

**Recupero sulla prima prova in itinere
di Analisi Matematica 2**
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello) _____
codice persona (o n° di matricola) _____
n° d'ordine (v. elenco) _____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 4y \cos x = 2 \cos^3 x \\ y(0) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

dopo aver determinato a priori l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y' + 9y = 4 \sin x,$$

riportando chiaramente i passaggi.

3. Curve e integrali di linea. Si consideri la curva piana γ di equazione polare:

$$\rho = \cos^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \text{ per } \theta \in [0, 3\pi].$$

- a. Stabilire se la curva è regolare, o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari *della curva* (non i valori singolari del parametro).
- b. Calcolare la lunghezza della curva.

4. Calcolo differenziale per funzioni di due variabili. Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x \sin^2 x + xy^5}{x^2 + 3y^4} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a. Stabilire se f è continua in $(0, 0)$.
- b. Stabilire se f è derivabile in $(0, 0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0, 0)$.
- c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}}f(0, 0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$. A posteriori, la formula del gradiente vale?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = e^{-x^2} (x^2 + (y - 2)^2).$$

**Recupero sulla seconda prova in itinere
di Analisi Matematica 2**

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello) _____ codice persona (o n° di matricola) _____ n° d'ordine (v. elenco) _____
--

1. Integrali doppi. Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_{\Omega} e^{-x^2} \frac{x^3 y}{(x^2 + 4y^2)^2} dx dy$$

sul dominio (quarto di ellisse)

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Si raccomanda di fare una figura e riportare l'impostazione analitica e i passaggi.

2. Integrali tripli. Calcolare il volume e il momento d'inerzia del solido omogeneo di massa m (piramide a base quadrata) descritta da

$$\Omega = \{(x, y, z) : z \in [0, h], |x| + |y| \leq z\}$$

rispetto all'asse z . *Si raccomanda di: fare una figura e curare l'impostazione del problema. Scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.*

3. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z (per un giro completo) la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche (quarto di ellisse):

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ z = 2R \sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $R > 0$ costanti fissate. Si calcoli l'elemento d'area su Σ , si scrivano le equazioni parametriche di Σ e si calcoli l'integrale di superficie:

$$\int \int_{\Sigma} x^2 z dS.$$

4. Formule di Gauss-Green. Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana di equazione in forma polare

$$\rho = R\theta \cos \theta, \text{ per } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

(dove R è una costante positiva avente le dimensioni di una lunghezza) utilizzando la formula dedotta dal teorema di Gauss-Green.

5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione 6-periodica definita in $[-3, 3]$ da

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{se } |x| > 2 \\ 0 & \text{se } |x| \leq 2 \end{cases}$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f , in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f , tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.

Analisi Matematica 2. Appello di febbraio 2026

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello) _____
codice persona (o n° di matricola) _____
n° d'ordine (v. elenco) _____

1. Equazioni differenziali del second'ordine. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y' + 9y = 4 \sin x,$$

riportando chiaramente i passaggi.

2. Curve e integrali di linea. Si consideri la curva piana γ di equazione polare:

$$\rho = \cos^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \text{ per } \theta \in [0, 3\pi].$$

a. Stabilire se la curva è regolare, o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari *della curva* (non i valori singolari del parametro).

b. Calcolare la lunghezza della curva.

3. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = e^{-x^2} (x^2 + (y - 2)^2).$$

4. Integrali doppi. Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_{\Omega} e^{-x^2} \frac{x^3 y}{(x^2 + 4y^2)^2} dx dy$$

sul dominio (quarto di ellisse)

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Si raccomanda di fare una figura e riportare l'impostazione analitica e i passaggi.

5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione 6-periodica definita in $[-3, 3]$ da

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{se } |x| > 2 \\ 0 & \text{se } |x| \leq 2 \end{cases}$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f , in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f , tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.

Analisi Matematica 2. Appello di febbraio 2026

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello) _____
codice persona (o n° di matricola) _____
n° d'ordine (v. elenco) _____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 4y \cos x = 2 \cos^3 x \\ y(0) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

dopo aver determinato a priori l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

2. Calcolo differenziale per funzioni di due variabili. Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x \sin^2 x + xy^5}{x^2 + 3y^4} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Stabilire se f è continua in $(0, 0)$.
- Stabilire se f è derivabile in $(0, 0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0, 0)$.
- Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}}f(0, 0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$. A posteriori, la formula del gradiente vale?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

3. Integrali tripli. Calcolare il volume e il momento d'inerzia del solido omogeneo di massa m (piramide a base quadrata) descritta da

$$\Omega = \{(x, y, z) : z \in [0, h], |x| + |y| \leq z\}$$

rispetto all'asse z . *Si raccomanda di: fare una figura e curare l'impostazione del problema. Scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.*

4. Formule di Gauss-Green. Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana di equazione in forma polare

$$\rho = R\theta \cos \theta, \text{ per } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

(dove R è una costante positiva avente le dimensioni di una lunghezza) utilizzando la formula dedotta dal teorema di Gauss-Green

5. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z (per un giro completo) la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche (quarto di ellisse):

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ z = 2R \sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $R > 0$ costanti fissate. Si calcoli l'elemento d'area su Σ , si scrivano le equazioni parametriche di Σ e si calcoli l'integrale di superficie:

$$\int \int_{\Sigma} x^2 z dS.$$

**Recupero sulla prima prova in itinere
di Analisi Matematica 2**
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	7
2	6
3	7
4	7
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 4y \cos x = 2 \cos^3 x \\ y(0) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

dopo aver determinato a priori l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui su tutto $\mathbb{R}$: la soluzione del problema di Cauchy sarà definita su tutto $\mathbb{R}$.

$$a(x) = -4 \cos x$$

$$A(x) = \int a(x) dx = -4 \sin x$$

$$y(x) = e^{4 \sin x} \left\{ c + 2 \int e^{-4 \sin x} \cos^3 x dx \right\}.$$

$$\begin{aligned} \int e^{-4 \sin x} \cos^3 x dx &= \int e^{-4 \sin x} \cos x (1 - \sin^2 x) dx = (\sin x = t; \cos x dx = dt) \\ &= \int e^{-4t} (1 - t^2) dt = -\frac{1}{4} e^{-4t} (1 - t^2) - \int -\frac{1}{4} e^{-4t} (-2t) dt \\ &= -\frac{1}{4} e^{-4t} (1 - t^2) - \frac{1}{2} \int e^{-4t} t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4} e^{-4t} (1 - t^2) - \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{4} e^{-4t} t + \int \frac{1}{4} e^{-4t} dt \right\} \\ &= -\frac{1}{4} e^{-4t} (1 - t^2) - \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{4} e^{-4t} t - \frac{1}{16} e^{-4t} \right\} \\ &= \frac{1}{4} e^{-4t} \left(-1 + t^2 + \frac{1}{2} t + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{32} e^{-4t} (8t^2 + 4t - 7) \\ &= \frac{1}{32} e^{-4 \sin x} (8 \sin^2 x + 4 \sin x - 7). \end{aligned}$$

e l'integrale generale è:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{4 \sin x} \left\{ c + \frac{1}{16} e^{-4 \sin x} (8 \sin^2 x + 4 \sin x - 7) \right\} \\ &= c e^{4 \sin x} + \frac{1}{16} (8 \sin^2 x + 4 \sin x - 7) \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione di Cauchy:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= y(0) = c - \frac{7}{16} \\ c &= \frac{15}{16}.\end{aligned}$$

La soluzione del problema è:

$$y(x) = \frac{15}{16}e^{4\sin x} + \frac{1}{16}(8\sin^2 x + 4\sin x - 7).$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y' + 9y = 4\sin x.$$

Equazione omogenea:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + 4\alpha + 9 &= 0 \\ \alpha &= -2 \pm i\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{-2x} \left(c_1 \cos(\sqrt{5}x) + c_2 \sin(\sqrt{5}x) \right).$$

Equazione completa, metodo di somiglianza. Poiché il termine noto non risolve l'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare del tipo:

$$\begin{aligned}\bar{y}(x) &= a \cos x + b \sin x, \\ \bar{y}'(x) &= -a \sin x + b \cos x \\ \bar{y}''(x) &= -a \cos x - b \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-a \cos x - b \sin x) + 4(-a \sin x + b \cos x) + 9(a \cos x + b \sin x) &= 4 \sin x. \\ \begin{cases} -a + 4b + 9a = 0 \\ -b - 4a + 9b = 4 \end{cases} &\quad \begin{cases} 8a + 4b = 0 \\ -4a + 8b = 4 \end{cases} &\quad \begin{cases} b = -2a \\ -a + 2b = 1 \end{cases} &\quad \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione completa è:

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = -\frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x + e^{-2x} \left(c_1 \cos(\sqrt{5}x) + c_2 \sin(\sqrt{5}x) \right).$$

3. Curve e integrali di linea. Si consideri la curva piana γ di equazione polare:

$$\rho = \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) \text{ per } \theta \in [0, 3\pi].$$

- a. Stabilire se la curva è regolare, o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari *della curva* (non i valori singolari del parametro).
- b. Calcolare la lunghezza della curva.

$$\begin{aligned}\rho' &= -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \\ ds &= \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = \sqrt{\cos^4\left(\frac{\theta}{3}\right) + \frac{4}{9} \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)} d\theta \\ &= \left| \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \right| \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) + \frac{4}{9} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)} d\theta \\ &= \left| \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \right| \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)} d\theta\end{aligned}$$

Poiché $\left| \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \right| = 0$ per $\theta = \frac{3}{2}\pi$ e $\rho\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$, l'origine è punto singolare della curva.

b.

