Recupero sulla prima prova in itinere
di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (2x-1)\, e^{-3y} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 3y' = x^2 - 2x - 3.$$

3. Curve e integrali di linea

Si consideri la linea materiale piana γ, omogenea, di massa m, rappresentata dalla curva parametrizzata:

$$\begin{cases} x = R\sqrt{t}\cos t \\ y = R\sqrt{t}\sin t \quad \text{per } t \in [0, 2\pi]\,, \\ z = Rt \end{cases}$$

dove $R > 0$ è una costante avente le dimensioni di una lunghezza). Calcolare il suo elemento d'arco, la sua lunghezza e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z. *Riportare con cura l'impostazione e scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.*

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2\sin x-3y^3e^x-2x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y)=e^{x-y}\left(x^2+y^2-4\right).$$

Recupero sulla seconda prova in itinere
di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Integrali doppi. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_{\Omega} e^{-x^2} |x|\, y dx dy$$

dove Ω è il semicerchio di centro l'origine e raggio 2 contenuto nel semipiano $y \geq 0$. Si raccomanda di fare una figura e riportare l'impostazione analitica, in particolare la rappresentazione analitica di Ω.

2. Integrali tripli. Calcolare il volume e il momento d'inerzia di un solido omogeneo di massa m a forma di tronco di cono avente base maggiore di raggio R, base minore di raggio r e distanza tra le due basi h, rispetto al suo asse di simmetria. *Si raccomanda di: fare una figura, curare la rappresentazione analitica di Ω e l'impostazione del problema. Scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.*

3. Campi vettoriali. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, xz)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \operatorname{Ch} t \\ y = \operatorname{Sh} t \\ z = t \end{cases} \quad \text{per } t \in [0, 2] \, .$$

Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

4. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie materiale omogenea di massa m rappresentata dal grafico della funzione

$$z = \frac{xy}{R} \text{ con } x^2 + y^2 \leq 3R^2$$

(dove $R > 0$ è una costante avente le dimensioni di una lughezza). Calcolare l'area di Σ e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z. *Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.*

5. Flusso di un campo vettoriale. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ z = \sin 2t \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Si scrivano le equazioni parametriche di Σ e si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, 2z)$$

attraverso la superficie Σ, orientata col versore normale orientato in modo da avere la componente z positva. *Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.*

Analisi Matematica 2. Appello di gennaio 2025
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (2x-1)\,e^{-3y} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

2. Curve e integrali di linea
Si consideri la linea materiale piana γ, omogenea, di massa m, rappresentata dalla curva parametrizzata:

$$\begin{cases} x = R\sqrt{t}\cos t \\ y = R\sqrt{t}\sin t \quad \text{per } t \in [0, 2\pi], \\ z = Rt \end{cases}$$

dove $R > 0$ è una costante avente le dimensioni di una lunghezza). Calcolare il suo elemento d'arco, la sua lunghezza e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z. *Riportare con cura l'impostazione e scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.*

3. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2+y^2-4\right).$$

4. Integrali doppi. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_{\Omega} e^{-x^2} |x| \, y dx dy$$

dove Ω è il semicerchio di centro l'origine e raggio 2 contenuto nel semipiano $y \geq 0$. Si raccomanda di fare una figura e riportare l'impostazione analitica, in particolare la rappresentazione analitica di Ω.

5. Flusso di un campo vettoriale. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ z = \sin 2t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Si scrivano le equazioni parametriche di Σ e si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, 2z)$$

attraverso la superficie Σ, orientata col versore normale orientato in modo da avere la componente z positva. *Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.*

Analisi Matematica 2. Appello di gennaio 2025
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del second'ordine. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 3y' = x^2 - 2x - 3.$$

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 \sin x - 3y^3 e^x - 2x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

3. Integrali tripli. Calcolare il volume e il momento d'inerzia di un solido omogeneo di massa m a forma di tronco di cono avente base maggiore di raggio R, base minore di raggio r e distanza tra le due basi h, rispetto al suo asse di simmetria. *Si raccomanda di: fare una figura, curare la rappresentazione analitica di Ω e l'impostazione del problema. Scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.*

4. Campi vettoriali. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, xz)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \operatorname{Ch} t \\ y = \operatorname{Sh} t \\ z = t \end{cases} \quad \text{per } t \in [0, 2]\,.$$

Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

5. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie materiale omogenea di massa m rappresentata dal grafico della funzione

$$z = \frac{xy}{R} \text{ con } x^2 + y^2 \leq 3R^2$$

(dove $R > 0$ è una costante avente le dimensioni di una lughezza). Calcolare l'area di Σ e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z. *Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.*

Recupero sulla prima prova in itinere
di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	7
2	6
3	7
4	7
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (2x-1)\, e^{-3y} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

Equazione a variabili separabili, l'equazione non ha soluzioni costanti.
Risolviamo:

$$\int e^{3y} dy = \int (2x-1)\, dx$$

$$\frac{e^{3y}}{3} = x^2 - x + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(-1) = 0$:

$$\frac{1}{3} = 2 + c,$$

$$c = -\frac{5}{3}.$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$\frac{e^{3y}}{3} = x^2 - x - \frac{5}{3}$$

$$e^{3y} = 3x^2 - 3x - 5$$

che dà

$$y(x) = \frac{1}{3} \log\left(3x^2 - 3x - 5\right)$$

purché risulti

$$3x^2 - 3x - 5 > 0,$$

ossia

$$x < \frac{3-\sqrt{69}}{6} \text{ o } x > \frac{3+\sqrt{69}}{6}.$$

Poiché la soluzione dev'essere definita in un intorno di $x = -1$, punto in cui è assegnata la condizione iniziale, scegliamo l'intervallo

$$\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{69}}{6}\right),$$

che effettivamente contiene -1, in quanto [*non serve la calcolatrice per stabilirlo!*]:

$$-1 < \frac{3-\sqrt{69}}{6} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{69}-3}{6} < 1 \Longleftrightarrow \sqrt{69} < 9 \Longleftrightarrow 69 < 81.$$

