Analisi Matematica 2. Appello di giugno 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)______________________________________

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
a. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2xy = 3xe^{-x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

dopo aver determinato (a priori) l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.
b. Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2xy = 3xe^{-x^2} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

è limitata su tutto il suo insieme di definizione.

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \frac{y^2 \sin(x^2) + x^3 \cos y}{\sqrt{x^4 + y^4}} \text{ per } (x, y) \neq (0, 0), \ f(0, 0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0, 0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0, 0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0, 0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

3. Integrali doppi
Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_{\Omega} \frac{xy}{x^2 + y^2} dxdy$$

dove Ω è la regione (interna al primo giro di spirale di Archimede) descritta in coordinate polari da

$$\Omega = \{(\rho, \theta) : \rho \leq \theta, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione.

4. Campi vettoriali
Si calcoli il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = \left(-y^3, x^3\right)$$

lungo l'arco di curva γ (ellisse) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = 2R\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

con R costante positiva. Riportare l'impostazione e i calcoli e semplificare il risultato ottenuto.

5. Superfici e integrali di superficie
Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ che nel piano xz è grafico della funzione

$$z = \sqrt{Rx} \text{ con } x \in \left[0, \frac{3}{4}R\right]$$

dove $R > 0$ è una costante fissata. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e calcolato l'elemento d'area di Σ,
a. determinare gli eventuali punti singolari della superficie;
b. calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_{\Sigma} z dS$$

riscrivendo il risultato nella forma il più possibile semplificata.

Analisi Matematica 2. Appello di giugno 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	7
2	7
3	6
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
a. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2xy = 3xe^{-x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

dopo aver determinato (a priori) l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.
b. Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2xy = 3xe^{-x^2} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

è limitata su tutto il suo insieme di definizione.

a. Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui in $\mathbb{R}$, perciò la soluzione del problema sarà definita in tutto $\mathbb{R}$.
$a(x) = -2x$
$A(x) = \int a(x)\,dx = -x^2$.
Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{x^2}\left\{c + \int e^{-x^2} 3xe^{-x^2}\,dx\right\} \\ &= e^{x^2}\left\{c + 3\int xe^{-2x^2}\,dx\right\} = e^{x^2}\left\{c - \frac{3}{4}e^{-2x^2}\right\} \\ &= ce^{x^2} - \frac{3}{4}e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(1) = 0$ e abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= ce - \frac{3}{4}e^{-1} \\ c &= \frac{3}{4e^2} \\ y(x) &= \frac{3}{4}e^{\left(x^2-2\right)} - \frac{3}{4}e^{-x^2} \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b. La funzione

$$y(x) = ce^{x^2} - \frac{3}{4}e^{-x^2}$$

è limitata se e solo se $c = 0$. Per $c = 0$ si ha

$$y(1) = -\frac{3}{4}e^{-1}$$

quindi la soluzione del problema di Cauchy è limitata se e solo se si assegna $y(1) = \alpha$ con $\alpha = -\frac{3}{4e}$.

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{y^2 \sin(x^2) + x^3 \cos y}{\sqrt{x^4 + y^4}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Scriviamo:

$$|f(x,y)| \leq \frac{y^2 x^2}{\sqrt{x^4 + y^4}} + \frac{|x|^3}{\sqrt{x^4 + y^4}} \equiv f_1(x,y) + f_2(x,y).$$

Poiché f_1 è positivamente omogenea di grado $4 - 2 = 2 > 0$, f_2 è positivamente omogenea di grado $3 - 2 = 1 > 0$ e entrambe sono continue fuori dall'origine, si ha

$$f_1(x,y) \to 0, f_2(x,y) \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0),$$

pertanto per il teorema del confronto

$$f(x,y) \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0),$$

perciò f è continua.
b.

$$f(x,0) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4}} = x$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$f(0,y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (1,0)$.
c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$g(x,y) \equiv \frac{f(x,y) - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Ma:

$$g(x,y) = \frac{y^2 \sin(x^2) + x^3 \cos y - x\sqrt{x^4+y^4}}{\sqrt{x^4+y^4}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

In particolare,

$$\begin{aligned} g(x,x) &= \frac{x^2 \sin(x^2) + x^3\left(\cos x - \sqrt{2}\right)}{2x^2|x|} = \frac{\sin(x^2) + x\left(\cos x - \sqrt{2}\right)}{2|x|} \\ &= \frac{\sin(x^2)}{2|x|} + \frac{x\left(\cos x - \sqrt{2}\right)}{2|x|} \equiv g_1(x) + g_2(x). \end{aligned}$$

Per $x \to 0$ si ha

$$g_1(x) \sim \frac{x^2}{2|x|} = \frac{|x|}{2} \to 0$$

mentre

$$g_2(x) \sim \frac{x\left(1-\sqrt{2}\right)}{2|x|} \to \pm\frac{1-\sqrt{2}}{2} \text{ per } x \to 0^{\pm}.$$

Poiché $g(x,x)$ non tende a zero, f *non è differenziabile* in $(0,0)$.