$$\begin{aligned}L &= \int_{\gamma} ds = \int_0^{3\pi} \left| \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \right| \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)} d\theta \\ \frac{\theta}{3} &= t \\ &= 3 \int_0^{\pi} |\cos t| \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2 t} dt = 6 \int_0^{\pi/2} \cos t \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2 t} dt \\ \sin t &= u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 6 \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{5}{9} u^2} du \\ u &= \frac{3}{\sqrt{5}} \sin x \\ &= 6 \int_0^{\arcsin(\sqrt{5}/3)} \sqrt{1 - \sin^2 x} \frac{3}{\sqrt{5}} \cos x dx = \frac{18}{\sqrt{5}} \int_0^{\arcsin(\sqrt{5}/3)} \cos^2 x dx \\ &= \frac{18}{\sqrt{5}} \left[\frac{\sin x \cos x + x}{2} \right]_0^{\arcsin(\sqrt{5}/3)} = \frac{9}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \cos\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right) + \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \right) \\ &= \frac{9}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2}{3} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \right) = 2 + \frac{9}{\sqrt{5}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right).\end{aligned}$$

4. Calcolo differenziale per funzioni di due variabili. Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x \sin^2 x + xy^5}{x^2 + 3y^4} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a. Stabilire se f è continua in $(0, 0)$.
- b. Stabilire se f è derivabile in $(0, 0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0, 0)$.
- c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}}f(0, 0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$. A posteriori, la formula del gradiente vale?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$|f(x, y)| \leq \frac{|2x \sin^2 x|}{x^2 + 3y^4} + \frac{|xy^5|}{x^2 + 3y^4} \leq \frac{|2x \sin^2 x|}{x^2} + \frac{|xy^5|}{3y^4} = 2|x| \frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{1}{3}|xy| \rightarrow 0 \text{ per } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

e per il teorema del confronto questo è anche il limite di f in $(0, 0)$, quindi la funzione è continua.

b.

$$f(x, 0) = \frac{2x \sin^2 x}{x^2} \sim 2x,$$

quindi esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2$;

$$f(0, y) = 0,$$

quindi esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Perciò f è derivabile nell'origine con $\nabla f(0, 0) = (2, 0)$.

c. Sia $\underline{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ e

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t \cos \theta, t \sin \theta) \\ &= \frac{2t \cos \theta \sin^2(t \cos \theta) + t \cos \theta (t \sin \theta)^5}{(t \cos \theta)^2 + 3(t \sin \theta)^4} \\ &= \frac{2 \sin^2(t \cos \theta) \cos \theta}{t [\cos^2 \theta + 3t^2 \sin^4 \theta]} + t^4 \frac{\cos \theta \sin^5 \theta}{\cos^2 \theta + 3t^2 \sin^4 \theta} \\ &\sim t \frac{2 \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta + 3t^2 \sin^4 \theta} \sim 2t \cos \theta \text{ per } t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

purché sia $\cos \theta \neq 0$. Quindi per $\cos \theta \neq 0$

$$D_{\underline{v}}f(0, 0) = g'(0) = 2 \cos \theta.$$

Se poi $\cos \theta = 0$ allora $g(t) \equiv 0$ e $D_{\underline{v}}f(0, 0) = 0$.

Poiché

$$\nabla f(0, 0) \cdot \underline{v} = (2, 0) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = 2 \cos \theta,$$

a posteriori la formula del gradiente vale.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = e^{-x^2} (x^2 + (y - 2)^2).$$

$$\begin{cases} f_x = e^{-x^2} (-2x(x^2 + (y - 2)^2) + 2x) = 0 \\ f_y = e^{-x^2} 2(y - 2) = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

quindi la prima equazione dà

$$\begin{aligned} -2x^3 + 2x &= 0 \\ -2x(x^2 - 1) &= 0 \\ x &= 0, x = 1, x = -1 \end{aligned}$$

e i punti stazionari sono:

$$(0, 2), (1, 2), (-1, 2).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2e^{-x^2} (2x^2 (x^2 + (y - 2)^2) - 2x^2 - 3x^2 - (y - 2)^2 + 1) \\ f_{xy} &= e^{-x^2} (-4x(y - 2)) \\ f_{yy} &= e^{-x^2} 2 \end{aligned}$$

Poiché in tutti e tre i punti da studiare è $y = 2$, tanto vale scrivere

$$Hf(x, 2) = 2e^{-x^2} \begin{bmatrix} 2x^4 - 5x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$\begin{aligned} Hf(0, 2) &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ definita positiva,} \\ (0, 2) &\text{ è punto di minimo relativo.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hf(1, 2) &= 2e^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ indefinita,} \\ (-1, 0) &\text{ è punto di sella.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hf(-1, 2) &= 2e^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ indefinita,} \\ (-1, 2) &\text{ è punto di sella.} \end{aligned}$$

**Recupero sulla seconda prova in itinere
di Analisi Matematica 2**

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Svolgimento

Es.	Punti
1	6
2	7
3	7
4	6
5	7
Tot.	33

1. Integrali doppi. Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_{\Omega} e^{-x^2} \frac{x^3 y}{(x^2 + 4y^2)^2} dx dy$$

sul dominio (quarto di ellisse)

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Si raccomanda di fare una figura e riportare l'impostazione analitica e i passaggi.

