_1 &= \log\left(1+x^2\right) + \frac{2x^2}{1+x^2} + 2x\left(\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) \\
&= \log\left(1+x^2\right) + \frac{2x^2}{1+x^2} + 2x\left(\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} &= 2x\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) \\
&= 2x\left(\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) = 2x\left(\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

si ha $\partial_x F_2 = \partial_y F_1$ e il campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$. Poiché Ω non è semplicemente connesso, non si può dedurre che F sia conservativo in Ω, cerchiamo un potenziale per vedere se lo è. Cerchiamo $U(x,y)$ tale che:

$$\begin{aligned}
U_x = F_1 &= y\log\left(1+x^2\right) + \frac{2x^2y}{1+x^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2} \\
U(x,y) &= \int\left\{y\log\left(1+x^2\right) + \frac{2x^2y}{1+x^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2}\right\}dx \\
&= y\int\left\{\log\left(1+x^2\right) + \frac{2x^2}{1+x^2}\right\}dx + y\log\left(x^2+y^2\right).
\end{aligned}$$

Ora:

$$\int \log\left(1+x^2\right)dx = x\log\left(1+x^2\right) - \int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$$

perciò

$$y\int\left\{\log\left(1+x^2\right) + \frac{2x^2}{1+x^2}\right\}dx = xy\log\left(1+x^2\right) + f(y)$$

e

$$U(x,y) = xy\log\left(1+x^2\right) + y\log\left(x^2+y^2\right) + f(y).$$

$$\begin{aligned}
U_y &= x\log\left(1+x^2\right) + \log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + f'(y) \\
&= F_2 = x\log\left(1+x^2\right) + \log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + y, \\
f'(y) &= y \\
f(y) &= \frac{1}{2}y^2 \\
U(x,y) &= xy\log\left(1+x^2\right) + y\log\left(x^2+y^2\right) + \frac{1}{2}y^2
\end{aligned}$$

perciò abbiamo determinato un potenziale in Ω, in particolare $\underline{F}$ è conservativo in Ω.

4. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ che nel piano xz ha equazione polare:

$$\gamma : \rho = \sqrt{\cos\theta}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

a. Stabilire se la curva γ è regolare, o regolare a tratti, se è chiusa o aperta, scrivere le sue equazioni parametriche e il suo elemento di lunghezza ds.
b. Scrivere le equazioni parametriche di Σ, stabilire se è una superficie regolare, o determinare in caso negativo i suoi punti singolari; determinare l'elemento d'area dS e calcolare l'area di Σ.

a.

$$\begin{aligned}
\rho = \sqrt{\cos\theta}; \rho' &= -\frac{\sin\theta}{2\sqrt{\cos\theta}} \\
\rho^2 + (\rho')^2 = \cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{4\cos\theta} &= \frac{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}{4\cos\theta} \\
ds &= \sqrt{\frac{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}{4\cos\theta}} d\theta
\end{aligned}$$

γ è regolare a tratti, con punti singolari per $\cos\theta = 0$, quindi l'origine.

$$\gamma : \begin{cases} x = a(\theta) = (\cos\theta)^{3/2} \\ z = b(\theta) = \sqrt{\cos\theta}\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

La curva è chiusa, $\underline{r}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,0)$.
b.

$$\Sigma : \begin{cases} x = (\cos\theta)^{3/2}\cos\phi \\ y = (\cos\theta)^{3/2}\sin\phi \\ z = \sqrt{\cos\theta}\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \phi \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned}
dS &= |a(\theta)| \sqrt{a'(\theta)^2 + b'(\theta)^2} d\theta d\phi \\
&= |a(\theta)| \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho')^2(\theta)} d\theta d\phi \\
&= (\cos\theta)^{3/2} \sqrt{\frac{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}{4\cos\theta}} d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{2}\cos\theta\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} d\theta d\phi
\end{aligned}$$

La superficie è regolare tranne per $\cos\theta = 0$ che dà l'orgine, punto singolare.

