Recupero sulla prima prova in itinere
di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y\sin^2 x = xe^{\frac{\sin(2x)}{4}} \\ y(\pi) = 2\pi \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' + y = e^{-x}\sin 2x$$

semplificando l'espressione ottenuta. Per la ricerca di una soluzione particolare della completa, si richiede di utilizzare il metodo dell'esponenziale complesso.

3. Curve e integrali di linea
Si consideri la linea materiale piana γ (catenaria), omogenea, di massa m, avente nel piano xy equazione cartesiana

$$y = r\,\mathrm{Ch}\left(\frac{x}{r}\right) \text{ per } x \in [-r, r]$$

(dove $r > 0$ è una costante avente le dimensioni di una lunghezza). Calcolare il suo elemento d'arco, la sua lunghezza e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse y. Riportare con cura l'impostazione e scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{|x| \log(1+x+y^3)}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0)\,,\ f(0,0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 + 4y^2 - 1\right).$$

Recupero sulla seconda prova in itinere
di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Integrali doppi. Sia Ω la lamina piana omogenea di massa m a forma di parallelogramma di vertici $(0,0),(1,1),(3,0),(4,1)$. Calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'origine (cioè rispetto all'asse z). Si raccomanda di fare una figura e riportare l'impostazione analitica, in particolare la rappresentazione analitica di Ω.

2. Integrali tripli. Sia Ω il solido tridimensionale non omogeneo descritto dalla corona sferica di centro l'origine e raggi R e $2R$, avente densità:

$$\delta(x,y,z)=\frac{\mu}{R^3}\left(1+\frac{|xy|\,z^2}{R^4}\right),$$

dove R,μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente. Calcolare la massa totale dell'oggetto.

3. Campi vettoriali. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z)=(y,z,x)$$

lungo l'arco di curva γ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}(t)=(rt\cos t, r\sin t, ht),\ t\in[0,2\pi]$$

dove r,h sono costanti positive.

4. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ che nel piano xz ha equazione polare:

$$\gamma : \rho = R\, e^{\theta}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

a. Scrivere le equazioni parametriche di γ.
b. Scrivere le equazioni parametriche di Σ determinare l'elemento d'area dS, stabilire se è una superficie regolare, o determinare in caso negativo i suoi punti singolari. Calcolare l'area di Σ.

5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione π-periodica definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi}x & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \cos x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases} .$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti a_n di Fourier di f (non è richiesto il calcolo dei coefficienti b_n) e semplificare opportunamente l'espressione ottenuta.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.

Analisi Matematica 2. Appello di gennaio 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)________________________________
codice persona (o n°di matricola)________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____________________________________

1. Equazioni differenziali del prim'ordine. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y\sin^2 x = xe^{\frac{\sin(2x)}{4}} \\ y(\pi) = 2\pi \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{|x|\log(1+x+y^3)}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0), \ f(0,0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

3. Integrali doppi. Sia Ω la lamina piana omogenea di massa m a forma di parallelogramma di vertici $(0,0), (1,1), (3,0), (4,1)$. Calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'origine (cioè rispetto all'asse z). Si raccomanda di fare una figura e riportare l'impostazione analitica, in particolare la rappresentazione analitica di Ω.

4. Campi vettoriali. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x, y, z) = (y, z, x)$$

lungo l'arco di curva γ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}(t) = (rt\cos t, r\sin t, ht), t \in [0, 2\pi]$$

dove r, h sono costanti positive.

5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione π-periodica definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi}x & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \cos x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}.$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti a_n di Fourier di f (non è richiesto il calcolo dei coefficienti b_n) e semplificare opportunamente l'espressione ottenuta.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.

Analisi Matematica 2. Appello di gennaio 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' + y = e^{-x} \sin 2x$$

semplificando l'espressione ottenuta. Per la ricerca di una soluzione particolare della completa, si richiede di utilizzare il metodo dell'esponenziale complesso.

2. Curve e integrali di linea
Si consideri la linea materiale piana γ (catenaria), omogenea, di massa m, avente nel piano xy equazione cartesiana

$$y = r \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right) \text{ per } x \in [-r, r]$$

(dove $r > 0$ è una costante avente le dimensioni di una lunghezza). Calcolare il suo elemento d'arco, la sua lunghezza e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse y. Riportare con cura l'impostazione e scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.

3. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 + 4y^2 - 1\right).$$

4. Integrali tripli. Sia Ω il solido tridimensionale non omogeneo descritto dalla corona sferica di centro l'origine e raggi R e $2R$, avente densità:

$$\delta(x,y,z) = \frac{\mu}{R^3}\left(1 + \frac{|xy|\, z^2}{R^4}\right),$$

dove R, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente. Calcolare la massa totale dell'oggetto.

5. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ che nel piano xz ha equazione polare:

$$\gamma : \rho = R\, e^{\theta}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

a. Scrivere le equazioni parametriche di γ.
b. Scrivere le equazioni parametriche di Σ determinare l'elemento d'area dS, stabilire se è una superficie regolare, o determinare in caso negativo i suoi punti singolari. Calcolare l'area di Σ.