3. Integrali doppi

Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy$$

dove Ω è la regione (interna al primo giro di spirale di Archimede) descritta in coordinate polari da

$$\Omega = \{(\rho,\theta) : \rho \le \theta, \theta \in [0,2\pi]\}.$$

Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione.

In coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} \int\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\theta \cos\theta\sin\theta\rho d\rho\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(\cos\theta\sin\theta)\frac{\theta^2}{2}d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\theta^2\sin(2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{4}\left\{\left[-\theta^2\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2\theta\frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{-2\pi^2 + \int_0^{2\pi}\theta\cos(2\theta)\,d\theta\right\} \\ &= -\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{4}\left\{\left[\theta\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin(2\theta)}{2}d\theta\right\} \\ &= -\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{4}\left\{0 - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(2\theta)\,d\theta\right\} = -\frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

4. Campi vettoriali
Si calcoli il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = \left(-y^3, x^3\right)$$

lungo l'arco di curva γ (ellisse) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = 2R\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

con R costante positiva. Riportare l'impostazione e i calcoli e semplificare il risultato ottenuto.

$$\begin{aligned}
\underline{r}(t) &= (R\cos t, 2R\sin t) \\
\underline{r}'(t) &= (-R\sin t, 2R\cos t) \\
\underline{F}(\underline{r}(t)) &= \left(-8R^3\sin^3 t, R^3\cos^3 t\right) \\
\underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) &= \left(-8R^3\sin^3 t, R^3\cos^3 t\right) \cdot (-R\sin t, 2R\cos t) \\
&= R^4\left(8\sin^4 t + 2\cos^4 t\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\, dt \\
&= R^4 \int_0^{2\pi} \left(8\sin^4 t + 2\cos^4 t\right) dt \\
&= R^4 \int_0^{2\pi} \left(8\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\right) dt \\
&= R^4 \int_0^{2\pi} \left(2\left(1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t)\right) + \frac{1}{2}\left(1 + 2\cos(2t) + \cos^2(2t)\right)\right) dt \\
&= R^4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - 3\cos(2t) + \frac{5}{2}\cos^2(2t)\right) dt \\
&= R^4 \left(\frac{5}{2} \cdot 2\pi + 0 + \frac{5}{2} \cdot \pi\right) dt \\
&= \frac{15}{2}\pi R^4.
\end{aligned}$$

5. Superfici e integrali di superficie
Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ che nel piano xz è grafico della funzione

$$z = \sqrt{Rx} \text{ con } x \in \left[0, \frac{3}{4}R\right]$$

dove $R > 0$ è una costante fissata. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e calcolato l'elemento d'area di Σ,

a. determinare gli eventuali punti singolari della superficie;
b. calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_{\Sigma} zdS$$

riscrivendo il risultato nella forma il più possibile semplificata.

a. La superficie Σ è generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = t \\ z = b(t) = \sqrt{Rt} \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{3}{4}R\right]$$

perciò ha equazioni parametriche

$$\Sigma : \begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \\ z = \sqrt{Rt} \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{3}{4}R\right], \theta \in [0, 2\pi]$$

e elemento d'area

$$dS = a(t)\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}dtd\theta = t\sqrt{1 + \frac{R}{4t}}dtd\theta.$$

La superficie è singolare per $t = 0$, quindi ha il punto singolare $(0, 0, 0)$.
b. L'integrale di superficie è:

$$\begin{aligned} I = \int\int_{\Sigma} zdS &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{3}{4}R}\sqrt{Rt}\cdot t\sqrt{1 + \frac{R}{4t}}dt\right)d\theta \\ &= 2\pi\sqrt{R}\int_0^{\frac{3}{4}R} t\sqrt{t + \frac{R}{4}}dt \end{aligned}$$

$$\sqrt{t + \frac{R}{4}} = u; t + \frac{R}{4} = u^2; dt = 2udu; u \in \left[\sqrt{\frac{R}{4}}, \sqrt{R}\right].$$

$$\begin{aligned} I &= 2\pi\sqrt{R}\int_{\sqrt{\frac{R}{4}}}^{\sqrt{R}}\left(u^2 - \frac{R}{4}\right)u2udu = \pi\sqrt{R}\int_{\sqrt{\frac{R}{4}}}^{\sqrt{R}}\left(4u^4 - Ru^2\right)du \\ &= \pi\sqrt{R}\left[\frac{4u^5}{5} - \frac{Ru^3}{3}\right]_{\sqrt{\frac{R}{4}}}^{\sqrt{R}} = \pi\sqrt{R}R^2\sqrt{R}\left[\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4}{5\cdot 32} - \frac{1}{3\cdot 8}\right)\right] \\ &= \pi R^3\left(\frac{7}{15} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\right) = \pi R^3\left(\frac{7}{15} + \frac{1}{4\cdot 15}\right) = \frac{\pi R^3}{15}\left(7 + \frac{1}{4}\right) = \frac{29}{60}\pi R^3. \end{aligned}$$