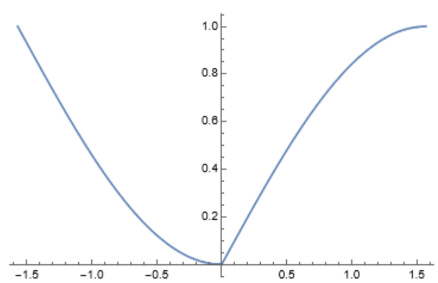
$$
\begin{aligned}
|\Sigma| &= \int\int_{\Sigma} dS = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos\theta\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} d\theta\right) d\phi \\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sqrt{4-3\sin^2\theta}d\theta \\
&[\sin\theta = t] \\
&= 2\pi\int_0^1\sqrt{4-3t^2}dt \\
&\left[t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin u; 4-3t^2 = 4\left(1-\sin^2 u\right) = 4\cos^2 u; dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos u du\right] \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cos u\frac{2}{\sqrt{3}}\cos u du = \frac{8}{\sqrt{3}}\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 u du \\
&= \frac{8}{\sqrt{3}}\pi\left[\frac{\cos u\sin u + u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \pi\left(1+\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi\right).
\end{aligned}
$$

5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione π-periodica definita in $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ da

$$
f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & \text{se } x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right] \\ \sin x & \text{se } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}.
$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti a_n di Fourier di f (non è richiesto il calcolo dei coefficienti b_n) e semplificare opportunamente l'espressione ottenuta.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.

a.



La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. I coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b. La funzione non è né pari né dispari. Per calcolare gli a_n, poiché $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos x)\cos(2nx)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(2nx)\,dx\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx\right\} \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - [\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - 1 + 1\right\} = 1. \end{aligned}$$

Per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left\{[\sin(2nx)]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\cos(2nx)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(2nx)\,dx\right\} \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\cos(2nx)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(2nx)\,dx\right\}. \end{aligned}$$

Sfruttando le identità

$$\begin{aligned} \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\} \\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\} \end{aligned}$$

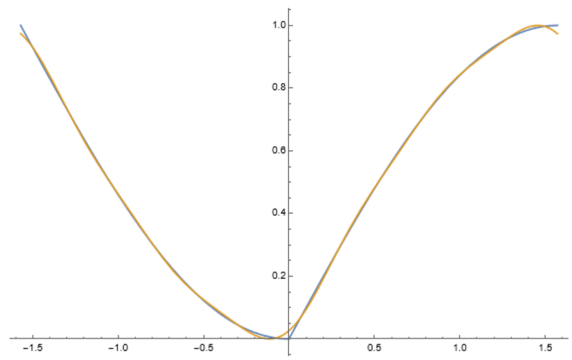
si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\cos(2nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\{\cos(2n+1)x + \cos(2n-1)x\}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n+1)} + \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n-1)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)} - \frac{(-1)^n}{(2n-1)}\right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}. \\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(2nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\{\sin(2n+1)x + \sin(1-2n)x\}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)} + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)}\right]_{0}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)} + \frac{1}{2n+1} + \frac{\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)} - \frac{1}{2n-1}\right] \\ &= -\frac{1}{4n^2-1}. \end{aligned}$$

Perciò

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{4n^2 - 1}.$$
$$a_0 = 1.$$

Grafico di $f(x)$ insieme alla sua somma parziale di Fourier fino a $n = 5$:



Analisi Matematica 2. Appello di gennaio 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	7
2	7
3	6
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xe^{3y}}{1+x^2} \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione a variabili separabili. Non ci sono soluzioni costanti. Risolviamo:

$$\int e^{-3y} dy = \int \frac{xdx}{1+x^2}$$
$$-\frac{1}{3}e^{-3y} = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{3}$:

$$-\frac{1}{3}e^{-1} = c$$
$$c = -\frac{1}{3e}$$

e la soluzione del problema è definita da

$$-\frac{1}{3}e^{-3y} = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) - \frac{1}{3e}$$
$$e^{-3y} = -\frac{3}{2}\log\left(1+x^2\right) + \frac{1}{e}$$
$$y = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{e} - \frac{3}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)$$