Recupero sulla prima prova in itinere
di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y\sin^2 x = xe^{\frac{\sin(2x)}{4}} \\ y(\pi) = 2\pi \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare, coefficienti continui su tutto $\mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy sarà definita su tutto $\mathbb{R}$.
$a(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
$A(x) = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)$.
Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)}\left\{c + \int e^{\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)} xe^{\frac{\sin(2x)}{4}} dx\right\} \\ &= e^{-\frac{x}{2}} e^{\frac{\sin 2x}{2}}\left\{c + \int xe^{\frac{x}{2}} dx\right\}. \end{aligned}$$

$$\int xe^{\frac{x}{2}} dx = (\ldots) = e^{\frac{x}{2}}(2x-4)$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\frac{x}{2}} e^{\frac{\sin 2x}{2}}\left\{c + e^{\frac{x}{2}}(2x-4)\right\} \\ &= ce^{-\frac{x}{2}} e^{\frac{\sin 2x}{2}} + e^{\frac{\sin 2x}{2}}(2x-4). \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(\pi) = 2\pi$ e abbiamo

$$\begin{aligned} 2\pi &= ce^{-\frac{\pi}{2}} + (2\pi - 4) \\ c &= 4e^{\frac{\pi}{2}} \\ y(x) &= 4e^{\frac{\pi-x}{2}} e^{\frac{\sin 2x}{2}} + e^{\frac{\sin 2x}{2}}(2x-4) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' + y = e^{-x}\sin 2x$$

semplificando l'espressione ottenuta. Per la ricerca di una soluzione particolare della completa, si richiede di utilizzare il metodo dell'esponenziale complesso.

Equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$
$$\alpha = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

Metodo di somiglianza. Notiamo che il termine noto *non è* soluzione dell'omogenea. Poiché

$$e^{-x}\sin 2x = \operatorname{Im}\left(e^{x(-1+2i)}\right),$$

cerchiamo prima una soluzione particolare dell'equazione

$$w'' + w' + w = e^{x(-1+2i)},$$

del tipo

$$\begin{aligned}\overline{w}(x) &= Ae^{x(-1+2i)} \\ \overline{w}'(x) &= A(-1+2i)\,e^{x(-1+2i)} \\ \overline{w}''(x) &= A(-1+2i)^2\,e^{x(-1+2i)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Ae^{x(-1+2i)}\left\{(-1+2i)^2 + (-1+2i) + 1\right\} &= e^{x(-1+2i)} \\ A\{-3-4i-1+2i+1\} &= 1 \\ A\{-3-2i\} &= 1 \\ A = -\frac{1}{3+2i} = -\frac{(3-2i)}{9+4} &= \frac{1}{13}(-3+2i)\end{aligned}$$

$$\overline{w}(x) = \frac{1}{13}(-3+2i)\,e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

Perciò una soluzione particolare dell'equazione completa di partenza è:

$$\begin{aligned}\overline{y}(x) = \operatorname{Im}\overline{w}(x) &= \operatorname{Im}\left[\frac{1}{13}(-3+2i)\,e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)\right] \\ &= \frac{1}{13}e^{-x}(2\cos 2x - 3\sin 2x)\end{aligned}$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \frac{1}{13}e^{-x}(2\cos 2x - 3\sin 2x).$$

3. Curve e integrali di linea

Si consideri la linea materiale piana γ (catenaria), omogenea, di massa m, avente nel piano xy equazione cartesiana

$$y = r \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right) \text{ per } x \in [-r, r]$$

(dove $r > 0$ è una costante avente le dimensioni di una lunghezza). Calcolare il suo elemento d'arco, la sua lunghezza e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse y. Riportare con cura l'impostazione e scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.

Posto $f(x) = r \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right)$, si ha: $f'(x) = \operatorname{Sh}\left(\frac{x}{r}\right)$

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2\left(\frac{x}{r}\right)}dx = \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right) dx.$$

Lunghezza:

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_{-r}^{r} \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right) dx = 2 \int_0^r \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right) dx \\ &= 2\left[r \operatorname{Sh}\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r = 2r \operatorname{Sh} 1. \end{aligned}$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse y:

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{m}{l(\gamma)} \int_\gamma x^2 ds = \frac{m}{2r \operatorname{Sh} 1} \int_{-r}^{r} x^2 \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right) dx \\ &= \frac{m}{r \operatorname{Sh} 1} \int_0^r x^2 \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right) dx \\ &(x = rt; dx = rdt; t \in [0,1]) \\ &= \frac{m}{r \operatorname{Sh} 1} \int_0^1 r^2 t^2 \operatorname{Ch} t r dt = \frac{mr^2}{\operatorname{Sh} 1} \int_0^1 t^2 \operatorname{Ch} t dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 \operatorname{Ch} t dt &= \left[t^2 \operatorname{Sh} t\right]_0^1 - \int_0^1 2t \operatorname{Sh} t dt \\ &= \operatorname{Sh} 1 - 2\left\{[t \operatorname{Ch} t]_0^1 - \int_0^1 \operatorname{Ch} t dt\right\} \\ &= \operatorname{Sh} 1 - 2\{\operatorname{Ch} 1 - \operatorname{Sh} 1\} = 3 \operatorname{Sh} 1 - 2 \operatorname{Ch} 1. \end{aligned}$$

$$I_y = mr^2 \left(\frac{3 \operatorname{Sh} 1 - 2 \operatorname{Ch} 1}{\operatorname{Sh} 1}\right) = mr^2 (3 - 2 \operatorname{Coth} 1) \simeq 0.37mr^2.$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{|x| \log(1 + x + y^3)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0), \ f(0,0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Scriviamo:

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \left|\log\left(1+x+y^3\right)\right| \leq \left|\log\left(1+x+y^3\right)\right| \equiv g(x,y).$$

Poiché $g(x,y)$ è continua in un intorno dell'origine e $g(0,0)=0$, per il teorema del confronto, $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, perciò f è continua.
b.

$$f(x,0) = \frac{|x|\log(1+x)}{|x|} = \log(1+x), \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$f(0,y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (1,0)$.
c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$g(x,y) \equiv \frac{f(x,y)-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Ma:

$$g(x,y) = \frac{|x|\log(1+x+y^3) - x\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}.$$