Conclusione: la soluzione è

$$y(x) = \frac{1}{3}\log\left(3x^2 - 3x - 5\right)$$

e l'intervallo massimale su cui è definita è:

$$\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{69}}{6}\right).$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 3y' = x^2 - 2x - 3.$$

Equazione omogenea:

$$\begin{aligned} &\alpha^2 + 3\alpha = 0 \\ &\alpha = 0, \alpha = -3. \end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 + c_2 e^{-3x}.$$

Equazione completa, metodo di somiglianza. Poiché a primo membro manca il termine in y, cerchiamo una soluzione particolare del tipo:

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= ax^3 + bx^2 + cx, \\ \overline{y}'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ \overline{y}''(x) &= 6ax + 2b. \end{aligned}$$

$$(6ax + 2b) + 3\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = x^2 - 2x - 3.$$

$$\begin{cases} 9a = 1 \\ 6a + 6b = -2 \\ 2b + 3c = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} + 3b = -1, b = -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} + 3c = -3, c = -\frac{19}{27} \end{cases}$$

Quindi una soluzione particolare dell'eqauzione completa è:

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{19}{27}x$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{19}{27}x + c_1 + c_2 e^{-3x}.$$

3. Curve e integrali di linea
Si consideri la linea materiale piana γ, omogenea, di massa m, rappresentata dalla curva parametrizzata:

$$\begin{cases} x = R\sqrt{t}\cos t \\ y = R\sqrt{t}\sin t \quad \text{per } t \in [0, 2\pi]\,, \\ z = Rt \end{cases}$$

dove $R > 0$ è una costante avente le dimensioni di una lunghezza). Calcolare il suo elemento d'arco, la sua lunghezza e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z. *Riportare con cura l'impostazione e scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.*

Posto $\underline{r}(t) = \left(R\sqrt{t}\cos t, R\sqrt{t}\sin t, Rt\right)$, si ha:

$$\begin{aligned} \underline{r}'(t) &= R\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos t - \sqrt{t}\sin t, \frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t + \sqrt{t}\cos t, 1\right) \\ |\underline{r}'(t)|^2 &= R^2\left(\frac{1}{4t} + t + 1\right) = \frac{R^2}{4t}\left(4t^2 + 4t + 1\right) = \frac{R^2}{4t}(2t+1)^2 \\ ds &= \frac{R}{2\sqrt{t}}(2t+1)\,dt. \end{aligned}$$

Lunghezza:

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} \frac{R}{2\sqrt{t}}(2t+1)\,dt = R\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)dt \\ &= R\left[\frac{2}{3}t^{3/2} + \sqrt{t}\right]_0^{2\pi} = R\left(\frac{2}{3}(2\pi)^{3/2} + \sqrt{2\pi}\right) = \sqrt{2\pi}R\left(\frac{4}{3}\pi + 1\right). \end{aligned}$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse z:

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{l(\gamma)}\int_\gamma \left(x^2 + y^2\right)ds = \frac{m}{l(\gamma)}\int_0^{2\pi} R^2 t \cdot \frac{R}{2\sqrt{t}}(2t+1)\,dt \\ &= \frac{mR^3}{\sqrt{2\pi}R\left(\frac{4}{3}\pi + 1\right)}\int_0^{2\pi}\left(t^{3/2} + \frac{\sqrt{t}}{2}\right)dt = \frac{mR^2}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{4}{3}\pi + 1\right)}\left[\frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{1}{3}t^{3/2}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{mR^2}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{4}{3}\pi + 1\right)}\left[\frac{2}{5}(2\pi)^{5/2} + \frac{1}{3}(2\pi)^{3/2}\right] = \frac{mR^2}{\left(\frac{4}{3}\pi + 1\right)}\left[\frac{2}{5}(2\pi)^2 + \frac{1}{3}(2\pi)\right] \\ &= 2\pi mR^2\left(\frac{\frac{4}{5}\pi + \frac{1}{3}}{\frac{4}{3}\pi + 1}\right) = \frac{2}{5}\pi\left(\frac{12\pi + 5}{4\pi + 3}\right)mR^2. \end{aligned}$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2\sin x - 3y^3 e^x - 2x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Scriviamo:

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &\leq \frac{2x^2|\sin x| + 3|y|^3 e^x + 2x^2|y| + |x|y^2}{x^2+y^2} \\ &\leq \frac{2x^2|x| + 2x^2|y| + |x|y^2}{x^2+y^2} + \frac{3|y|^3 e^x}{y^2} \\ &= \frac{2x^2|x| + 2x^2|y| + |x|y^2}{x^2+y^2} + 3|y|e^x \equiv g_1(x,y) + g_2(x,y).\end{aligned}$$

Poiché $g_1(x,y)$ è positivamente omogenea di grado 1 e continua fuori dall'origine, $g_1(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$. D'altro canto g_2 è una funzione continua che si annulla nell'origine, perciò per il teorema del confronto, $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, perciò f è continua.
b.

$$f(x,0) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2} = 2\sin x \sim 2x, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2.$$

$$\begin{aligned}f(0,y) &= \frac{-3y^3}{y^2} = -3y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= -3.\end{aligned}$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (2,-3)$.
c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$g(x,y) \equiv \frac{f(x,y) - 2x + 3y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Ma:

$$\begin{aligned}g(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{2x^2 \sin x - 3y^3 e^x - 2x^2 y + xy^2}{x^2+y^2} - 2x + 3y \right) \\ &= \frac{2x^2 \sin x - 3y^3 e^x - 2x^2 y + xy^2 + (x^2+y^2)(-2x+3y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2x^2(\sin x - x) - 3y^3(e^x - 1) + x^2 y - xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