Introduciamo le coordinate ellittiche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \frac{\rho}{2} \sin \theta \end{cases} \quad dx dy = \frac{\rho}{2} d\rho d\theta$$

$$\tilde{\Omega} = \{(\rho, \theta) : \rho \in [0, 1], \theta \in [0, \pi/2]\}$$

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} e^{-x^2} \frac{x^3 y}{(x^2 + 4y^2)^2} dx dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 e^{-\rho^2 \cos^2 \theta} \frac{\rho^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{2\rho^4} \frac{1}{2} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta \left(\int_0^1 e^{-\rho^2 \cos^2 \theta} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta \left[-\frac{e^{-\rho^2 \cos^2 \theta}}{2 \cos^2 \theta} \right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \left(1 - e^{-\cos^2 \theta} \right) d\theta \\ \cos \theta &= t \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 t \left(1 - e^{-t^2} \right) dt = \frac{1}{8} \left[\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{16} (1 + e^{-1} - 1) = \frac{1}{16e}. \end{aligned}$$

2. Integrali tripli. Calcolare il volume e il momento d'inerzia del solido omogeneo di massa m (piramide a base quadrata) descritta da

$$\Omega = \{(x, y, z) : z \in [0, h], |x| + |y| \leq z\}$$

rispetto all'asse z . Si raccomanda di: fare una figura e curare l'impostazione del problema. Scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.

La piramide ha vertice nell'origine, altezza h e base quadrata di semidiagonale h , quindi lato $h\sqrt{2}$, area di base $2h^2$ e volume

$$|\Omega| = \frac{1}{3} 2h^2 \cdot h = \frac{2}{3} h^3.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse z è:

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{|\Omega|} \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \frac{3m}{2h^3} \int_0^h \left(\int \int_{|x|+|y| \leq z} (x^2 + y^2) dx dy \right) dz \end{aligned}$$

per simmetria

$$\begin{aligned} &= \frac{3m}{2h^3} \int_0^h \left(4 \int \int_{x+y \leq z, x \geq 0, y \geq 0} (x^2 + y^2) dx dy \right) dz \\ &= \frac{3m}{2h^3} \int_0^h \left(8 \int \int_{x+y \leq z, x \geq 0, y \geq 0} x^2 dx dy \right) dz \\ &= \frac{12m}{h^3} \int_0^h \left(\int_0^z \left(\int_0^{z-y} x^2 dx \right) dy \right) dz \\ &= \frac{12m}{h^3} \int_0^h \left(\int_0^z \frac{(z-y)^3}{3} dy \right) dz \\ &= \frac{12m}{h^3} \int_0^h \left[-\frac{(z-y)^4}{12} \right]_0^z dz \\ &= \frac{m}{h^3} \int_0^h z^4 dz = \frac{m}{h^3} \frac{h^5}{5} = \frac{1}{5} m h^2. \end{aligned}$$

3. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z (per un giro completo) la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche (quarto di ellisse):

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ z = 2R \sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $R > 0$ costanti fissate. Si calcoli l'elemento d'area su Σ , si scrivano le equazioni parametriche di Σ e si calcoli l'integrale di superficie:

$$\int \int_{\Sigma} x^2 z dS.$$

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = R \cos t \\ z = b(t) = 2R \sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\begin{aligned}
dS &= a(t) \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} dt d\theta \\
&= R \cos t \sqrt{R^2 \sin^2 t + 4R^2 \cos^2 t} dt d\theta
\end{aligned}$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = R \cos t \cos \theta \\ y = R \cos t \sin \theta \\ z = 2R \sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned}
\int \int_{\Sigma} x^2 z dS &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} (R \cos t \cos \theta)^2 (2R \sin t) R \cos t \sqrt{R^2 \sin^2 t + 4R^2 \cos^2 t} dt \right) d\theta \\
&= 2R^5 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin t \sqrt{(1 - \cos^2 t) + 4 \cos^2 t} dt \right) \\
&= 2R^5 \pi \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin t \sqrt{1 + 3 \cos^2 t} dt \\
&[\cos t = u; -\sin t dt = du; u \in [1, 0]] \\
&= 2R^5 \pi \int_0^1 u^3 \sqrt{1 + 3u^2} du \\
\sqrt{1 + 3u^2} &= s; 1 + 3u^2 = s^2; 6udu = 2sds; udu = \frac{1}{3}sds; u^2 = \frac{s^2 - 1}{3}; s \in [1, 2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2R^5 \pi \int_0^1 u^3 \sqrt{1 + 3u^2} du &= 2R^5 \pi \int_1^2 \frac{s^2 - 1}{3} \cdot s \cdot \frac{1}{3} sds \\
&= \frac{2}{9} R^5 \pi \int_1^2 (s^4 - s^2) ds \\
&= \frac{2}{9} R^5 \pi \left[\frac{s^5}{5} - \frac{s^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2}{9} R^5 \pi \left(\frac{32 - 1}{5} - \frac{8 - 1}{3} \right) \\
&= \frac{2}{9} R^5 \pi \left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3} \right) = \frac{2}{9} R^5 \pi \left(\frac{58}{15} \right) = \frac{116}{135} \pi R^5.
\end{aligned}$$