In particolare,

$$g(x,x) = \frac{|x|\log(1+x+x^3) - x\sqrt{2x^2}}{2x^2} = \frac{|x|\left(\log(1+x+x^3) - x\sqrt{2}\right)}{2x^2}$$
$$= \frac{\log(1+x+x^3) - x\sqrt{2}}{2|x|} \sim \frac{x\left(1-\sqrt{2}\right)}{|x|} \to \mp\left(\sqrt{2}-1\right) \text{ per } x \to 0^{\pm}.$$

Poiché $g(x,x)$ non tende a zero, f *non è differenziabile* in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2-y^2\right)\left(x^2+4y^2-1\right).$$

$$\begin{cases} f_x = 2x(x^2+4y^2-1) + 2x(x^2-y^2) = 2x(2x^2+3y^2-1) = 0 \\ f_y = -2y(x^2+4y^2-1) + 8y(x^2-y^2) = 2y(3x^2-8y^2+1) = 0 \end{cases}$$

Se nella prima $x=0$ allora la seconda dà $2y(-8y^2+1)=0$, quindi $y=0$ o $y=\pm 1/2\sqrt{2}$.
Se nella seconda $y=0$ allora la prima dà $2x(2x^2-1)=0$, quindi $x=0$ o $x=\pm 1/\sqrt{2}$.

Se $xy \neq 0$ allora il sistema è

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \\ 3x^2 - 8y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

e sommando membro a membro si ha: $5x^2 - 5y^2 = 0$, cioè $y = \pm x$, che dà $5x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1/\sqrt{5}$, e rispettivamente $y = \mp 1/\sqrt{5}$.
I punti stazionari sono:

$$(0,0)\,, \left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$Hf\,(x,y) = 2\begin{bmatrix} 6x^2 + 3y^2 - 1 & 6xy \\ 6xy & 3x^2 - 24y^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf\,(0,0) = 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$
$$(0,0) \text{ è punto di sella.}$$

$$Hf\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 2\begin{bmatrix} -\frac{5}{8} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ definita negativa,}$$
$$\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \text{ sono punti di massimo.}$$

$$Hf\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$
$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ sono punti di minimo.}$$

$$Hf\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{16}{5} \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$
$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ sono punti di sella.}$$

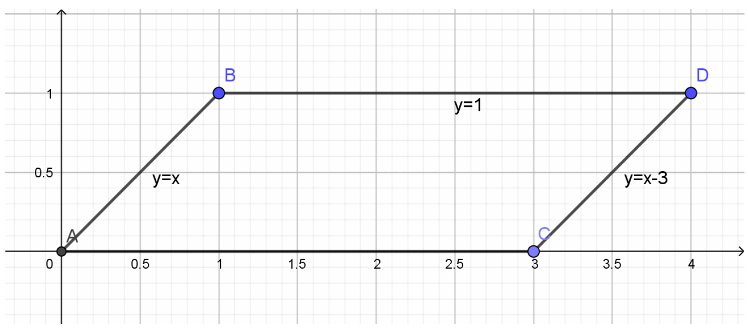
Recupero sulla seconda prova in itinere
di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Integrali doppi. Sia Ω la lamina piana omogenea di massa m a forma di parallelogramma di vertici $(0,0),(1,1),(3,0),(4,1)$. Calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'origine (cioè rispetto all'asse z). Si raccomanda di fare una figura e riportare l'impostazione analitica, in particolare la rappresentazione analitica di Ω.

Il parallelogramma ha base 3 e altezza 1, quindi area $|\Omega| = 3$. Ω si può rappresentare come unione di tre domini y-semplici al modo seguente:

$$\begin{aligned}\Omega = &\{(x,y) : x \in [0,1], y \in [0,x]\} \cup \{(x,y) : x \in [1,3], y \in [0,1]\}\\ &\cup \{(x,y) : x \in [3,4], y \in [x-3,1]\}.\end{aligned}$$



Perciò:

$$\begin{aligned}I &= \frac{m}{|\Omega|}\int\int_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdy\\
&= \frac{m}{3}\left\{\int_0^1\left(\int_0^x\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx + \int_1^3\left(\int_0^1\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx + \int_3^4\left(\int_{x-3}^1\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx\right\}\\
&= \frac{m}{3}\left\{\int_0^1\left(x^3+\frac{x^3}{3}\right)dx + \int_1^3\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx + \int_3^4\left(x^2(1-x+3)+\frac{1-(x-3)^3}{3}\right)dx\right\}\\
&= \frac{m}{3}\left\{\left[\frac{4}{3}\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}\right]_1^3 + \left[\frac{4}{3}x^3-\frac{x^4}{4}+\frac{1}{3}x-\frac{(x-3)^4}{12}\right]_3^4\right\}\\
&= \frac{m}{3}\left\{\frac{1}{3}+\frac{28}{3}+\frac{35}{6}\right\} = \frac{m}{3}\left\{\frac{31}{2}\right\} = \frac{31}{6}m.\end{aligned}$$

2. Integrali tripli. Sia Ω il solido tridimensionale non omogeneo descritto dalla corona sferica di centro l'origine e raggi R e $2R$, avente densità:

$$\delta(x,y,z) = \frac{\mu}{R^3}\left(1+\frac{|xy|\,z^2}{R^4}\right),$$

dove R, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente. Calcolare la massa totale dell'oggetto.

$$|\Omega| = \frac{4}{3}\pi\left((2R)^3 - R^3\right) = \frac{28}{3}\pi R^3.$$

$$\begin{aligned} m &= \int\int\int_{\Omega} \delta(x,y,z)\, dxdydz = \frac{\mu}{R^3}\int\int\int_{\Omega}\left(1 + \frac{|xy|\, z^2}{R^4}\right) dxdydz \\ &= \frac{\mu}{R^3}\left(|\Omega| + \int\int\int_{\Omega}\frac{|xy|\, z^2}{R^4} dxdydz\right) = \frac{\mu}{R^3}\left(\frac{28}{3}\pi R^3 + \int\int\int_{\Omega}\frac{|xy|\, z^2}{R^4} dxdydz\right). \end{aligned}$$