In particolare,

$$\begin{aligned}g(x,2x) &= \frac{2x^2(\sin x - x) - 24x^3(e^x-1) + 2x^3 - 4x^3}{(x^2+4x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2(\sin x - x) - 24x(e^x - 1)}{5^{3/2}|x|} - \frac{2x}{5^{3/2}|x|} = h_1(x) + h_2(x),\end{aligned}$$

dove $h_1(x) \to 0$ per $x \to 0$ (per sviluppi di Taylor in una variabile), mentre $h_2(x) \to \mp \frac{2}{5^{3/2}}$ per $x \to 0^{\pm}$. Poiché $g(x,y)$ non tende a zero, f *non è differenziabile* in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2+y^2-4\right).$$

$$\begin{cases} f_x = e^{x-y}\left(x^2+y^2+2x-4\right) = 0 \\ f_y = e^{x-y}\left(-x^2-y^2+4+2y\right) = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2+2x-4 = 0 \\ -x^2-y^2+4+2y = 0 \end{cases}$$

e sommando membro a membro si ha:

$$\begin{cases} x+y=0, y=-x \\ 2x^2+2x-4=0, x^2+x-2=0, (x-1)(x+2)=0, \end{cases}$$

da cui

$$(1,-1), (-2,2)$$

sono i punti stazionari.

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{aligned} Hf(x,y) &= \begin{bmatrix} e^{x-y}\left(x^2+y^2+4x-2\right) & e^{x-y}\left(-x^2-y^2-2x+2y+4\right) \\ e^{x-y}\left(-x^2-y^2-2x+2y+4\right) & e^{x-y}\left(x^2+y^2-4y-2\right) \end{bmatrix} \\ &= e^{x-y}\begin{bmatrix} x^2+y^2+4x-2 & -x^2-y^2-2x+2y+4 \\ -x^2-y^2-2x+2y+4 & x^2+y^2-4y-2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf(1,-1) = e^2\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$

$$(1,-1) \text{ è punto di minimo relativo.}$$

$$Hf(-2,2) = e^4\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$(-2,2) \text{ è punto di sella.}$$

Recupero sulla seconda prova in itinere
di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Integrali doppi. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_{\Omega} e^{-x^2} |x| \, y dx dy$$

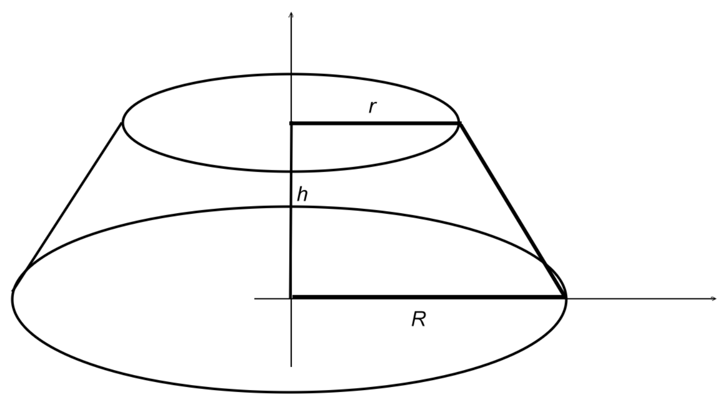
dove Ω è il semicerchio di centro l'origine e raggio 2 contenuto nel semipiano $y \geq 0$. Si raccomanda di fare una figura e riportare l'impostazione analitica, in particolare la rappresentazione analitica di Ω.

$$\Omega = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\right\} = \left\{(x,y) : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}.$$

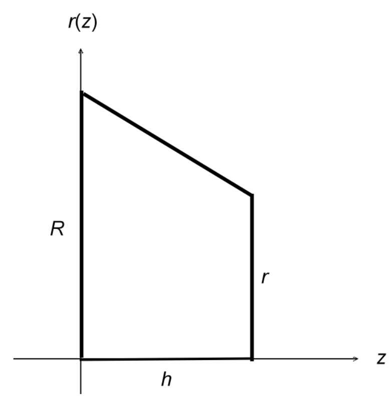
$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega} e^{-x^2} |x| \, y dx dy = \int_{-2}^{2} e^{-x^2} |x| \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y dy \right) dx \\
&= \int_{-2}^{2} e^{-x^2} |x| \left(\frac{4-x^2}{2} \right) dx = 2 \int_0^2 e^{-x^2} |x| \left(\frac{4-x^2}{2} \right) dx \\
&= \int_0^2 e^{-x^2} x \left(4 - x^2\right) dx \\
x^2 &= t; 2x dx = dt; t \in [0,4] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^4 e^{-t} (4-t) \, dt = \frac{1}{2} \left\{ \left[-e^{-t}(4-t)\right]_0^4 - \int_0^4 e^{-t} dt \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{4 + e^{-4} - 1\right\} = \frac{3 + e^{-4}}{2}.
\end{aligned}$$