Poiché x deve variare in un intorno di 0 e dev'essere

$$\frac{1}{e} - \frac{3}{2}\log\left(1+x^2\right) > 0$$
$$\log\left(1+x^2\right) < \frac{2}{3e}$$
$$x^2 < e^{\left(\frac{2}{3e}\right)} - 1$$
$$-\sqrt{e^{\left(\frac{2}{3e}\right)} - 1} < x < \sqrt{e^{\left(\frac{2}{3e}\right)} - 1}$$

Questo è l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione.

2. Curve e integrali di linea
Si consideri la curva piana γ di equazione in forma polare

$$\rho = \theta^3 \text{ per } \theta \in [0, 3\pi].$$

Calcolare poi il suo elemento d'arco, semplificando l'espressione ottenuta, stabilire se la curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari sulla curva, e calcolare la lunghezza di γ.

Detto $f(\theta) = \theta^3$ si ha $f'(\theta) = 3\theta^2$,

$$ds = \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}d\theta = \sqrt{\theta^6 + 9\theta^4}d\theta = \theta^2\sqrt{\theta^2 + 9}d\theta.$$

La curva è regolare ad eccezione del punto singolare per $\theta = 0$, che è l'origine.
Lunghezza:

$$\begin{gathered} l(\gamma) = \int_0^{3\pi} \theta^2\sqrt{\theta^2 + 9}d\theta. \\ \theta = 3\operatorname{Sh} t; d\theta = 3\operatorname{Ch} t dt; \\ \sqrt{\theta^2 + 9} = \sqrt{9\left(1 + \operatorname{Sh}^2 t\right)} = 3\operatorname{Ch} t \\ t \in [0, \operatorname{SettSh} \pi] \end{gathered}$$

$$l(\gamma) = \int_0^{\operatorname{SettSh} \pi} (3\operatorname{Sh} t)^2\, 3\operatorname{Ch} t \cdot 3\operatorname{Ch} t dt = 81\int_0^{\operatorname{SettSh} \pi} \left(\operatorname{Sh}^2 t \operatorname{Ch}^2 t\right) dt.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Sh}^2 t \operatorname{Ch}^2 t &= \frac{\operatorname{Sh}^2(2t)}{4} \\ l(\gamma) &= \frac{81}{4}\int_0^{\operatorname{SettSh} \pi} \operatorname{Sh}^2(2t)\, dt = \frac{81}{16}\left[\operatorname{Sh}(2t)\operatorname{Ch}(2t) - 2t\right]_0^{\operatorname{SettSh} \pi} \\ &= \frac{81}{16}\left[\frac{\operatorname{Sh}(4t)}{2} - 2t\right]_0^{\operatorname{SettSh} \pi} \\ &= \frac{81}{16}\left[\frac{e^{4\operatorname{SettSh} \pi} - e^{-4\operatorname{SettSh} \pi}}{4} - 2\operatorname{SettSh} \pi\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{SettSh} \pi &= \log\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right) \\ l(\gamma) &= \frac{81}{16}\left[\frac{\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)^4 - \left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)^{-4}}{4} - 2\log\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)\right] \end{aligned}$$

—

Scritture semplificate: sfruttando il fatto che

$$\left(\pi + \sqrt{1 + \pi^2}\right)^{-1} = \sqrt{1 + \pi^2} - 1$$

si ha

$$
\begin{aligned}
&\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)^4-\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)^{-4}=\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)^4-\left(\sqrt{1+\pi^2}-1\right)^4\\
&=\left[\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)^2-\left(\sqrt{1+\pi^2}-1\right)^2\right]\left[\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)^2+\left(\sqrt{1+\pi^2}-1\right)^2\right]\\
&=8\pi\sqrt{1+\pi^2}\left(2\pi^2+1\right)
\end{aligned}
$$

perciò

$$
l\left(\gamma\right)=\frac{81}{8}\left[\pi\sqrt{1+\pi^2}\left(2\pi^2+1\right)-\log\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)\right].
$$

3. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$
f\left(x,y\right)=\left(x^2+y^2-4\right)e^{x-y}.
$$

$$
\begin{cases} f_x=e^{x-y}\left(x^2+y^2-4+2x\right)=0\\ f_y=e^{x-y}\left(-x^2-y^2+4+2y\right)=0\end{cases}
$$

$$
\begin{cases} x^2+y^2-4+2x=0\\ -x^2-y^2+4+2y=0\end{cases}
$$

Sommando membro a membro si ha $2\left(x+y\right)=0$, da cui $y=-x$, che sostituita nella prima equazione dà

$$
\begin{aligned}
2x^2+2x-4&=0\\
x^2+x-2&=0\Rightarrow x=1,x=-2
\end{aligned}
$$

I punti stazionari sono:

$$
\left(1,-1\right),\left(-2,2\right).
$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$
Hf\left(x,y\right)=e^{x-y}\begin{bmatrix} x^2+y^2-2+4x & -x^2-y^2+4-2x+2y\\ -x^2-y^2+4-2x+2y & x^2+y^2-2-4y\end{bmatrix}
$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$
Hf\left(1,-1\right)=e^2\begin{bmatrix}4&-2\\-2&4\end{bmatrix}\text{ definita positiva,}
$$

$$
\left(1,-1\right)\text{ è punto di minimo.}
$$

$$
Hf\left(-2,2\right)=e^{-4}\begin{bmatrix}-2&4\\4&-2\end{bmatrix}\text{ indefinita,}
$$

$$
\left(-2,2\right)\text{ è punto di sella.}
$$

4. Integrali doppi. Sia Ω la lamina materiale (ellittica) descritta da:

$$\Omega = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

avente densità

$$\delta(x,y) = (|x| + |y|) \frac{\mu}{b^3}$$

dove b, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e di una massa, rispettivamente. Calcolare il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse z (cioè all'origine).

$$I = \int\int_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) \delta(x,y)\, dxdy.$$

Passando alle coordinate polari ellittiche

$$\begin{cases} x = 2b\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases} \quad dxdy = 2b^2 \rho d\rho d\theta$$

si ha:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(4b^2\rho^2\cos^2\theta + b^2\rho^2\sin^2\theta\right)\left(|2b\rho\cos\theta| + |b\rho\sin\theta|\right)\frac{\mu}{b^3} 2b^2 \rho d\theta d\rho \\
&= 2\mu b^2 \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\left(2|\cos\theta| + |\sin\theta|\right)d\theta\right) \\
&= 2\mu b^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\left(2\cos\theta + \sin\theta\right)d\theta\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\left(2\cos\theta + \sin\theta\right)d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - 3\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos^2\theta + 1\right)\sin\theta d\theta \\
&= 2\int_0^1 \left(4 - 3t^2\right)dt + \int_0^1 \left(3t^2 + 1\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(9 - 3t^2\right)dt = \left[9t - t^3\right]_0^1 = 8.
\end{aligned}$$

$$I = 2\mu b^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 4 \cdot 8 = \frac{64}{5}\mu b^2.$$

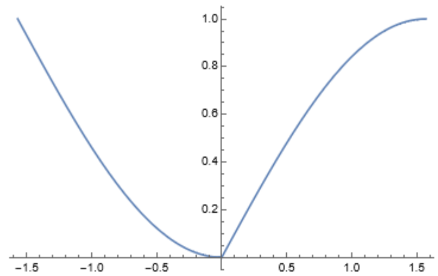
5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione π-periodica definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \sin x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases} \quad .$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire

circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti a_n di Fourier di f (non è richiesto il calcolo dei coefficienti b_n) e semplificare opportunamente l'espressione ottenuta.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.

a.