Usiamo le coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

per cui

$$\Omega = \{(\rho,\phi,\theta) : \rho \in [R, 2R], \phi \in [0,\pi], \theta \in [0, 2\pi]\}, dxdydz = \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\begin{aligned} \int\int\int_{\Omega}\frac{|xy|\, z^2}{R^4} dxdydz &= \frac{1}{R^4}\int_R^{2R}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\rho^2\sin^2\phi\,|\cos\theta\sin\theta|\,\rho^2\cos^2\phi d\theta\right)\sin\phi d\phi\right)\rho^2 d\rho \\ &= \frac{1}{R^4}\left(\int_R^{2R}\rho^6 d\rho\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^3\phi\cos^2\phi d\phi\right)\left(\int_0^{2\pi}|\cos\theta\sin\theta|\, d\theta\right). \end{aligned}$$

$$\int_R^{2R}\rho^6 d\rho = \left[\frac{\rho^7}{7}\right]_R^{2R} = \frac{R^7}{7}\left(2^7 - 1\right) = \frac{127}{7}R^7.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi}\sin^3\phi\cos^2\phi d\phi &= \int_0^{\pi}\sin\phi\left(1 - \cos^2\phi\right)\cos^2\phi d\phi \\ (\cos\phi = t) &= \int_{-1}^{1} t^2\left(1 - t^2\right) dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi}|\cos\theta\sin\theta|\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta = 4\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

$$\int\int\int_{\Omega}\frac{|xy|\, z^2}{R^4} dxdydz = \frac{1}{R^4}\frac{127}{7}R^7\cdot\frac{4}{15}\cdot 2.$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{\mu}{R^3}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 + \int\int\int_{\Omega}\frac{|xy|\, z^2}{R^4} dxdydz\right) \\ &= \frac{\mu}{R^3}\left(\frac{28}{3}\pi R^3 + \frac{127}{7}R^3\frac{8}{15}\right) \\ &= 4\mu\left(\frac{7}{3}\pi + \frac{254}{105}\right). \end{aligned}$$

3. Campi vettoriali. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x, y, z) = (y, z, x)$$

lungo l'arco di curva γ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}(t) = (rt\cos t, r\sin t, ht), t \in [0, 2\pi]$$

dove r, h sono costanti positive.

$$\begin{aligned}
\underline{r}(t) &= (rt\cos t, r\sin t, ht) \\
\underline{r}'(t) &= (r\cos t - rt\sin t, r\cos t, h) \\
\underline{F}(x, y, z) &= (y, z, x) \\
\underline{F}(\underline{r}(t)) &= (r\sin t, ht, rt\cos t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (r\sin t, ht, rt\cos t) \cdot (r\cos t - rt\sin t, r\cos t, h)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(r^2\cos t\sin t - r^2 t\sin^2 t + hrt\cos t + hrt\cos t\right) dt \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} \cos t\sin t dt + r\int_0^{2\pi} t\left(-r\sin^2 t + 2h\cos t\right) dt \\
&= r^2 \cdot 0 + r\int_0^{2\pi} t\left(-r\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) + 2h\cos t\right) dt \\
&= r\left\{\left[t\left(-r\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right) + 2h\sin t\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(-r\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right) + 2h\sin t\right) dt\right\} \\
&= r\left\{-2\pi^2 r - \left[-r\left(\frac{t^2}{4} + \frac{\cos(2t)}{8}\right) - 2h\cos t\right]_0^{2\pi}\right\} \\
&= r\left\{-2\pi^2 r + r\pi^2\right\} = -\pi^2 r^2.
\end{aligned}$$

4. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ che nel piano xz ha equazione polare:

$$\gamma : \rho = R\, e^\theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

a. Scrivere le equazioni parametriche di γ.
b. Scrivere le equazioni parametriche di Σ determinare l'elemento d'area dS, stabilire se è una superficie regolare, o determinare in caso negativo i suoi punti singolari. Calcolare l'area di Σ.

a. Equazione polare di γ: $\rho = R\,e^{\theta}$; equazioni parametriche di γ:

$$\gamma : \begin{cases} x = a(\theta) = R\,e^{\theta}\cos\theta \\ z = b(\theta) = R\,e^{\theta}\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

b.

$$\Sigma : \begin{cases} x = R\,e^{\theta}\cos\theta\cos\phi \\ y = R\,e^{\theta}\cos\theta\sin\phi \\ z = R\,e^{\theta}\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \phi \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} dS &= |a(\theta)| \sqrt{a'(\theta)^2 + b'(\theta)^2}\,d\theta d\phi \\ &= |a(\theta)| \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho')^2(\theta)}\,d\theta d\phi \\ &= R\,e^{\theta}\cos\theta \sqrt{2\left(R\,e^{\theta}\right)^2}\,d\theta d\phi \\ &= \sqrt{2}R^2 e^{2\theta}\cos\theta\, d\theta d\phi \end{aligned}$$

La superficie è regolare tranne per $\theta = \frac{\pi}{2}$ che dà il punto singolare $\left(0, 0, R\,e^{\pi/2}\right)$.

$$\begin{aligned} |\Sigma| &= \int\int_{\Sigma} dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}R^2 e^{2\theta}\cos\theta\, d\theta \right) d\phi \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{2}R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\theta}\cos\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

$$\int e^{2\theta}\cos\theta\, d\theta = (...) = \frac{1}{5}e^{2\theta}(2\cos\theta + \sin\theta)$$