2. Integrali tripli. Calcolare il volume e il momento d'inerzia di un solido omogeneo di massa m a forma di tronco di cono avente base maggiore di raggio R, base minore di raggio r e distanza tra le due basi h, rispetto al suo asse di simmetria. *Si raccomanda di: fare una figura, curare la rappresentazione analitica di Ω e l'impostazione del problema. Scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : z \in [0,h], x^2 + y^2 \leq r(z)^2\right\}$$



dove la funzione $r\left(z\right)$ è la funzione lineare:



$$r\left(z\right)=R-\frac{R-r}{h}z.$$

Perciò

$$\begin{aligned}
|\Omega| &= \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int_0^h \left(\int\int_{x^2+y^2\leq r(z)^2} dxdy\right) dz = \int_0^h \pi r\left(z\right)^2 dz \\
&= \pi\int_0^h \left(R-\frac{R-r}{h}z\right)^2 dz = \pi\left[-\frac{h}{3\left(R-r\right)}\left(R-\frac{R-r}{h}z\right)^3\right]_0^h \\
&= \pi\frac{h\left(R^3-r^3\right)}{3\left(R-r\right)} = \pi\frac{h\left(R^2+rR+r^2\right)}{3}.
\end{aligned}$$

$$I=\frac{m}{|\Omega|}\int\int\int_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\frac{3m}{\pi h\left(R^2+rR+r^2\right)}\int_0^h\left(\int\int_{x^2+y^2\leq r(z)^2}\left(x^2+y^2\right)dxdy\right)dz$$

coordinate polari nell'integrale doppio

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3m}{\pi h\left(R^2+rR+r^2\right)} \int_0^h 2\pi \left(\int_0^{r(z)} \rho^3 d\rho \right) dz = \frac{3m}{h\left(R^2+rR+r^2\right)} \int_0^h 2 \frac{\left(R-\frac{R-r}{h}z\right)^4}{4} dz \\
&= \frac{3m}{2h\left(R^2+rR+r^2\right)} \left[-\frac{h\left(R-\frac{R-r}{h}z\right)^5}{(R-r)\,5} \right]_0^h = \frac{3m}{10\left(R^2+rR+r^2\right)} \frac{\left(R^5-r^5\right)}{(R-r)} \\
&= \frac{3}{10} m \left(\frac{R^4+R^3r+R^2r^2+Rr^3+r^4}{R^2+rR+r^2} \right).
\end{aligned}
$$

3. Campi vettoriali. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$
\underline{F} = (x, y, xz)
$$

lungo l'arco di curva

$$
\gamma : \begin{cases} x = \operatorname{Ch} t \\ y = \operatorname{Sh} t \\ z = t \end{cases} \quad \text{per } t \in [0,2]\,.
$$

Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

$$
\begin{aligned}
\underline{r}\,(t) &= (\operatorname{Ch} t, \operatorname{Sh} t, t) \\
\underline{r}'\,(t) &= (\operatorname{Sh} t, \operatorname{Ch} t, 1) \\
\underline{F}\,(x,y,z) &= (x, y, xz) \\
\underline{F}\,(\underline{r}\,(t)) &= (\operatorname{Ch} t, \operatorname{Sh} t, t \operatorname{Ch} t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^2 \underline{F}\,(\underline{r}\,(t)) \cdot \underline{r}'\,(t)\, dt \\
&= \int_0^2 (\operatorname{Ch} t, \operatorname{Sh} t, t \operatorname{Ch} t) \cdot (\operatorname{Sh} t, \operatorname{Ch} t, 1)\, dt \\
&= \int_0^2 (2 \operatorname{Ch} t \operatorname{Sh} t + t \operatorname{Ch} t)\, dt = A + B.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \left[\operatorname{Sh}^2 t\right]_0^2 = \operatorname{Sh}^2 2. \\
B &= \int_0^2 t \operatorname{Ch} t dt = \left[t \operatorname{Sh} t\right]_0^2 - \int_0^2 \operatorname{Sh} t dt \\
&= 2 \operatorname{Sh} 2 - \operatorname{Ch} 2 + 1.
\end{aligned}
$$

$$
L = \operatorname{Sh}^2 2 + 2 \operatorname{Sh} 2 - \operatorname{Ch} 2 + 1.
$$

4. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie materiale omogenea di massa m rappresentata dal grafico della funzione

$$z = \frac{xy}{R} \text{ con } x^2 + y^2 \leq 3R^2$$

(dove $R > 0$ è una costante avente le dimensioni di una lughezza). Calcolare l'area di Σ e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{xy}{R}; \nabla f(x,y) = \left(\frac{y}{R}, \frac{x}{R}\right) \\ dS &= \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2}} dxdy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Sigma| &= \int\int_{\Sigma} dS = \int\int_{x^2+y^2 \leq 3R^2} \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2}} dxdy \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}R} \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{R^2}} \rho d\rho = 2\pi \left[\frac{R^2}{3}\left(1 + \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}R} \\ &= 2\pi \frac{R^2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3}\pi R^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{|\Sigma|} \int\int_{\Sigma} \left(x^2+y^2\right) dS = \frac{3m}{14\pi R^2} \int\int_{x^2+y^2 \leq 3R^2} \left(x^2+y^2\right) \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2}} dxdy \\ &= \frac{3m}{14\pi R^2} 2\pi \int_0^{\sqrt{3}R} \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{R^2}} \rho^3 d\rho \\ &\left[\frac{\rho^2}{R^2} = t; \frac{2\rho}{R^2} d\rho = dt; t \in [0,4]\right] \\ &= \frac{3m}{7R^2} \int_0^3 \sqrt{1+t}\left(tR^2\right) \frac{R^2}{2} dt = \frac{3R^2 m}{14} \int_0^3 t\sqrt{1+t} dt \\ &= \frac{3R^2 m}{14} \left\{\left[\frac{2}{3} t (1+t)^{3/2}\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{2}{3} (1+t)^{3/2} dt\right\} \\ &= \frac{3R^2 m}{14} \left\{16 - \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} (1+t)^{5/2}\right]_0^3\right\} = \frac{3R^2 m}{14} \left\{16 - \frac{4}{15} \cdot 31\right\} \\ &= \frac{3R^2 m}{7} \left(8 - \frac{62}{15}\right) = \frac{58}{35} mR^2. \end{aligned}$$

5. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ z = \sin 2t \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Si scrivano le equazioni parametriche di Σ e si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, 2z)$$

attraverso la superficie Σ, orientata col versore normale orientato in modo da avere la componente z positva.