La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. I coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{n}\right)$.
b. La funzione non è né pari né dispari. Per calcolare gli a_n, poiché $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \cos x) \cos(2nx)\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos(2nx)\, dx \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \cos x)\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - [\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}} \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - 1 + 1 \right\} = 1. \end{aligned}$$

Per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left\{ [\sin(2nx)]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \cos(2nx)\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos(2nx)\, dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \cos(2nx)\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos(2nx)\, dx \right\}. \end{aligned}$$

Sfruttando le identità

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\} \\ \sin\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\} \end{aligned}$$

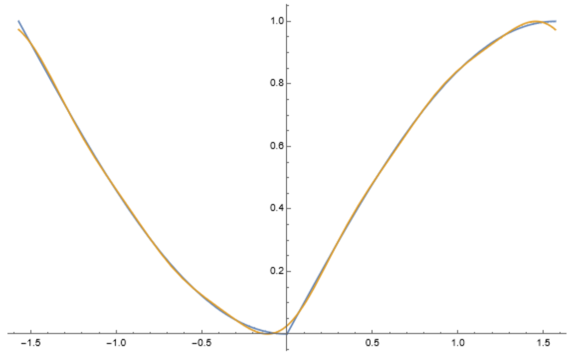
si ha

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \cos(2nx)\, dx &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \{\cos(2n+1)x + \cos(2n-1)x\}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n+1)} + \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n-1)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)} - \frac{(-1)^n}{(2n-1)}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}. \\
\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos(2nx)\, dx &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \{\sin(2n+1)x + \sin(1-2n)x\}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)} + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)}\right]_{0}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)} + \frac{1}{2n+1} + \frac{\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)} - \frac{1}{2n-1}\right] \\
&= -\frac{1}{4n^2-1}.
\end{aligned}
$$

Perciò

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{4n^2-1}. \\
a_0 &= 1.
\end{aligned}
$$

Grafico di $f(x)$ insieme alla sua somma parziale di Fourier fino a $n = 5$:



Analisi Matematica 2. Appello di gennaio 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	7
2	7
3	6
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del second'ordine

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = 5xe^{-2x}.$$

$$\alpha^2 + 6\alpha + 9 = 0$$
$$\alpha = -3.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2 x).$$

Soluzione particolare dell'equazione completa. Osservo che il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea. Perciò in base al metodo di somiglianza, cerco

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= e^{-2x}(Ax + B) \\ \overline{y}'(x) &= e^{-2x}(-2Ax - 2B + A) \\ \overline{y}''(x) &= e^{-2x}(4Ax + 4B - 4A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-2x}\{(4Ax + 4B - 4A) + 6(-2Ax - 2B + A) + 9(Ax + B)\} &= 5xe^{-2x} \\ 4Ax + 4B - 4A - 12Ax - 12B + 6A + 9Ax + 9B &= 5x \\ Ax + B + 2A &= 5x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A = 5 \\ B + 2A = 0 \end{cases} \begin{cases} A = 5 \\ B = -10 \end{cases}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa è allora

$$\overline{y}(x) = e^{-2x}(5x - 10) = 5e^{-2x}(x - 2)$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2 x) + 5e^{-2x}(x - 2).$$

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{e^x x^2 y + y^3 \cos x}{\sqrt{x^2+y^4}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Scriviamo:

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \frac{e^x x^2 |y|}{\sqrt{x^2+y^4}} + \frac{|y|^3 |\cos x|}{\sqrt{x^2+y^4}} \\ &\leq \frac{e^x x^2 |y|}{\sqrt{x^2}} + \frac{|y|^3}{\sqrt{y^4}} = e^x |xy| + |y| \equiv g(x,y). \end{aligned}$$

Poiché $g(x,y)$ è continua e $g(0,0) = 0$, per il teorema del confronto, $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, perciò f è continua.
b.