4. Formule di Gauss-Green. Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana di equazione in forma polare

$$\rho = R\theta \cos \theta, \text{ per } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

(dove R è una costante positiva avente le dimensioni di una lunghezza) utilizzando la formula dedotta dal teorema di Gauss-Green

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} R^2 \theta^2 \cos^2 \theta d\theta \\
&= \frac{R^2}{2} \int_0^{\pi/2} \theta^2 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{R^2}{4} \int_0^{\pi} [\theta^2 + \theta^2 \cos 2\theta] d\theta.
\end{aligned}$$

Ora:

$$\int_0^\pi \theta^2 d\theta = \frac{\pi^3}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \theta^2 \cos 2\theta d\theta &= \left[\theta^2 \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\theta \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = - \int_0^{\pi/2} \theta \sin 2\theta d\theta \\ &= - \left\{ \left[-\theta \frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{2} d\theta \right\} = -\frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\text{Area} = \frac{R^2}{4} \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi R^2}{4} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi R^2}{48} (4\pi^2 - 9).$$

5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione 6-periodica definita in $[-3, 3]$ da

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{se } |x| > 2 \\ 0 & \text{se } |x| \leq 2 \end{cases}$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f , in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f , tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.

a. La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[-3, 3]$. I coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{k}\right)$.

b. La funzione è pari, perciò $b_k = 0$ per ogni k . Per calcolare gli a_k , poiché $T = 6$, $\omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx = \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_2^3 (x - 2) \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right) dx \\ a_0 &= \frac{2}{3} \int_2^3 (x - 2) dx = \frac{2}{3} \left[\frac{(x - 2)^2}{2} \right]_2^3 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Per $k \geq 1$, integrando per parti,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{3} \left\{ \left[(x - 2) \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)}{\frac{k\pi}{3}} \right]_2^3 - \int_2^3 \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)}{\frac{k\pi}{3}} dx \right\} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{k\pi} \left[\frac{\cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right)}{\frac{k\pi}{3}} \right]_2^3 = \frac{6}{k^2\pi^2} \left(\cos(k\pi) - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \right). \end{aligned}$$

La serie di Fourier di f è

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\cos(k\pi) - \cos(\frac{2k\pi}{3}))}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right). \end{aligned}$$

Analisi Matematica 2. Appello di febbraio 2026

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	6
2	7
3	7
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del second'ordine. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y' + 9y = 4 \sin x.$$

Equazione omogenea:

$$\alpha^2 + 4\alpha + 9 = 0$$

$$\alpha = -2 \pm i\sqrt{5}.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{-2x} \left(c_1 \cos(\sqrt{5}x) + c_2 \sin(\sqrt{5}x) \right).$$

Equazione completa, metodo di somiglianza. Poiché il termine noto non risolve l'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare del tipo:

$$\bar{y}(x) = a \cos x + b \sin x,$$

$$\bar{y}'(x) = -a \sin x + b \cos x$$

$$\bar{y}''(x) = -a \cos x - b \sin x$$

$$(-a \cos x - b \sin x) + 4(-a \sin x + b \cos x) + 9(a \cos x + b \sin x) = 4 \sin x.$$

$$\begin{cases} -a + 4b + 9a = 0 \\ -b - 4a + 9b = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 8a + 4b = 0 \\ -4a + 8b = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -2a \\ -a + 2b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione completa è:

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = -\frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x + e^{-2x} \left(c_1 \cos(\sqrt{5}x) + c_2 \sin(\sqrt{5}x) \right).$$

2. Curve e integrali di linea. Si consideri la curva piana γ di equazione polare:

$$\rho = \cos^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \text{ per } \theta \in [0, 3\pi].$$

a. Stabilire se la curva è regolare, o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari *della curva* (non i valori singolari del parametro).

b. Calcolare la lunghezza della curva.

$$\begin{aligned} \rho' &= -\frac{2}{3} \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \sin \left(\frac{\theta}{3} \right) \\ ds &= \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = \sqrt{\cos^4 \left(\frac{\theta}{3} \right) + \frac{4}{9} \cos^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \sin^2 \left(\frac{\theta}{3} \right)} d\theta \\ &= \left| \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \right| \sqrt{\cos^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) + \frac{4}{9} \sin^2 \left(\frac{\theta}{3} \right)} d\theta \\ &= \left| \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \right| \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2 \left(\frac{\theta}{3} \right)} d\theta \end{aligned}$$

Poiché $\left| \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \right| = 0$ per $\theta = \frac{3}{2}\pi$ e $\rho \left(\frac{3}{2}\pi \right) = 0$, l'origine è punto singolare della curva.

b.