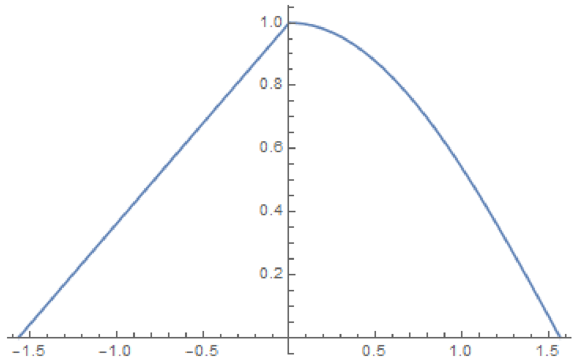
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\theta}\cos\theta\, d\theta = \left[\frac{1}{5}e^{2\theta}(2\cos\theta + \sin\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 2)$$

$$|\Sigma| = \frac{2}{5}\sqrt{2}\left(e^{\pi} - 2\right)\pi R^2$$

5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione π-periodica definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi}x & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \cos x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases} \quad .$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti a_n di Fourier di f (non è richiesto il calcolo dei coefficienti b_n) e semplificare opportunamente l'espressione ottenuta.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.



a. La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. I coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{n}\right)$.
b. La funzione non è né pari né dispari. Per calcolare gli a_n, poiché $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(1 + \frac{2}{\pi} x\right) \cos(2nx)\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(2nx)\, dx \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(1 + \frac{2}{\pi} x\right) dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 1 \right\} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Per $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(2nx)\, dx + \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x \cos(2nx)\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(2nx)\, dx \right\}.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(2nx)\, dx = \left[\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{-\pi/2}^{0} = 0;$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x \cos(2nx)\, dx = \left[x \frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{-\pi/2}^{0} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin(2nx)}{2n} dx = \left[\frac{\cos(2nx)}{(2n)^2}\right]_{-\pi/2}^{0} = \frac{1 - \cos(n\pi)}{4n^2}$$

Sfruttando le identità

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \left\{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right\}$$

si ha

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(2nx)\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos(2n+1)x + \cos(2n-1)x\}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n+1)} + \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n-1)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)} - \frac{(-1)^n}{(2n-1)}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}.
\end{aligned}
$$

Perciò

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1-\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{4n^2-1}. \\
a_0 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Analisi Matematica 2. Appello di gennaio 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y\sin^2 x = xe^{\frac{\sin(2x)}{4}} \\ y(\pi) = 2\pi \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare, coefficienti continui su tutto $\mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy sarà definita su tutto $\mathbb{R}$.
$a(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
$A(x) = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)$.
Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)} \left\{ c + \int e^{\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)} xe^{\frac{\sin(2x)}{4}} dx \right\} \\ &= e^{-\frac{x}{2}} e^{\frac{\sin 2x}{2}} \left\{ c + \int xe^{\frac{x}{2}} dx \right\}. \end{aligned}$$

$$\int xe^{\frac{x}{2}} dx = (...) = e^{\frac{x}{2}}(2x-4)$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\frac{x}{2}} e^{\frac{\sin 2x}{2}} \left\{ c + e^{\frac{x}{2}}(2x-4) \right\} \\ &= ce^{-\frac{x}{2}} e^{\frac{\sin 2x}{2}} + e^{\frac{\sin 2x}{2}}(2x-4). \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(\pi) = 2\pi$ e abbiamo

$$\begin{aligned} 2\pi &= ce^{-\frac{\pi}{2}} + (2\pi - 4) \\ c &= 4e^{\frac{\pi}{2}} \\ y(x) &= 4e^{\frac{\pi-x}{2}} e^{\frac{\sin 2x}{2}} + e^{\frac{\sin 2x}{2}}(2x-4) \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{|x| \log(1 + x + y^3)}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Scriviamo:

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \left|\log\left(1+x+y^3\right)\right| \leq \left|\log\left(1+x+y^3\right)\right| \equiv g(x,y).$$

Poiché $g(x,y)$ è continua in un intorno dell'origine e $g(0,0)=0$, per il teorema del confronto, $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, perciò f è continua.
b.

$$f(x,0) = \frac{|x|\log(1+x)}{|x|} = \log(1+x), \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$f(0,y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (1,0)$.
c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$g(x,y) \equiv \frac{f(x,y)-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Ma:

$$g(x,y) = \frac{|x|\log(1+x+y^3) - x\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}.$$

In particolare,

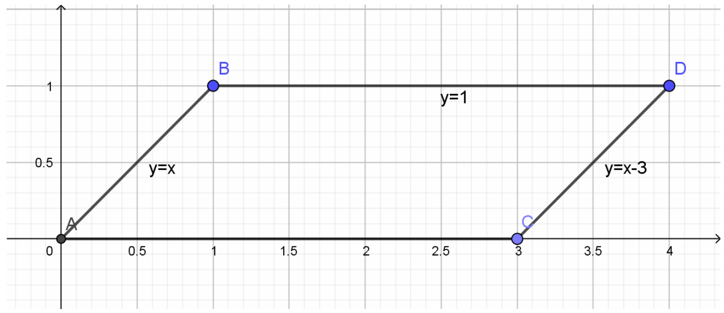
$$\begin{aligned} g(x,x) &= \frac{|x|\log(1+x+x^3) - x\sqrt{2x^2}}{2x^2} = \frac{|x|\left(\log(1+x+x^3) - x\sqrt{2}\right)}{2x^2} \\ &= \frac{\log(1+x+x^3) - x\sqrt{2}}{2|x|} \sim \frac{x\left(1-\sqrt{2}\right)}{|x|} \to \mp\left(\sqrt{2}-1\right) \text{ per } x \to 0^{\pm}. \end{aligned}$$

Poiché $g(x,x)$ non tende a zero, f *non è differenziabile* in $(0,0)$.

3. Integrali doppi. Sia Ω la lamina piana omogenea di massa m a forma di parallelogramma di vertici $(0,0),(1,1),(3,0),(4,1)$. Calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'origine (cioè rispetto all'asse z). Si raccomanda di fare una figura e riportare l'impostazione analitica, in particolare la rappresentazione analitica di Ω.

