Analisi Matematica 2. Appello di giugno 2022
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^{-x}\cos(2x).$$

[Per trovare una soluzione dell'equazione completa *si richiede* di usare il metodo dell'esponenziale complesso].

2. Massimi e minimi liberi
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x+1)y^2 + 8x$$

3. Integrali doppi
Calcolare l'integrale

$$\int\int_{\Omega} xe^{-y}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4, x \ge 0\}$.

4. Lavoro di un campo vettoriale

Calcolare il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x,y) = \frac{(-y^2, xy)}{1+x^2}$$

lungo l'arco di ellisse γ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}(t) = (3\cos\theta, 2\sin\theta), \theta \in [0,\pi].$$

5. Funzione implicita

Dimostrare che l'equazione

$$f(x,y) = \arcsin(xy) - \frac{\pi}{8x+2y} = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = \frac{1}{4}$. Calcolare quindi $g'\left(\frac{1}{4}\right)$, semplificando l'espressione ottenuta.
Si può considerare la funzione f definita nell'aperto

$$A = \{(x,y) : x > 0, y > 0, xy < 1\}.$$

Analisi Matematica 2. Appello di giugno 2022
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	7
2	7
3	6
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del second'ordine

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^{-x}\cos(2x).$$

[Per trovare una soluzione dell'equazione completa *si richiede* di usare il metodo dell'esponenziale complesso].

$$\begin{aligned} \alpha^2 - 6\alpha + 9 &= 0 \\ (\alpha-3)^2 &= 0 \\ \alpha &= 3 \text{ radice doppia} \end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{3x}(c_1 x + c_2).$$

Equazione completa, metodo dell'esponenziale complesso. Scrivendo

$$4e^{-x}\cos(2x) = \operatorname{Re}\left(4e^{x(-1+2i)}\right)$$

cerchiamo col metodo di somiglianza una soluzione dell'equazione

$$w'' - 6w' + 9w = 4e^{x(-1+2i)}$$

$$\begin{aligned} w(x) &= Ae^{x(-1+2i)} \\ w'(x) &= A(-1+2i)e^{x(-1+2i)} \\ w''(x) &= A(-1+2i)^2 e^{x(-1+2i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ae^{x(-1+2i)}\left\{(-1+2i)^2 - 6(-1+2i) + 9\right\} &= 4e^{x(-1+2i)} \\ A\{-3-4i+6-12i+9\} &= 4 \\ A\{12-16i\} &= 4 \\ A = \frac{1}{3-4i} &= \frac{3+4i}{25} \end{aligned}$$

$$w(x) = Ae^{x(-1+2i)} = \frac{e^{-x}}{25}(3+4i)(\cos(2x) + i\sin(2x)).$$

Soluzione particolare dell'equazione completa:

$$y(x) = \operatorname{Re} w(x) = \frac{e^{-x}}{25}(3\cos(2x) - 4\sin(2x)).$$

Integrale generale dell'equazione completa:

$$y(x) = e^{3x}(c_1 x + c_2) + \frac{e^{-x}}{25}(3\cos(2x) - 4\sin(2x)).$$

2. Massimi e minimi liberi

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x+1)y^2 + 8x$$

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4y^2 + 8 = 0 \\ f_y = 4y^3 - 8(x+1)y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - y^2 + 2 = 0 \\ y\left[y^2 - 2(x+1)\right] = 0 \end{cases}$$

La 2^a equazione dà $y = 0$ o $y^2 = 2(x+1)$. La 1^a equazione per $y = 0$ dà

$$x^3 + 2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{2}.$$

La 1^a equazione per $y^2 = 2(x+1)$ dà

$$x^3 - 2(x+1) + 2 = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 2\right) = 0, \text{ quindi } x = 0, x = \pm\sqrt{2}.$$

La relazione $y^2 = 2(x+1)$ per $x = 0$ dà $y^2 = 2$, quindi $y = \pm\sqrt{2}$.
La relazione $y^2 = 2(x+1)$ per $x = \pm\sqrt{2}$ dà $y^2 = 2\left(\pm\sqrt{2}+1\right)$, accettabile solo $x = \sqrt{2}$ che dà $y^2 = 2\left(\sqrt{2}+1\right)$, quindi $y = \pm\sqrt{2\left(1+\sqrt{2}\right)}$.
I punti stazionari sono:

$$\left(-\sqrt[3]{2}, 0\right), \left(0, \pm\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2}, \pm\sqrt{2\left(1+\sqrt{2}\right)}\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$Hf(x,y) = 4\begin{bmatrix} 3x^2 & -2y \\ -2y & 3y^2 - 2(x+1) \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf\left(-\sqrt[3]{2}, 0\right) = 4\begin{bmatrix} 3\sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 2\left(\sqrt[3]{2} - 1\right) \end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$

$$\left(-\sqrt[3]{2}, 0\right) \text{ è punto di minimo relativo.}$$

$$Hf\left(0,\pm\sqrt{2}\right)=4\begin{bmatrix}0 & \mp 2\sqrt{2}\\ \mp 2\sqrt{2} & 4\end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$\left(0,\pm\sqrt{2}\right) \text{ punti di sella.}$$

$$Hf\left(\sqrt{2},\pm\sqrt{2\left(1+\sqrt{2}\right)}\right)=4\begin{bmatrix}6 & \mp 2\sqrt{2\left(1+\sqrt{2}\right)}\\ \mp 2\sqrt{2\left(1+\sqrt{2}\right)} & 4\left(1+\sqrt{2}\right)\end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$

$$\left(\sqrt{2},\pm\sqrt{2\left(1+\sqrt{2}\right)}\right) \text{ sono punti di minimo relativo.}$$

3. Integrali doppi
Calcolare l'integrale

$$\int\int_{\Omega} xe^{-y}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

dove $\Omega=\left\{(x,y): x^2+y^2\leq 4, x\geq 0\right\}$.