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} ds = \int_0^{3\pi} \left| \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \right| \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2 \left(\frac{\theta}{3} \right)} d\theta \\ \frac{\theta}{3} &= t \\ &= 3 \int_0^{\pi} |\cos t| \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2 t} dt = 6 \int_0^{\pi/2} \cos t \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2 t} dt \\ \sin t &= u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 6 \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{5}{9} u^2} du \\ u &= \frac{3}{\sqrt{5}} \sin x \\ &= 6 \int_0^{\arcsin(\sqrt{5}/3)} \sqrt{1 - \sin^2 x} \frac{3}{\sqrt{5}} \cos x dx = \frac{18}{\sqrt{5}} \int_0^{\arcsin(\sqrt{5}/3)} \cos^2 x dx \\ &= \frac{18}{\sqrt{5}} \left[\frac{\sin x \cos x + x}{2} \right]_0^{\arcsin(\sqrt{5}/3)} = \frac{9}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \cos \left(\arcsin \left(\sqrt{5}/3 \right) \right) + \arcsin \left(\sqrt{5}/3 \right) \right) \\ &= \frac{9}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2}{3} + \arcsin \left(\sqrt{5}/3 \right) \right) = 2 + \frac{9}{\sqrt{5}} \arcsin \left(\sqrt{5}/3 \right). \end{aligned}$$

3. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = e^{-x^2} (x^2 + (y - 2)^2).$$

$$\begin{cases} f_x = e^{-x^2} (-2x (x^2 + (y - 2)^2) + 2x) = 0 \\ f_y = e^{-x^2} 2(y - 2) = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

quindi la prima equazione dà

$$\begin{aligned} -2x^3 + 2x &= 0 \\ -2x(x^2 - 1) &= 0 \\ x &= 0, x = 1, x = -1 \end{aligned}$$

e i punti stazionari sono:

$$(0, 2), (1, 2), (-1, 2).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2e^{-x^2} (2x^2 (x^2 + (y - 2)^2) - 2x^2 - 3x^2 - (y - 2)^2 + 1) \\ f_{xy} &= e^{-x^2} (-4x(y - 2)) \\ f_{yy} &= e^{-x^2} 2 \end{aligned}$$

Poiché in tutti e tre i punti da studiare è $y = 2$, tanto vale scrivere

$$Hf(x, 2) = 2e^{-x^2} \begin{bmatrix} 2x^4 - 5x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$\begin{aligned} Hf(0, 2) &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ definita positiva,} \\ (0, 2) &\text{ è punto di minimo relativo.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hf(1, 2) &= 2e^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ indefinita,} \\ (-1, 2) &\text{ è punto di sella.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hf(-1, 2) &= 2e^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ indefinita,} \\ (-1, 2) &\text{ è punto di sella.} \end{aligned}$$

4. Integrali doppi. Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_{\Omega} e^{-x^2} \frac{x^3 y}{(x^2 + 4y^2)^2} dx dy$$

sul dominio (quarto di ellisse)

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Si raccomanda di fare una figura e riportare l'impostazione analitica e i passaggi.

Introduciamo le coordinate ellittiche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \frac{\rho}{2} \sin \theta \end{cases} \quad dxdy = \frac{\rho}{2} d\rho d\theta$$

$$\tilde{\Omega} = \{(\rho, \theta) : \rho \in [0, 1], \theta \in [0, \pi/2]\}$$

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} e^{-x^2} \frac{x^3 y}{(x^2 + 4y^2)^2} dxdy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 e^{-\rho^2 \cos^2 \theta} \frac{\rho^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{2\rho^4} \frac{1}{2} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta \left(\int_0^1 e^{-\rho^2 \cos^2 \theta} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta \left[-\frac{e^{-\rho^2 \cos^2 \theta}}{2 \cos^2 \theta} \right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \left(1 - e^{-\cos^2 \theta} \right) d\theta \\ \cos \theta &= t \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 t \left(1 - e^{-t^2} \right) dt = \frac{1}{8} \left[\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{16} (1 + e^{-1} - 1) = \frac{1}{16e}. \end{aligned}$$

5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione 6-periodica definita in $[-3, 3]$ da

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{se } |x| > 2 \\ 0 & \text{se } |x| \leq 2 \end{cases}$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f , in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f , tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi ed il risultato, nella forma più esplicita e semplificata.

a. La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[-3, 3]$. I coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{k}\right)$.

b. La funzione è pari, perciò $b_k = 0$ per ogni k . Per calcolare gli a_k , poiché $T = 6$, $\omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx = \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_2^3 (x-2) \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right) dx \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{3} \int_2^3 (x-2) dx = \frac{2}{3} \left[\frac{(x-2)^2}{2} \right]_2^3 = \frac{1}{3}.$$

Per $k \geq 1$, integrando per parti,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{3} \left\{ \left[(x-2) \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)}{\frac{k\pi}{3}} \right]_2^3 - \int_2^3 \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)}{\frac{k\pi}{3}} dx \right\} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{k\pi} \left[\frac{\cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right)}{\frac{k\pi}{3}} \right]_2^3 = \frac{6}{k^2\pi^2} \left(\cos(k\pi) - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \right). \end{aligned}$$