Equazioni parametriche di Σ:

$$\begin{cases} x = \cos t \cos \theta \\ y = \cos t \sin \theta \quad t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi]. \\ z = \sin 2t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{r}\,(t,u) &= (\cos t \cos \theta, \cos t \sin \theta, \sin 2t) \\ \underline{r}_t\,(t,u) &= (-\sin t \cos \theta, -\sin t \sin \theta, 2\cos 2t) \\ \underline{r}_\theta\,(t,u) &= (-\cos t \sin \theta, \cos t \cos \theta, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{r}_t \times \underline{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin t \cos \theta & -\sin t \sin \theta & 2\cos 2t \\ -\cos t \sin \theta & \cos t \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-2\cos t \cos \theta \cos 2t, -2\cos t \sin \theta \cos 2t, -\cos t \sin t) \\ &= -\cos t\,(2\cos \theta \cos 2t, 2\sin \theta \cos 2t, \sin t)\,. \end{aligned}$$

$$\underline{n}dS = \pm\left(\underline{r}_t \times \underline{r}_\theta\right) dt d\theta$$

La terza componente di $\left(\underline{r}_t \times \underline{r}_\theta\right)$ è $-\cos t \sin t$, affinché sia positiva per $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ dobbiamo cambiare segno, quindi scegliere

$$\underline{n}dS = \cos t\,(2\cos \theta \cos 2t, 2\sin \theta \cos 2t, \sin t)\, dt d\theta.$$

Ora,

$$\underline{F} = (x, y, 2z) = (\cos t \cos \theta, \cos t \sin \theta, 2\sin 2t)$$

e il flusso richiesto è:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int\int_{\Sigma} \underline{F}\,(\underline{r}\,(t,u)) \cdot \underline{n}dS \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos t\,(2\cos \theta \cos 2t, 2\sin \theta \cos 2t, \sin t) \cdot (\cos t \cos \theta, \cos t \sin \theta, 2\sin 2t)\, dt \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos t\,(2\cos t \cos 2t + 2\sin t \sin 2t)\, dt \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} 2\cos^2 t dt = 4\pi \cdot \frac{\pi}{4} = \pi^2. \end{aligned}$$

Analisi Matematica 2. Appello di gennaio 2025
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	7
2	7
3	6
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (2x-1)\, e^{-3y} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

Equazione a variabili separabili, l'equazione non ha soluzioni costanti.
Risolviamo:

$$\int e^{3y} dy = \int (2x-1)\, dx$$

$$\frac{e^{3y}}{3} = x^2 - x + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(-1) = 0$:

$$\frac{1}{3} = 2 + c,$$

$$c = -\frac{5}{3}.$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$\frac{e^{3y}}{3} = x^2 - x - \frac{5}{3}$$

$$e^{3y} = 3x^2 - 3x - 5$$

che dà

$$y(x) = \frac{1}{3} \log\left(3x^2 - 3x - 5\right)$$

purché risulti

$$3x^2 - 3x - 5 > 0,$$

ossia

$$x < \frac{3-\sqrt{69}}{6} \text{ o } x > \frac{3+\sqrt{69}}{6}.$$

Poiché la soluzione dev'essere definita in un intorno di $x = -1$, punto in cui è assegnata la condizione iniziale, scegliamo l'intervallo

$$\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{69}}{6}\right),$$

che effettivamente contiene -1, in quanto [*non serve la calcolatrice per stabilirlo!*]:

$$-1 < \frac{3-\sqrt{69}}{6} \iff \frac{\sqrt{69}-3}{6} < 1 \iff \sqrt{69} < 9 \iff 69 < 81.$$

Conclusione: la soluzione è

$$y(x) = \frac{1}{3}\log\left(3x^2 - 3x - 5\right)$$

e l'intervallo massimale su cui è definita è:

$$\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{69}}{6}\right).$$

2. Curve e integrali di linea

Si consideri la linea materiale piana γ, omogenea, di massa m, rappresentata dalla curva parametrizzata:

$$\begin{cases} x = R\sqrt{t}\cos t \\ y = R\sqrt{t}\sin t \quad \text{per } t \in [0, 2\pi], \\ z = Rt \end{cases}$$

dove $R > 0$ è una costante avente le dimensioni di una lunghezza). Calcolare il suo elemento d'arco, la sua lunghezza e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z. *Riportare con cura l'impostazione e scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.*

Posto $\underline{r}(t) = \left(R\sqrt{t}\cos t, R\sqrt{t}\sin t, Rt\right)$, si ha:

$$\underline{r}'(t) = R\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos t - \sqrt{t}\sin t, \frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t + \sqrt{t}\cos t, 1\right)$$

$$|\underline{r}'(t)|^2 = R^2\left(\frac{1}{4t} + t + 1\right) = \frac{R^2}{4t}\left(4t^2 + 4t + 1\right) = \frac{R^2}{4t}(2t+1)^2$$

$$ds = \frac{R}{2\sqrt{t}}(2t+1)\,dt.$$

Lunghezza:

$$l(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} \frac{R}{2\sqrt{t}}(2t+1)\,dt = R\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)dt$$
$$= R\left[\frac{2}{3}t^{3/2} + \sqrt{t}\right]_0^{2\pi} = R\left(\frac{2}{3}(2\pi)^{3/2} + \sqrt{2\pi}\right) = \sqrt{2\pi}R\left(\frac{4}{3}\pi + 1\right).$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse z:

$$I = \frac{m}{l(\gamma)}\int_\gamma \left(x^2 + y^2\right)ds = \frac{m}{l(\gamma)}\int_0^{2\pi} R^2 t \cdot \frac{R}{2\sqrt{t}}(2t+1)\,dt$$
$$= \frac{mR^3}{\sqrt{2\pi}R\left(\frac{4}{3}\pi + 1\right)}\int_0^{2\pi}\left(t^{3/2} + \frac{\sqrt{t}}{2}\right)dt = \frac{mR^2}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{4}{3}\pi + 1\right)}\left[\frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{1}{3}t^{3/2}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{mR^2}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{4}{3}\pi + 1\right)}\left[\frac{2}{5}(2\pi)^{5/2} + \frac{1}{3}(2\pi)^{3/2}\right] = \frac{mR^2}{\left(\frac{4}{3}\pi + 1\right)}\left[\frac{2}{5}(2\pi)^2 + \frac{1}{3}(2\pi)\right]$$
$$= 2\pi mR^2\left(\frac{\frac{4}{5}\pi + \frac{1}{3}}{\frac{4}{3}\pi + 1}\right) = \frac{2}{5}\pi\left(\frac{12\pi + 5}{4\pi + 3}\right)mR^2.$$

3. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2+y^2-4\right).$$

$$\begin{cases} f_x = e^{x-y}\left(x^2+y^2+2x-4\right) = 0 \\ f_y = e^{x-y}\left(-x^2-y^2+4+2y\right) = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2+2x-4=0 \\ -x^2-y^2+4+2y=0 \end{cases}$$

e sommando membro a membro si ha:

$$\begin{cases} x+y=0, y=-x \\ 2x^2+2x-4=0, x^2+x-2=0, (x-1)(x+2)=0, \end{cases}$$

da cui

$$(1,-1), (-2,2)$$

sono i punti stazionari.
Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{aligned} Hf(x,y) &= \begin{bmatrix} e^{x-y}\left(x^2+y^2+4x-2\right) & e^{x-y}\left(-x^2-y^2-2x+2y+4\right) \\ e^{x-y}\left(-x^2-y^2-2x+2y+4\right) & e^{x-y}\left(x^2+y^2-4y-2\right) \end{bmatrix} \\ &= e^{x-y}\begin{bmatrix} x^2+y^2+4x-2 & -x^2-y^2-2x+2y+4 \\ -x^2-y^2-2x+2y+4 & x^2+y^2-4y-2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf(1,-1) = e^2\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$

$$(1,-1) \text{ è punto di minimo relativo.}$$

$$Hf(-2,2) = e^4\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$(-2,2) \text{ è punto di sella.}$$

4. Integrali doppi. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_\Omega e^{-x^2}|x|\, y\,dx\,dy$$

dove Ω è il semicerchio di centro l'origine e raggio 2 contenuto nel semipiano $y \geq 0$. Si raccomanda di fare una figura e riportare l'impostazione analitica, in particolare la rappresentazione analitica di Ω.

$$\Omega = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\right\} = \left\{(x,y) : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}.$$

$$
\begin{aligned}
\int\int_{\Omega} e^{-x^2}|x|\, ydxdy &= \int_{-2}^{2} e^{-x^2}|x| \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} ydy\right) dx\\
&= \int_{-2}^{2} e^{-x^2}|x| \left(\frac{4-x^2}{2}\right) dx = 2\int_0^2 e^{-x^2}|x| \left(\frac{4-x^2}{2}\right) dx\\
&= \int_0^2 e^{-x^2} x\left(4-x^2\right) dx\\
x^2 &= t; 2xdx = dt; t\in[0,4]\\
&= \frac{1}{2}\int_0^4 e^{-t}(4-t)\,dt = \frac{1}{2}\left\{\left[-e^{-t}(4-t)\right]_0^4 - \int_0^4 e^{-t}dt\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{4+e^{-4}-1\right\} = \frac{3+e^{-4}}{2}.
\end{aligned}
$$

5. Flusso di un campo vettoriale. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$
\begin{cases} x = \cos t \\ z = \sin 2t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].
$$

Si scrivano le equazioni parametriche di Σ e si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$
\underline{F} = (x, y, 2z)
$$

attraverso la superficie Σ, orientata col versore normale orientato in modo da avere la componente z positva. *Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.*

Equazioni parametriche di Σ:

$$
\begin{cases} x = \cos t\cos\theta \\ y = \cos t \sin\theta \\ z = \sin 2t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta\in[0,2\pi].
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{r}(t,u) &= (\cos t\cos\theta, \cos t\sin\theta, \sin 2t)\\
\underline{r}_t(t,u) &= (-\sin t\cos\theta, -\sin t\sin\theta, 2\cos 2t)\\
\underline{r}_\theta(t,u) &= (-\cos t\sin\theta, \cos t\cos\theta, 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{r}_t \times \underline{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin t\cos\theta & -\sin t\sin\theta & 2\cos 2t \\ -\cos t\sin\theta & \cos t\cos\theta & 0 \end{vmatrix}\\
&= (-2\cos t\cos\theta\cos 2t, -2\cos t\sin\theta\cos 2t, -\cos t\sin t)\\
&= -\cos t\,(2\cos\theta\cos 2t, 2\sin\theta\cos 2t, \sin t).
\end{aligned}
$$

$$\underline{n}dS = \pm\left(\underline{r}_t \times \underline{r}_\theta\right) dtd\theta$$

La terza componente di $\left(\underline{r}_t \times \underline{r}_\theta\right)$ è $-\cos t \sin t$, affinché sia positiva per $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ dobbiamo cambiare segno, quindi scegliere

$$\underline{n}dS = \cos t\left(2\cos\theta\cos 2t, 2\sin\theta\cos 2t, \sin t\right) dtd\theta.$$

Ora,

$$\underline{F} = (x, y, 2z) = (\cos t\cos\theta, \cos t\sin\theta, 2\sin 2t)$$

e il flusso richiesto è:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int\int_{\Sigma} \underline{F}\left(\underline{r}\left(t,u\right)\right)\cdot \underline{n}dS \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \cos t\left(2\cos\theta\cos 2t, 2\sin\theta\cos 2t, \sin t\right)\cdot\left(\cos t\cos\theta, \cos t\sin\theta, 2\sin 2t\right) dt\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \cos t\left(2\cos t\cos 2t + 2\sin t\sin 2t\right) dt\right) d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 tdt = 4\pi\cdot\frac{\pi}{4} = \pi^2.
\end{aligned}$$

Analisi Matematica 2. Appello di gennaio 2025
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	6
2	7
3	7
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 3y' = x^2 - 2x - 3.$$

Equazione omogenea:

$$\begin{aligned} &\alpha^2 + 3\alpha = 0 \\ &\alpha = 0, \alpha = -3. \end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 + c_2 e^{-3x}.$$

Equazione completa, metodo di somiglianza. Poiché a primo membro manca il termine in y, cerchiamo una soluzione particolare del tipo:

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= ax^3 + bx^2 + cx, \\ \overline{y}'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ \overline{y}''(x) &= 6ax + 2b. \end{aligned}$$

$$(6ax + 2b) + 3\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = x^2 - 2x - 3.$$

$$\begin{cases} 9a = 1 \\ 6a + 6b = -2 \\ 2b + 3c = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} + 3b = -1, b = -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} + 3c = -3, c = -\frac{19}{27} \end{cases}$$

Quindi una soluzione particolare dell'eqauzione completa è:

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{19}{27}x$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{19}{27}x + c_1 + c_2 e^{-3x}.$$

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 \sin x - 3y^3 e^x - 2x^2 y + xy^2}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Scriviamo:

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \frac{2x^2 |\sin x| + 3|y|^3 e^x + 2x^2|y| + |x| y^2}{x^2+y^2} \\ &\leq \frac{2x^2|x| + 2x^2|y| + |x| y^2}{x^2+y^2} + \frac{3|y|^3 e^x}{y^2} \\ &= \frac{2x^2|x| + 2x^2|y| + |x| y^2}{x^2+y^2} + 3|y| e^x \equiv g_1(x,y) + g_2(x,y). \end{aligned}$$

Poiché $g_1(x,y)$ è positivamente omogenea di grado 1 e continua fuori dall'origine, $g_1(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$. D'altro canto g_2 è una funzione continua che si annulla nell'origine, perciò per il teorema del confronto, $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, perciò f è continua.
b.

$$f(x,0) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2} = 2\sin x \sim 2x, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2.$$

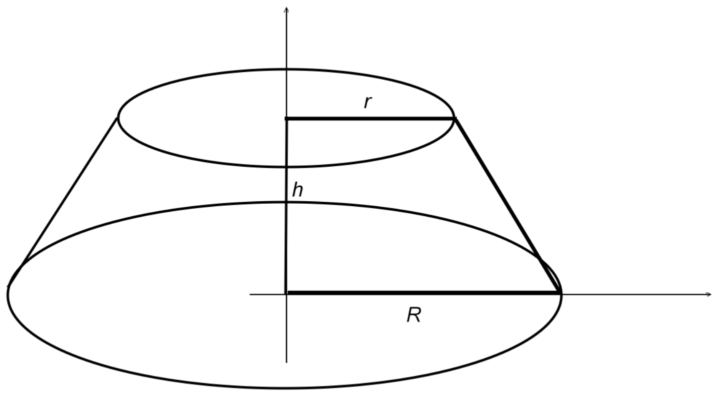
$$\begin{aligned} f(0,y) &= \frac{-3y^3}{y^2} = -3y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= -3. \end{aligned}$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (2,-3)$.
c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$g(x,y) \equiv \frac{f(x,y) - 2x + 3y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Ma:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{2x^2 \sin x - 3y^3 e^x - 2x^2 y + xy^2}{x^2+y^2} - 2x + 3y \right) \\ &= \frac{2x^2 \sin x - 3y^3 e^x - 2x^2 y + xy^2 + (x^2+y^2)(-2x+3y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2x^2(\sin x - x) - 3y^3(e^x - 1) + x^2 y - xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



In particolare,

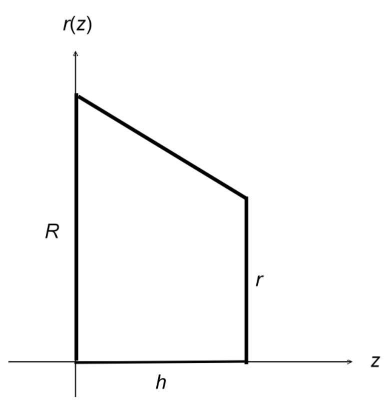
$$g(x,2x) = \frac{2x^2(\sin x - x) - 24x^3(e^x - 1) + 2x^3 - 4x^3}{(x^2+4x^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{2(\sin x - x) - 24x(e^x-1)}{5^{3/2}|x|} - \frac{2x}{5^{3/2}|x|} = h_1(x) + h_2(x),$$

dove $h_1(x) \to 0$ per $x \to 0$ (per sviluppi di Taylor in una variabile), mentre $h_2(x) \to \mp\frac{2}{5^{3/2}}$ per $x \to 0^{\pm}$. Poiché $g(x,y)$ non tende a zero, f *non è differenziabile* in $(0,0)$.