Il parallelogramma ha base 3 e altezza 1, quindi area $|\Omega| = 3$. Ω si può rappresentare come unione di tre domini y-semplici al modo seguente:

$$\begin{aligned} \Omega = &\{(x,y) : x \in [0,1], y \in [0,x]\} \cup \{(x,y) : x \in [1,3], y \in [0,1]\} \\ &\cup \{(x,y) : x \in [3,4], y \in [0,x-3]\}. \end{aligned}$$



Perciò:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{m}{|\Omega|} \int \int_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) dxdy \\
&= \frac{m}{3} \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^x \left(x^2 + y^2\right) dy \right) dx + \int_1^3 \left(\int_0^1 \left(x^2 + y^2\right) dy \right) dx + \int_3^4 \left(\int_{x-3}^1 \left(x^2 + y^2\right) dy \right) dx \right\} \\
&= \frac{m}{3} \left\{ \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx + \int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx + \int_3^4 \left(x^2 \left(1 - x + 3\right) + \frac{1 - (x-3)^3}{3} \right) dx \right\} \\
&= \frac{m}{3} \left\{ \left[\frac{4}{3} \frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_1^3 + \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3} x - \frac{(x-3)^4}{12} \right]_3^4 \right\} \\
&= \frac{m}{3} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{28}{3} + \frac{35}{6} \right\} = \frac{m}{3} \left\{ \frac{31}{2} \right\} = \frac{31}{6} m.
\end{aligned}
$$

4. Campi vettoriali. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x, y, z) = (y, z, x)$$

lungo l'arco di curva γ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}(t) = (rt \cos t, r \sin t, ht), t \in [0, 2\pi]$$

dove r, h sono costanti positive.

$$
\begin{aligned}
\underline{r}(t) &= (rt \cos t, r \sin t, ht) \\
\underline{r}'(t) &= (r \cos t - rt \sin t, r \cos t, h) \\
\underline{F}(x, y, z) &= (y, z, x) \\
\underline{F}(\underline{r}(t)) &= (r \sin t, ht, rt \cos t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{F}\left(\underline{r}(t)\right) \cdot \underline{r}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (r\sin t, ht, rt\cos t) \cdot (r\cos t - rt\sin t, r\cos t, h)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(r^2 \cos t \sin t - r^2 t \sin^2 t + hrt\cos t + hrt\cos t\right) dt \\
&= r^2 \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt + r \int_0^{2\pi} t\left(-r\sin^2 t + 2h\cos t\right) dt \\
&= r^2 \cdot 0 + r\int_0^{2\pi} t\left(-r\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) + 2h\cos t\right) dt \\
&= r\left\{\left[t\left(-r\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right) + 2h\sin t\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \left(-r\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right) + 2h\sin t\right) dt\right\} \\
&= r\left\{-2\pi^2 r - \left[-r\left(\frac{t^2}{4} + \frac{\cos(2t)}{8}\right) - 2h\cos t\right]_0^{2\pi}\right\} \\
&= r\left\{-2\pi^2 r + r\pi^2\right\} = -\pi^2 r^2.
\end{aligned}
$$

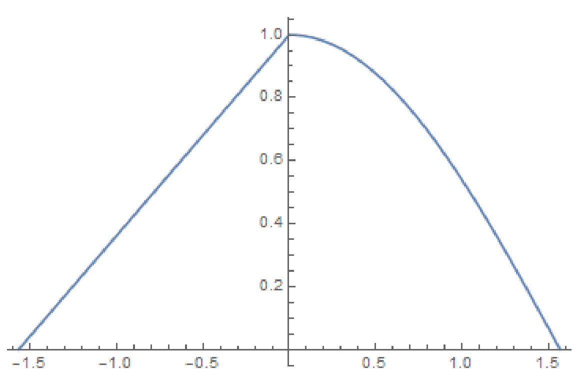
5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione π-periodica definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da

$$
f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi}x & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \cos x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases} .
$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti a_n di Fourier di f (non è richiesto il calcolo dei coefficienti b_n) e semplificare opportunamente l'espressione ottenuta.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.



a. La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. I coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b. La funzione non è né pari né dispari. Per calcolare gli a_n, poiché $T=\pi$, $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$,

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1+\frac{2}{\pi}x\right)\cos(2nx)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos(2nx)\,dx\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1+\frac{2}{\pi}x\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+1\right\} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+1\right) = \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Per $n \geq 1$,

$$
a_n = \frac{2}{\pi}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos(2nx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\cos(2nx)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos(2nx)\,dx\right\}.
$$

$$
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos(2nx)\,dx = \left[\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{-\pi/2}^{0} = 0;
$$

$$
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\cos(2nx)\,dx = \left[x\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{-\pi/2}^{0} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin(2nx)}{2n}dx = \left[\frac{\cos(2nx)}{(2n)^2}\right]_{-\pi/2}^{0} = \frac{1-\cos(n\pi)}{4n^2}
$$

Sfruttando le identità

$$
\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}
$$

si ha

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos(2nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\cos(2n+1)x+\cos(2n-1)x\right\}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}+\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n+1)}+\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(2n-1)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)}-\frac{(-1)^n}{(2n-1)}\right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}.
\end{aligned}
$$

Perciò

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1-\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{4n^2-1}. \\
a_0 &= \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Analisi Matematica 2. Appello di gennaio 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	7
2	**6**
3	7
4	7
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' + y = e^{-x} \sin 2x$$

semplificando l'espressione ottenuta. Per la ricerca di una soluzione particolare della completa, si richiede di utilizzare il metodo dell'esponenziale complesso.

Equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$
$$\alpha = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

Metodo di somiglianza. Notiamo che il termine noto *non è* soluzione dell'omogenea. Poiché

$$e^{-x} \sin 2x = \operatorname{Im}\left(e^{x(-1+2i)}\right),$$

cerchiamo prima una soluzione particolare dell'equazione

$$w'' + w' + w = e^{x(-1+2i)},$$

del tipo

$$\overline{w}(x) = Ae^{x(-1+2i)}$$
$$\overline{w}'(x) = A(-1+2i)\, e^{x(-1+2i)}$$
$$\overline{w}''(x) = A(-1+2i)^2\, e^{x(-1+2i)}$$

$$Ae^{x(-1+2i)} \left\{(-1+2i)^2 + (-1+2i) + 1\right\} = e^{x(-1+2i)}$$
$$A\{-3-4i-1+2i+1\} = 1$$
$$A\{-3-2i\} = 1$$
$$A = -\frac{1}{3+2i} = -\frac{(3-2i)}{9+4} = \frac{1}{13}(-3+2i)$$

$$\overline{w}(x) = \frac{1}{13}(-3+2i)\,e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

Perciò una soluzione particolare dell'equazione completa di partenza è:

$$\begin{aligned}\overline{y}(x) &= \operatorname{Im}\overline{w}(x) = \operatorname{Im}\left[\frac{1}{13}(-3+2i)\,e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)\right] \\ &= \frac{1}{13}e^{-x}(2\cos 2x - 3\sin 2x)\end{aligned}$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \frac{1}{13}e^{-x}(2\cos 2x - 3\sin 2x).$$

2. Curve e integrali di linea

Si consideri la linea materiale piana γ (catenaria), omogenea, di massa m, avente nel piano xy equazione cartesiana

$$y = r\operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right) \text{ per } x \in [-r, r]$$

(dove $r > 0$ è una costante avente le dimensioni di una lunghezza). Calcolare il suo elemento d'arco, la sua lunghezza e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse y. Riportare con cura l'impostazione e scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.

Posto $f(x) = r\operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right)$, si ha: $f'(x) = \operatorname{Sh}\left(\frac{x}{r}\right)$

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \sqrt{1 + \overset{2}{\operatorname{Sh}}\left(\frac{x}{r}\right)}dx = \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right)dx.$$

Lunghezza:

$$\begin{aligned}l(\gamma) &= \int_{-r}^{r}\operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right)dx = 2\int_0^r \operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right)dx \\ &= 2\left[r\operatorname{Sh}\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r = 2r\operatorname{Sh}1.\end{aligned}$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse y:

$$\begin{aligned}I_y &= \frac{m}{l(\gamma)}\int_\gamma x^2 ds = \frac{m}{2r\operatorname{Sh}1}\int_{-r}^{r}x^2\operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right)dx \\ &= \frac{m}{r\operatorname{Sh}1}\int_0^r x^2\operatorname{Ch}\left(\frac{x}{r}\right)dx \\ &(x = rt; dx = rdt; t\in[0,1]) \\ &= \frac{m}{r\operatorname{Sh}1}\int_0^1 r^2t^2\operatorname{Ch}t\,rdt = \frac{mr^2}{\operatorname{Sh}1}\int_0^1 t^2\operatorname{Ch}t\,dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2 \operatorname{Ch} t dt &= \left[t^2 \operatorname{Sh} t\right]_0^1 - \int_0^1 2t \operatorname{Sh} t dt \\ &= \operatorname{Sh} 1 - 2\left\{\left[t \operatorname{Ch} t\right]_0^1 - \int_0^1 \operatorname{Ch} t dt\right\} \\ &= \operatorname{Sh} 1 - 2\left\{\operatorname{Ch} 1 - \operatorname{Sh} 1\right\} = 3 \operatorname{Sh} 1 - 2 \operatorname{Ch} 1.\end{aligned}$$

$$I_y = mr^2 \left(\frac{3 \operatorname{Sh} 1 - 2 \operatorname{Ch} 1}{\operatorname{Sh} 1}\right) = mr^2 \left(3 - 2 \operatorname{Coth} 1\right) \simeq 0.37 mr^2.$$

3. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 + 4y^2 - 1\right).$$

$$\begin{cases} f_x = 2x\left(x^2 + 4y^2 - 1\right) + 2x\left(x^2 - y^2\right) = 2x\left(2x^2 + 3y^2 - 1\right) = 0 \\ f_y = -2y\left(x^2 + 4y^2 - 1\right) + 8y\left(x^2 - y^2\right) = 2y\left(3x^2 - 8y^2 + 1\right) = 0 \end{cases}$$

Se nella prima $x = 0$ allora la seconda dà $2y\left(-8y^2 + 1\right) = 0$, quindi $y = 0$ o $y = \pm 1/2\sqrt{2}$.
Se nella seconda $y = 0$ allora la prima dà $2x\left(2x^2 - 1\right) = 0$, quindi $x = 0$ o $x = \pm 1/\sqrt{2}$.
Se $xy \neq 0$ allora il sistema è

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \\ 3x^2 - 8y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

e sommando membro a membro si ha: $5x^2 - 5y^2 = 0$, cioè $y = \pm x$, che dà $5x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1/\sqrt{5}$, e rispettivamente $y = \mp 1/\sqrt{5}$.
I punti stazionari sono:

$$(0,0), \left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$Hf(x,y) = 2\begin{bmatrix} 6x^2 + 3y^2 - 1 & 6xy \\ 6xy & 3x^2 - 24y^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf(0,0) = 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$(0,0) \text{ è punto di sella.}$$

$$Hf\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 2\begin{bmatrix} -\frac{5}{8} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ definita negativa,}$$

$$\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \text{ sono punti di massimo.}$$

$$Hf\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=2\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}\text{ definita positiva,}$$