La serie di Fourier di f è

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\cos(k\pi) - \cos(\frac{2k\pi}{3}))}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right). \end{aligned}$$

Analisi Matematica 2. Appello di febbraio 2026

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	7
2	7
3	6
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 4y \cos x = 2 \cos^3 x \\ y(0) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

dopo aver determinato a priori l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui su tutto $\mathbb{R}$: la soluzione del problema di Cauchy sarà definita su tutto $\mathbb{R}$.

$$a(x) = -4 \cos x$$

$$A(x) = \int a(x) dx = -4 \sin x$$

$$y(x) = e^{4 \sin x} \left\{ c + 2 \int e^{-4 \sin x} \cos^3 x dx \right\}.$$

$$\begin{aligned} \int e^{-4 \sin x} \cos^3 x dx &= \int e^{-4 \sin x} \cos x (1 - \sin^2 x) dx = (\sin x = t; \cos x dx = dt) \\ &= \int e^{-4t} (1 - t^2) dt = -\frac{1}{4} e^{-4t} (1 - t^2) - \int -\frac{1}{4} e^{-4t} (-2t) dt \\ &= -\frac{1}{4} e^{-4t} (1 - t^2) - \frac{1}{2} \int e^{-4t} t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4} e^{-4t} (1 - t^2) - \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{4} e^{-4t} t + \int \frac{1}{4} e^{-4t} dt \right\} \\ &= -\frac{1}{4} e^{-4t} (1 - t^2) - \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{4} e^{-4t} t - \frac{1}{16} e^{-4t} \right\} \\ &= \frac{1}{4} e^{-4t} \left(-1 + t^2 + \frac{1}{2} t + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{32} e^{-4t} (8t^2 + 4t - 7) \\ &= \frac{1}{32} e^{-4 \sin x} (8 \sin^2 x + 4 \sin x - 7). \end{aligned}$$

e l'integrale generale è:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{4 \sin x} \left\{ c + \frac{1}{16} e^{-4 \sin x} (8 \sin^2 x + 4 \sin x - 7) \right\} \\ &= c e^{4 \sin x} + \frac{1}{16} (8 \sin^2 x + 4 \sin x - 7) \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione di Cauchy:

$$\frac{1}{2} = y(0) = c - \frac{7}{16}$$

$$c = \frac{15}{16}.$$

La soluzione del problema è:

$$y(x) = \frac{15}{16} e^{4 \sin x} + \frac{1}{16} (8 \sin^2 x + 4 \sin x - 7).$$

2. Calcolo differenziale per funzioni di due variabili. Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x \sin^2 x + xy^5}{x^2 + 3y^4} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0, 0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0, 0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0, 0)$.

c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_v f(0, 0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$. A posteriori, la formula del gradiente vale?

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$|f(x, y)| \leq \frac{|2x \sin^2 x|}{x^2 + 3y^4} + \frac{|xy^5|}{x^2 + 3y^4} \leq \frac{|2x \sin^2 x|}{x^2} + \frac{|xy^5|}{3y^4} = 2|x| \frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{1}{3}|xy| \rightarrow 0 \text{ per } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

e per il teorema del confronto questo è anche il limite di f in $(0, 0)$, quindi la funzione è continua.

b.

$$f(x, 0) = \frac{2x \sin^2 x}{x^2} \sim 2x,$$

quindi esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2$;

$$f(0, y) = 0,$$

quindi esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Perciò f è derivabile nell'origine con $\nabla f(0, 0) = (2, 0)$.

c. Sia $\underline{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ e

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t \cos \theta, t \sin \theta) \\ &= \frac{2t \cos \theta \sin^2(t \cos \theta) + t \cos \theta (t \sin \theta)^5}{(t \cos \theta)^2 + 3(t \sin \theta)^4} \\ &= \frac{2 \sin^2(t \cos \theta) \cos \theta}{t [\cos^2 \theta + 3t^2 \sin^4 \theta]} + t^4 \frac{\cos \theta \sin^5 \theta}{\cos^2 \theta + 3t^2 \sin^4 \theta} \\ &\sim t \frac{2 \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta + 3t^2 \sin^4 \theta} \sim 2t \cos \theta \text{ per } t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

purché sia $\cos \theta \neq 0$. Quindi per $\cos \theta \neq 0$

$$D_{\underline{v}} f(0, 0) = g'(0) = 2 \cos \theta.$$

Se poi $\cos \theta = 0$ allora $g(t) \equiv 0$ e $D_{\underline{v}} f(0, 0) = 0$.

Poiché

$$\nabla f(0, 0) \cdot \underline{v} = (2, 0) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = 2 \cos \theta,$$

a posteriori la formula del gradiente vale.