3. Integrali tripli. Calcolare il volume e il momento d'inerzia di un solido omogeneo di massa m a forma di tronco di cono avente base maggiore di raggio R, base minore di raggio r e distanza tra le due basi h, rispetto al suo asse di simmetria. *Si raccomanda di: fare una figura, curare la rappresentazione analitica di Ω e l'impostazione del problema. Scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : z \in [0,h], x^2+y^2 \le r(z)^2\right\}$$

dove la funzione $r(z)$ è la funzione lineare:



$$r(z) = R - \frac{R-r}{h}z.$$

Perciò

$$
\begin{aligned}
|\Omega| &= \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int_0^h \left(\int\int_{x^2+y^2\le r(z)^2} dxdy\right) dz = \int_0^h \pi r\left(z\right)^2 dz \\
&= \pi \int_0^h \left(R - \frac{R-r}{h} z\right)^2 dz = \pi\left[-\frac{h}{3\left(R-r\right)}\left(R-\frac{R-r}{h}z\right)^3\right]_0^h \\
&= \pi\frac{h\left(R^3-r^3\right)}{3\left(R-r\right)} = \pi\frac{h\left(R^2+rR+r^2\right)}{3}.
\end{aligned}
$$

$$
I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int\int_{\Omega}\left(x^2+y^2\right) dxdydz = \frac{3m}{\pi h\left(R^2+rR+r^2\right)}\int_0^h\left(\int\int_{x^2+y^2\le r(z)^2}\left(x^2+y^2\right)dxdy\right)dz
$$

coordinate polari nell'integrale doppio

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3m}{\pi h\left(R^2+rR+r^2\right)}\int_0^h 2\pi\left(\int_0^{r(z)}\rho^3 d\rho\right)dz = \frac{3m}{h\left(R^2+rR+r^2\right)}\int_0^h 2\frac{\left(R-\frac{R-r}{h}z\right)^4}{4}dz \\
&= \frac{3m}{2h\left(R^2+rR+r^2\right)}\left[-\frac{h\left(R-\frac{R-r}{h}z\right)^5}{\left(R-r\right)5}\right]_0^h = \frac{3m}{10\left(R^2+rR+r^2\right)}\frac{\left(R^5-r^5\right)}{\left(R-r\right)} \\
&= \frac{3}{10}m\left(\frac{R^4+R^3r+R^2r^2+Rr^3+r^4}{R^2+rR+r^2}\right).
\end{aligned}
$$

4. Campi vettoriali. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$
\underline{F} = \left(x, y, xz\right)
$$

lungo l'arco di curva

$$
\gamma : \begin{cases} x = \operatorname{Ch} t \\ y = \operatorname{Sh} t \\ z = t \end{cases} \quad \text{per } t \in [0,2].
$$

Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

$$
\begin{aligned}
\underline{r}\left(t\right) &= \left(\operatorname{Ch} t, \operatorname{Sh} t, t\right) \\
\underline{r}'\left(t\right) &= \left(\operatorname{Sh} t, \operatorname{Ch} t, 1\right) \\
\underline{F}\left(x,y,z\right) &= \left(x,y,xz\right) \\
\underline{F}\left(\underline{r}\left(t\right)\right) &= \left(\operatorname{Ch} t, \operatorname{Sh} t, t\operatorname{Ch} t\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_0^2 \underline{F}\left(\underline{r}\left(t\right)\right)\cdot\underline{r}'\left(t\right)dt \\
&= \int_0^2 \left(\operatorname{Ch} t, \operatorname{Sh} t, t\operatorname{Ch} t\right)\cdot\left(\operatorname{Sh} t, \operatorname{Ch} t, 1\right)dt \\
&= \int_0^2 \left(2\operatorname{Ch} t\operatorname{Sh} t + t\operatorname{Ch} t\right)dt = A + B.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \left[\operatorname{Sh}^2 t\right]_0^2 = \operatorname{Sh}^2 2. \\
B &= \int_0^2 t \operatorname{Ch} t dt = [t \operatorname{Sh} t]_0^2 - \int_0^2 \operatorname{Sh} t dt \\
&= 2 \operatorname{Sh} 2 - \operatorname{Ch} 2 + 1.
\end{aligned}
$$

$$
L = \operatorname{Sh}^2 2 + 2 \operatorname{Sh} 2 - \operatorname{Ch} 2 + 1.
$$

5. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie materiale omogenea di massa m rappresentata dal grafico della funzione

$$
z = \frac{xy}{R} \text{ con } x^2 + y^2 \leq 3R^2
$$

(dove $R > 0$ è una costante avente le dimensioni di una lughezza). Calcolare l'area di Σ e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z. *Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.*

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{xy}{R}; \nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{R}, \frac{x}{R}\right) \\
dS &= \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} dxdy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\Sigma| &= \int\int_\Sigma dS = \int\int_{x^2+y^2 \leq 3R^2} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} dxdy \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}R} \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{R^2}} \rho d\rho = 2\pi \left[\frac{R^2}{3}\left(1 + \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}R} \\
&= 2\pi \frac{R^2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} \pi R^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{m}{|\Sigma|} \int\int_\Sigma \left(x^2 + y^2\right) dS = \frac{3m}{14\pi R^2} \int\int_{x^2+y^2 \leq 3R^2} \left(x^2 + y^2\right) \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} dxdy \\
&= \frac{3m}{14\pi R^2} 2\pi \int_0^{\sqrt{3}R} \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{R^2}} \rho^3 d\rho \\
&\left[\frac{\rho^2}{R^2} = t; \frac{2\rho}{R^2} d\rho = dt; t \in [0, 4]\right] \\
&= \frac{3m}{7R^2} \int_0^3 \sqrt{1 + t} \left(tR^2\right) \frac{R^2}{2} dt = \frac{3R^2 m}{14} \int_0^3 t\sqrt{1 + t} dt \\
&= \frac{3R^2 m}{14} \left\{\left[\frac{2}{3} t (1 + t)^{3/2}\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{2}{3} (1 + t)^{3/2} dt\right\} \\
&= \frac{3R^2 m}{14} \left\{16 - \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} (1 + t)^{5/2}\right]_0^3\right\} = \frac{3R^2 m}{14} \left\{16 - \frac{4}{15} \cdot 31\right\} \\
&= \frac{3R^2 m}{7} \left(8 - \frac{62}{15}\right) = \frac{58}{35} m R^2.
\end{aligned}
$$