In coordinate polari abbiamo:

$$\begin{aligned}\int\int_{\Omega} xe^{-y}\sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \int_0^2\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho^2\cos\theta e^{-\rho\sin\theta}d\theta\right)\rho d\rho\\ &= \int_0^2\left[-e^{-\rho\sin\theta}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho^2 d\rho=\int_0^2\left(e^{\rho}-e^{-\rho}\right)\rho^2 d\rho\\ &= 2\int_0^2\rho^2\operatorname{Sh}\rho d\rho=2\left\{\left[\rho^2\operatorname{Ch}\rho\right]_0^2-\int_0^2 2\rho\operatorname{Ch}\rho d\rho\right\}\\ &= 2\left\{4\operatorname{Ch}2-2\left(\left[\rho\operatorname{Sh}\rho\right]_0^2-\int_0^2\operatorname{Sh}\rho d\rho\right)\right\}\\ &= 4\left\{2\operatorname{Ch}2-\left(2\operatorname{Sh}2-\left[\operatorname{Ch}\rho\right]_0^2\right)\right\}\\ &= 4\left\{3\operatorname{Ch}2-2\operatorname{Sh}2-1\right\}\\ &= 6\left(e^2+e^{-2}\right)-4\left(e^2-e^{-2}\right)-4=2e^2+10e^{-2}-4.\end{aligned}$$

4. Lavoro di un campo vettoriale
Calcolare il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x,y)=\frac{\left(-y^2,xy\right)}{1+x^2}$$

lungo l'arco di ellisse γ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}(t)=\left(3\cos\theta,2\sin\theta\right),\theta\in[0,\pi].$$

$$\underline{r}'(t)=\left(-3\sin\theta,2\cos\theta\right)$$

$$\underline{F}\left(\underline{r}(t)\right)=\frac{\left(-4\sin^2\theta,6\cos\theta\sin\theta\right)}{1+9\cos^2\theta}$$

$$L=\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r}=\int_0^\pi \frac{\left(-4\sin^2\theta, 6\cos\theta\sin\theta\right)}{1+9\cos^2\theta}\cdot(-3\sin\theta, 2\cos\theta)\,d\theta$$
$$=\int_0^\pi \frac{\left(12\sin^3\theta+12\cos^2\theta\sin\theta\right)}{1+9\cos^2\theta}d\theta=12\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{1+9\cos^2\theta}d\theta$$
$$\cos\theta=t;-\sin\theta d\theta=dt;t\in[1,-1]$$
$$=12\int_{-1}^1 \frac{1}{1+9t^2}dt=24\int_0^1 \frac{dt}{1+9t^2}$$
$$=8\left[\arctan(3t)\right]_0^1=8\arctan 3.$$

5. Funzione implicita
Dimostrare che l'equazione

$$f(x,y)=\arcsin(xy)-\frac{\pi}{8x+2y}=0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y=g(x)$ in un intorno di $x_0=\frac{1}{4}$. Calcolare quindi $g'\left(\frac{1}{4}\right)$, semplificando l'espressione ottenuta.
Si può considerare la funzione f definita nell'aperto

$$A=\{(x,y):x>0,y>0,xy<1\}.$$

La funzione è $C^1(A)$.

$$f\left(\frac{1}{4},y\right)=\arcsin\left(\frac{y}{4}\right)-\frac{\pi}{2+2y}=0 \text{ per } y=2$$

(che dà $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{6}=0$). Inoltre questo valore è l'unico, in quanto per $x=\frac{1}{4}$ e $(x,y)\in A$ si ha $0<y<4$. Ora, sull'intervallo $(0,4)$ la funzione $f\left(\frac{1}{4},y\right)$ è monotona crescente quindi si annulla al più in un punto.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\frac{2\pi}{(8x+2y)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{4},2\right)=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}+\frac{2\pi}{36}=\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{\pi}{18}\neq 0$$

Poiché $f\in C^1(A),\left(\frac{1}{4},2\right)\in A, y_0=2$ è l'unico punto per cui $f\left(\frac{1}{4},y_0\right)=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{4},2\right)\neq 0$, l'equazione $f(x,y)=0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y=g(x)$, C^1, in un intorno di $x_0=\frac{1}{4}$. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\frac{8\pi}{(8x+2y)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{4},2\right)=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}+\frac{8\pi}{36}=\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{2}{9}\pi.$$

$$g'(0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{4},2\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{4},2\right)}=-\frac{\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{2}{9}\pi}{\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{\pi}{18}}=-4\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{9}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{9}}\right)=-4\left(\frac{18+\pi\sqrt{3}}{9+\pi\sqrt{3}}\right).$$