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\text{ sono punti di minimo.}$$

$$Hf\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=2\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{6}{5}\\ \frac{6}{5} & -\frac{16}{5}\end{bmatrix}\text{ indefinita,}$$

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\text{ sono punti di sella.}$$

4. Integrali tripli. Sia Ω il solido tridimensionale non omogeneo descritto dalla corona sferica di centro l'origine e raggi R e $2R$, avente densità:

$$\delta(x,y,z)=\frac{\mu}{R^3}\left(1+\frac{|xy|\,z^2}{R^4}\right),$$

dove R,μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente. Calcolare la massa totale dell'oggetto.

$$|\Omega|=\frac{4}{3}\pi\left((2R)^3-R^3\right)=\frac{28}{3}\pi R^3.$$

$$\begin{aligned}m&=\int\int\int_\Omega\delta(x,y,z)\,dxdydz=\frac{\mu}{R^3}\int\int\int_\Omega\left(1+\frac{|xy|\,z^2}{R^4}\right)dxdydz\\&=\frac{\mu}{R^3}\left(|\Omega|+\int\int\int_\Omega\frac{|xy|\,z^2}{R^4}dxdydz\right)=\frac{\mu}{R^3}\left(\frac{28}{3}\pi R^3+\int\int\int_\Omega\frac{|xy|\,z^2}{R^4}dxdydz\right).\end{aligned}$$

Usiamo le coordinate sferiche:

$$\begin{cases}x=\rho\sin\phi\cos\theta\\ y=\rho\sin\phi\sin\theta\\ z=\rho\cos\phi\end{cases}$$

per cui

$$\Omega=\{(\rho,\phi,\theta):\rho\in[R,2R],\phi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi]\},\,dxdydz=\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\begin{aligned}\int\int\int_\Omega\frac{|xy|\,z^2}{R^4}dxdydz&=\frac{1}{R^4}\int_R^{2R}\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\rho^2\sin^2\phi\,|\cos\theta\sin\theta|\,\rho^2\cos^2\phi d\theta\right)\sin\phi d\phi\right)\rho^2d\rho\\&=\frac{1}{R^4}\left(\int_R^{2R}\rho^6d\rho\right)\left(\int_0^\pi\sin^3\phi\cos^2\phi d\phi\right)\left(\int_0^{2\pi}|\cos\theta\sin\theta|\,d\theta\right).\end{aligned}$$

$$\int_R^{2R} \rho^6 d\rho = \left[\frac{\rho^7}{7}\right]_R^{2R} = \frac{R^7}{7}\left(2^7 - 1\right) = \frac{127}{7}R^7.$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\phi\cos^2\phi d\phi = \int_0^{\pi} \sin\phi\left(1 - \cos^2\phi\right)\cos^2\phi d\phi$$

$$(\cos\phi = t) = \int_{-1}^{1} t^2\left(1 - t^2\right) dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}$$

$$\int_0^{2\pi} |\cos\theta\sin\theta|\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta d\theta = 4\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

$$\int\int\int_{\Omega} \frac{|xy|\, z^2}{R^4} dxdydz = \frac{1}{R^4}\frac{127}{7}R^7\cdot\frac{4}{15}\cdot 2.$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{\mu}{R^3}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 + \int\int\int_{\Omega} \frac{|xy|\, z^2}{R^4} dxdydz\right) \\ &= \frac{\mu}{R^3}\left(\frac{28}{3}\pi R^3 + \frac{127}{7}R^3\frac{8}{15}\right) \\ &= 4\mu\left(\frac{7}{3}\pi + \frac{254}{105}\right). \end{aligned}$$

5. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ che nel piano xz ha equazione polare:

$$\gamma : \rho = R\, e^{\theta}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

a. Scrivere le equazioni parametriche di γ.
b. Scrivere le equazioni parametriche di Σ determinare l'elemento d'area dS, stabilire se è una superficie regolare, o determinare in caso negativo i suoi punti singolari. Calcolare l'area di Σ.

a. Equazione polare di γ: $\rho = R\, e^{\theta}$; equazioni parametriche di γ:

$$\gamma : \begin{cases} x = a(\theta) = R\, e^{\theta}\cos\theta \\ z = b(\theta) = R\, e^{\theta}\sin\theta \end{cases} \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

b.

$$\Sigma : \begin{cases} x = R\, e^{\theta}\cos\theta\cos\phi \\ y = R\, e^{\theta}\cos\theta\sin\phi \\ z = R\, e^{\theta}\sin\theta \end{cases} \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \phi \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} dS &= |a(\theta)|\sqrt{a'(\theta)^2 + b'(\theta)^2} d\theta d\phi \\ &= |a(\theta)|\sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho')^2(\theta)} d\theta d\phi \\ &= R\, e^{\theta}\cos\theta\sqrt{2\left(R\, e^{\theta}\right)^2} d\theta d\phi \\ &= \sqrt{2}R^2 e^{2\theta}\cos\theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

La superficie è regolare tranne per $\theta = \frac{\pi}{2}$ che dà il punto singolare $\left(0, 0, R\, e^{\pi/2}\right)$.

$$\begin{aligned}|\Sigma| &= \int\int_{\Sigma} dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}R^2 e^{2\theta} \cos\theta d\theta \right) d\phi \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{2}R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\theta} \cos\theta d\theta.\end{aligned}$$

$$\int e^{2\theta} \cos\theta d\theta = (...) = \frac{1}{5} e^{2\theta} \left(2\cos\theta + \sin\theta\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\theta} \cos\theta d\theta = \left[\frac{1}{5} e^{2\theta} \left(2\cos\theta + \sin\theta\right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5} \left(e^{\pi} - 2\right)$$

$$|\Sigma| = \frac{2}{5} \sqrt{2} \left(e^{\pi} - 2\right) \pi R^2$$