3. Integrali tripli. Calcolare il volume e il momento d'inerzia del solido omogeneo di massa m (piramide a base quadrata) descritta da

$$\Omega = \{(x, y, z) : z \in [0, h], |x| + |y| \leq z\}$$

rispetto all'asse z . *Si raccomanda di: fare una figura e curare l'impostazione del problema. Scrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.*

La piramide ha vertice nell'origine, altezza h e base quadrata di semidiagonale h , quindi lato $h\sqrt{2}$, area di base $2h^2$ e volume

$$|\Omega| = \frac{1}{3} 2h^2 \cdot h = \frac{2}{3} h^3.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse z è:

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{|\Omega|} \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \frac{3m}{2h^3} \int_0^h \left(\int \int_{|x|+|y| \leq z} (x^2 + y^2) dx dy \right) dz \end{aligned}$$

per simmetria

$$\begin{aligned} &= \frac{3m}{2h^3} \int_0^h \left(4 \int \int_{x+y \leq z, x \geq 0, y \geq 0} (x^2 + y^2) dx dy \right) dz \\ &= \frac{3m}{2h^3} \int_0^h \left(8 \int \int_{x+y \leq z, x \geq 0, y \geq 0} x^2 dx dy \right) dz \\ &= \frac{12m}{h^3} \int_0^h \left(\int_0^z \left(\int_0^{z-y} x^2 dx \right) dy \right) dz \\ &= \frac{12m}{h^3} \int_0^h \left(\int_0^z \frac{(z-y)^3}{3} dy \right) dz \\ &= \frac{12m}{h^3} \int_0^h \left[-\frac{(z-y)^4}{12} \right]_0^z dz \\ &= \frac{m}{h^3} \int_0^h z^4 dz = \frac{m}{h^3} \frac{h^5}{5} = \frac{1}{5} m h^2. \end{aligned}$$

4. Formule di Gauss-Green. Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana di equazione in forma polare

$$\rho = R\theta \cos \theta, \text{ per } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

(dove R è una costante positiva avente le dimensioni di una lunghezza) utilizzando la formula dedotta dal teorema di Gauss-Green

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} R^2 \theta^2 \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^{\pi/2} \theta^2 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{R^2}{4} \int_0^{\pi} [\theta^2 + \theta^2 \cos 2\theta] d\theta. \end{aligned}$$

Ora:

$$\int_0^{\pi} \theta^2 d\theta = \frac{\pi^3}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \theta^2 \cos 2\theta d\theta &= \left[\theta^2 \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\theta \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = - \int_0^{\pi/2} \theta \sin 2\theta d\theta \\ &= - \left\{ \left[-\theta \frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{2} d\theta \right\} = -\frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\text{Area} = \frac{R^2}{4} \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi R^2}{4} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi R^2}{48} (4\pi^2 - 9).$$

5. Integrali di superficie. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z (per un giro completo) la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche (quarto di ellisse):

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ z = 2R \sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $R > 0$ costanti fissate. Si calcoli l'elemento d'area su Σ , si scrivano le equazioni parametriche di Σ e si calcoli l'integrale di superficie:

$$\int \int_{\Sigma} x^2 z dS.$$

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = R \cos t \\ z = b(t) = 2R \sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\begin{aligned} dS &= a(t) \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} dt d\theta \\ &= R \cos t \sqrt{R^2 \sin^2 t + 4R^2 \cos^2 t} dt d\theta \end{aligned}$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = R \cos t \cos \theta \\ y = R \cos t \sin \theta \\ z = 2R \sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned}
\int \int_{\Sigma} x^2 z dS &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} (R \cos t \cos \theta)^2 (2R \sin t) R \cos t \sqrt{R^2 \sin^2 t + 4R^2 \cos^2 t} dt \right) d\theta \\
&= 2R^5 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin t \sqrt{(1 - \cos^2 t) + 4 \cos^2 t} dt \right) \\
&= 2R^5 \pi \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin t \sqrt{1 + 3 \cos^2 t} dt \\
&[\cos t = u; -\sin t dt = du; u \in [1, 0]] \\
&= 2R^5 \pi \int_0^1 u^3 \sqrt{1 + 3u^2} du \\
&\sqrt{1 + 3u^2} = s; 1 + 3u^2 = s^2; 6udu = 2sds; udu = \frac{1}{3}sds; u^2 = \frac{s^2 - 1}{3}; s \in [1, 2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2R^5 \pi \int_0^1 u^3 \sqrt{1 + 3u^2} du &= 2R^5 \pi \int_1^2 \frac{s^2 - 1}{3} \cdot s \cdot \frac{1}{3} s ds \\
&= \frac{2}{9} R^5 \pi \int_1^2 (s^4 - s^2) ds \\
&= \frac{2}{9} R^5 \pi \left[\frac{s^5}{5} - \frac{s^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2}{9} R^5 \pi \left(\frac{32 - 1}{5} - \frac{8 - 1}{3} \right) \\
&= \frac{2}{9} R^5 \pi \left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3} \right) = \frac{2}{9} R^5 \pi \left(\frac{58}{15} \right) = \frac{116}{135} \pi R^5.
\end{aligned}$$