$$f(x,0) = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$f(0,y) = \frac{y^3}{y^2} = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (0,1)$.
c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$g(x,y) \equiv \frac{f(x,y) - y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Ma:

$$g(x,y) = \frac{e^x x^2 y + y^3 \cos x - y\sqrt{x^2+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^4}}.$$

In particolare,

$$g(x,x) = \frac{e^x x^3 + x^3 \cos x - x\sqrt{x^2+y^4}}{\sqrt{2x^2}\sqrt{x^2+x^4}} \sim \frac{-x|x|}{\sqrt{2}|x||x|} = \frac{-x}{\sqrt{2}|x|} \to \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ per } x \to 0^{\pm}.$$

Poiché $g(x,x)$ non tende a zero, f *non è differenziabile* in $(0,0)$.

3. Integrali tripli. Sia Ω la porzione della sfera di centro l'origine e raggio $R > 0$ contenuta nel primo ottante, ossia:

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}.$$

Calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int_{\Omega} xyz^2 dxdydz.$$

Si raccomanda di riportare con cura l'impostazione del calcolo, oltre che i passaggi successivi.

Usiamo le coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

per cui

$$\Omega = \left\{ (\rho, \phi, \theta) : \rho \in [0, R], \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}, dxdydz = \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$I = \int\int\int_{\Omega} xyz^2 dxdydz = \int_0^R \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho \sin\phi \cos\theta)(\rho \sin\phi \sin\theta)(\rho \cos\phi)^2 d\theta \right) \sin\phi d\phi \right) \rho^2 d\rho$$

$$= \left(\int_0^R \rho^6 d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi \cos^2\phi d\phi \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \right).$$

$$\int_0^R \rho^6 d\rho = \frac{R^7}{7}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi \cos^2\phi d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \left(1 - \cos^2\phi\right) \cos^2\phi d\phi$$

$$= \int_0^1 t^2 \left(1 - t^2\right) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta = \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{R^7}{7} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{R^7}{105}.$$

4. Campi vettoriali. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x,y) = \left(y \log\left(1 + x^2\right) + \frac{2x^2 y}{1 + x^2} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}, x \log\left(1 + x^2\right) + \log\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} + y \right).$$

Dopo aver verificato se è irrotazionale nel suo insieme di definizione, stabilire se è conservativo nel suo insieme di definizione e calcolare in tal caso un potenziale.

Il campo è ben definito in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ed è $\underline{F} \in C^1(\Omega)$. Verifichiamo se è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$.

$$\partial_x F_2 = \log\left(1 + x^2\right) + \frac{2x^2}{1 + x^2} + \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{4xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\partial_y F_1 = \log\left(1 + x^2\right) + \frac{2x^2}{1 + x^2} + 2x \left(\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \right)$$

$$= \log\left(1 + x^2\right) + \frac{2x^2}{1 + x^2} + 2x \left(\frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \right).$$

Poiché

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}&=2x\left(\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\\&=2x\left(\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=2x\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\end{aligned}$$

si ha $\partial_x F_2=\partial_y F_1$ e il campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$. Poiché Ω non è semplicemente connesso, non si può dedurre che F sia conservativo in Ω, cerchiamo un potenziale per vedere se lo è. Cerchiamo $U(x,y)$ tale che:

$$\begin{aligned}U_x=F_1&=y\log\left(1+x^2\right)+\frac{2x^2y}{1+x^2}+\frac{2xy}{x^2+y^2}\\U(x,y)&=\int\left\{y\log\left(1+x^2\right)+\frac{2x^2y}{1+x^2}+\frac{2xy}{x^2+y^2}\right\}dx\\&=y\int\left\{\log\left(1+x^2\right)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right\}dx+y\log\left(x^2+y^2\right).\end{aligned}$$

Ora:

$$\int\log\left(1+x^2\right)dx=x\log\left(1+x^2\right)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$$

perciò

$$y\int\left\{\log\left(1+x^2\right)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right\}dx=xy\log\left(1+x^2\right)+f(y)$$

e

$$U(x,y)=xy\log\left(1+x^2\right)+y\log\left(x^2+y^2\right)+f(y).$$

$$\begin{aligned}U_y&=x\log\left(1+x^2\right)+\log\left(x^2+y^2\right)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+f'(y)\\&=F_2=x\log\left(1+x^2\right)+\log\left(x^2+y^2\right)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+y,\\f'(y)&=y\\f(y)&=\frac{1}{2}y^2\\U(x,y)&=xy\log\left(1+x^2\right)+y\log\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{2}y^2\end{aligned}$$

perciò abbiamo determinato un potenziale in Ω, in particolare $\underline{F}$ è conservativo in Ω.

5. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ che nel piano xz ha equazione polare:

$$\gamma:\rho=\sqrt{\cos\theta},\quad\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

a. Stabilire se la curva γ è regolare, o regolare a tratti, se è chiusa o aperta, scrivere le sue equazioni parametriche e il suo elemento di lunghezza ds.

b. Scrivere le equazioni parametriche di Σ, stabilire se è una superficie regolare, o determinare in caso negativo i suoi punti singolari; determinare l'elemento d'area dS e calcolare l'area di Σ.

a.

$$\rho = \sqrt{\cos\theta}; \rho' = -\frac{\sin\theta}{2\sqrt{\cos\theta}}$$
$$\rho^2 + (\rho')^2 = \cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{4\cos\theta} = \frac{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}{4\cos\theta}$$
$$ds = \sqrt{\frac{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}{4\cos\theta}}d\theta$$

γ è regolare a tratti, con punti singolari per $\cos\theta = 0$, quindi l'origine.

$$\gamma : \begin{cases} x = a(\theta) = (\cos\theta)^{3/2} \\ z = b(\theta) = \sqrt{\cos\theta}\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

La curva è chiusa, $\underline{r}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,0)$.
b.

$$\Sigma : \begin{cases} x = (\cos\theta)^{3/2}\cos\phi \\ y = (\cos\theta)^{3/2}\sin\phi \\ z = \sqrt{\cos\theta}\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \phi \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} dS &= |a(\theta)| \sqrt{a'(\theta)^2 + b'(\theta)^2} d\theta d\phi \\ &= |a(\theta)| \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho')^2(\theta)} d\theta d\phi \\ &= (\cos\theta)^{3/2} \sqrt{\frac{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}{4\cos\theta}} d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{2}\cos\theta\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta d\phi \end{aligned}$$

La superficie è regolare tranne per $\cos\theta = 0$ che dà l'orgine, punto singolare.

$$\begin{aligned}
|\Sigma| &= \int\int_{\Sigma} dS = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos\theta\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta\right)d\phi \\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sqrt{4-3\sin^2\theta}d\theta \\
&[\sin\theta = t] \\
&= 2\pi\int_0^1\sqrt{4-3t^2}dt \\
&\left[t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin u; 4-3t^2 = 4\left(1-\sin^2 u\right) = 4\cos^2 u; dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos u du\right] \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cos u\frac{2}{\sqrt{3}}\cos u du = \frac{8}{\sqrt{3}}\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 u du \\
&= \frac{8}{\sqrt{3}}\pi\left[\frac{\cos u\sin u + u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \pi\left(1+\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi\right).
\end{aligned}$$

Analisi Matematica 2. Esame integrativo di 2 crediti
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)________________________________
codice persona (o n°di matricola)________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xe^{3y}}{1+x^2} \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = 5xe^{-2x}.$$

3. Serie di Fourier. Si consideri la funzione π-periodica definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \sin x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases} .$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti a_n di Fourier di f (non è richiesto il calcolo dei coefficienti b_n) e semplificare opportunamente l'espressione ottenuta.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.

Analisi Matematica 2. Esame integrativo di 2 crediti
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	
2	
3	
Tot.	

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xe^{3y}}{1+x^2} \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione a variabili separabili. Non ci sono soluzioni costanti. Risolviamo:

$$\int e^{-3y} dy = \int \frac{xdx}{1+x^2}$$
$$-\frac{1}{3}e^{-3y} = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{3}$:

$$-\frac{1}{3}e^{-1} = c$$
$$c = -\frac{1}{3e}$$

e la soluzione del problema è definita da

$$-\frac{1}{3}e^{-3y} = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) - \frac{1}{3e}$$
$$e^{-3y} = -\frac{3}{2}\log\left(1+x^2\right) + \frac{1}{e}$$
$$y = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{e} - \frac{3}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)$$

Poiché x deve variare in un intorno di 0 e dev'essere

$$\frac{1}{e} - \frac{3}{2}\log\left(1+x^2\right) > 0$$
$$\log\left(1+x^2\right) < \frac{2}{3e}$$
$$x^2 < e^{\left(\frac{2}{3e}\right)} - 1$$
$$-\sqrt{e^{\left(\frac{2}{3e}\right)} - 1} < x < \sqrt{e^{\left(\frac{2}{3e}\right)} - 1}$$

Questo è l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = 5xe^{-2x}.$$

$$\alpha^2 + 6\alpha + 9 = 0$$
$$\alpha = -3.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2 x).$$

Soluzione particolare dell'equazione completa. Osservo che il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea. Perciò in base al metodo di somiglianza, cerco

$$\begin{aligned}
\overline{y}(x) &= e^{-2x}(Ax + B) \\
\overline{y}'(x) &= e^{-2x}(-2Ax - 2B + A) \\
\overline{y}''(x) &= e^{-2x}(4Ax + 4B - 4A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{-2x}\{(4Ax + 4B - 4A) + 6(-2Ax - 2B + A) + 9(Ax + B)\} &= 5xe^{-2x} \\
4Ax + 4B - 4A - 12Ax - 12B + 6A + 9Ax + 9B &= 5x \\
Ax + B + 2A &= 5x
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A = 5 \\ B + 2A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5 \\ B = -10 \end{cases}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa è allora

$$\overline{y}(x) = e^{-2x}(5x - 10) = 5e^{-2x}(x - 2)$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2 x) + 5e^{-2x}(x - 2).$$

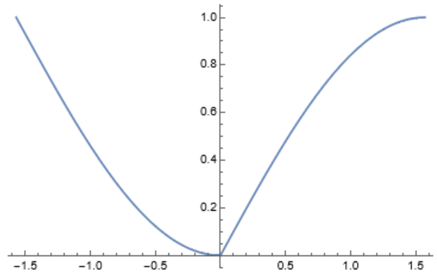
3. Serie di Fourier. Si consideri la funzione π-periodica definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \sin x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}.$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti a_n di Fourier di f (non è richiesto il calcolo dei coefficienti b_n) e semplificare opportunamente l'espressione ottenuta.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.

a.



La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. I coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{n}\right)$.
b. La funzione non è né pari né dispari. Per calcolare gli a_n, poiché $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos x)\cos(2nx)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(2nx)\,dx\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx\right\} \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - 1 + 1\right\} = 1. \end{aligned}$$

Per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left\{[\sin(2nx)]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\cos(2nx)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(2nx)\,dx\right\} \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\cos(2nx)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(2nx)\,dx\right\}. \end{aligned}$$

Sfruttando le identità

$$\begin{aligned} \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\} \\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\} \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \cos(2nx)\, dx &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \{\cos(2n+1)x + \cos(2n-1)x\}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n+1)} + \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n-1)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)} - \frac{(-1)^n}{(2n-1)}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos(2nx)\, dx &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \{\sin(2n+1)x + \sin(1-2n)x\}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)} + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)}\right]_{0}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)} + \frac{1}{2n+1} + \frac{\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)} - \frac{1}{2n-1}\right] \\
&= -\frac{1}{4n^2-1}.
\end{aligned}$$

Perciò

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{4n^2-1}.$$
$$a_0 = 1.$$

Grafico di $f(x)$ insieme alla sua somma parziale di Fourier fino a $n = 5$: