Analisi Matematica 2. Appello di giugno 2024
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2+4)(x-1) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^3-y^4}{x^2+y^4}\right) \log(1+y) & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

3. Funzione implicita
Dimostrare che l'equazione

$$f(x,y) = e^2 y \log x - x^2 e^{-(y-1)^2} = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = e$. Calcolare quindi $g'(e)$, semplificando l'espressione ottenuta.

4. Integrali tripli
Si consideri il solido materiale Ω (ellissoide) non omogeneo descritto analiticamente da:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\},$$

avente densità

$$\delta(x, y, z) = \frac{a^2 c - x^2 |z|}{a^3 b^2 c} \mu,$$

dove a, b, c sono costanti positive assegnate, aventi le dimensioni di una lunghezza, e $\mu > 0$ una costante avente le dimensioni di una massa. Calcolare la sua massa totale m. Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione e sfruttare le simmetrie.

5. Integrale di superficie
Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazione cartesiana:

$$x = 1 + z^2 \text{ per } z \in [-1, 1].$$

Dopo aver scritto le equazioni parametriche di γ e di Σ, e l'elemento d'area di Σ, calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_\Sigma \frac{|xz|}{\sqrt{x^2 + y^2}} dS.$$

Analisi Matematica 2. Appello di giugno 2024
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2+4)(x-1) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

Equazione a variabili separabili. Non ci sono soluzioni costanti dell'equazione. Risolviamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^2+4} &= \int (x-1)\,dx \\ \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{2}\right) &= \frac{(x-1)^2}{2} + c \\ \arctan\left(\frac{y}{2}\right) &= (x-1)^2 + c \end{aligned}$$

(con una c diversa dal passaggio precedente).
Imponiamo la condizione iniziale $y(1) = 2$:

$$\frac{\pi}{4} = c$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$\arctan\left(\frac{y}{2}\right) = (x-1)^2 + \frac{\pi}{4}.$$

Poiché arctan assume valori in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, dev'essere

$$-\frac{\pi}{2} < (x-1)^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2},$$

quindi

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 < \frac{\pi}{4} \\ &1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} < x < 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \end{aligned}$$

che è effettivamente un intorno del punto 1 in cui è assegnata la condizione iniziale.

Esplicitando la soluzione in questo intervallo si ha:

$$y = 2\tan\left((x-1)^2 + \frac{\pi}{4}\right) \text{ per } x \in \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

e $\left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ è l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione.

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^3 - y^4}{x^2 + y^4}\right) \log(1+y) & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \frac{|x^3 - y^4|}{x^2 + y^4} |\log(1+y)| \leq \frac{|x|^3 + y^4}{x^2 + y^4} |y| = \frac{|x|^3 |y|}{x^2 + y^4} + \frac{y^4 |y|}{x^2 + y^4} \\ &\leq \frac{|x|^3 |y|}{x^2} + \frac{y^4 |y|}{y^4} = |xy| + |y| \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0), \end{aligned}$$

quindi per il teorema del confronto $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, e f è continua in $(0,0)$.
b.

$$\begin{aligned} &f(x,0) = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ &f(0,y) = -\log(1+y) \sim -y, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1. \end{aligned}$$

Perciò f è derivabile, con $\nabla f(0,0) = (0,-1)$.
c. Sia

$$\begin{aligned} g(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) &= \frac{t^3\left(\cos^3\theta - t\sin^4\theta\right)}{t^2\left(\cos^2\theta + t^2\sin^4\theta\right)} \log(1 + t\sin\theta) \\ &= \frac{t\left(\cos^3\theta - t\sin^4\theta\right)}{\left(\cos^2\theta + t^2\sin^4\theta\right)} \log(1 + t\sin\theta). \end{aligned}$$

Ora se $\cos\theta \neq 0$, per $t \to 0$

$$g(t) \sim (t\cos\theta)\, t\sin\theta = t^2 \cos\theta \sin\theta$$

quindi

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = 0.$$

Se $\cos\theta = 0$, per $t \to 0$

$$g(t) = \frac{t\left(-t\sin^4\theta\right)}{t^2\sin^4\theta} t\sin\theta = -t\sin\theta$$

quindi

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = -\sin\theta.$$

D'altro canto, per $\cos\theta \neq 0$,

$$\nabla f(0,0) \cdot \underline{v} = (0,-1) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = -\sin\theta, \text{ mentre } D_{\underline{v}} f(0,0) = 0$$

perciò *non vale* la formula del gradiente. (In particolare, certamente f non è differenziabile in $(0,0)$).

3. Funzione implicita

Dimostrare che l'equazione

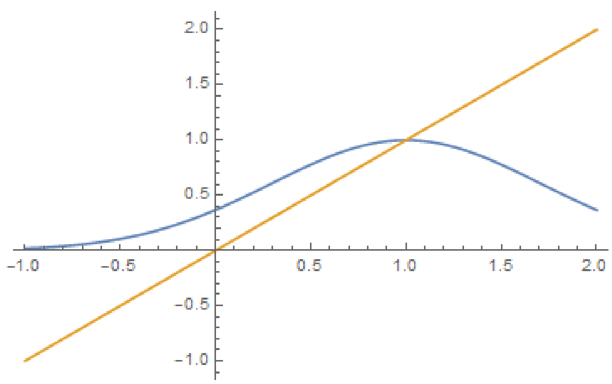
$$f(x,y) = e^2 y \log x - x^2 e^{-(y-1)^2} = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = e$. Calcolare quindi $g'(e)$, semplificando l'espressione ottenuta.

La funzione è $C^1(A)$ con $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

$$f(e,y) = e^2 y - e^2 e^{-(y-1)^2} = 0 \text{ per } y = 1.$$

$$e^{-(y-1)^2} = y$$



Quindi $y_0 = 1$ e il punto $(e,1)$ appartiene all'aperto A.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^2 \log x + 2(y-1)x^2 e^{-(y-1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(e,1) = e^2 \neq 0$$

Poiché $f \in C^1(A)$, $(e,1) \in A$, $f(e,1) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(e,1) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$, C^1, in un intorno di $x_0 = e$. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^2 \frac{y}{x} - 2xe^{-(y-1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(e,1) = e^2 \frac{1}{e} - 2e = -e$$

$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(e,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(e,1)} = -\frac{-e}{e^2} = \frac{1}{e}.$$

4. Integrali tripli
Si consideri il solido materiale Ω (ellissoide) non omogeneo descritto analiticamente da:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\},$$

avente densità

$$\delta(x, y, z) = \frac{a^2 c - x^2 |z|}{a^3 b^2 c} \mu,$$

dove a, b, c sono costanti positive assegnate, aventi le dimensioni di una lunghezza, e $\mu > 0$ una costante avente le dimensioni di una massa. Calcolare la sua massa totale m. Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione e sfruttare le simmetrie.

La massa totale sarà:

$$m = \int\int\int_{\Omega} \delta(x, y, z)\, dxdydz = \int\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1} \frac{a^2 c - x^2 |z|}{a^3 b^2 c} \mu dxdydz.$$

Utilizziamo le coordinate ellissoidali:

$$\begin{cases} x = a\rho \sin\phi \cos\theta \\ y = b\rho \sin\phi \sin\theta \\ z = c\rho \cos\phi \end{cases}$$

$$\phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]; \rho \in [0, 1], dxdydz = abc\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta,$$

$$\begin{aligned}
m &= \mu \frac{abc}{a^3 b^2 c} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(a^2 c - a^2 \rho^2 \cos^2\theta \sin^2\phi c\rho |\cos\phi| \right) d\theta \right) \sin\phi d\phi \right) \rho^2 d\rho \\
&= \mu \frac{a^2 c}{a^2 b} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(1 - \rho^3 \cos^2\theta \sin^2\phi |\cos\phi| \right) d\theta \right) \sin\phi d\phi \right) \rho^2 d\rho \\
&= \mu \frac{c}{b} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(2\pi - \rho^3 \pi \sin^2\phi |\cos\phi| \right) \sin\phi d\phi \right) \rho^2 d\rho \\
&= \mu\pi \frac{c}{b} \int_0^1 \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin\phi - \rho^3 \sin^3\phi \cos\phi \right) d\phi \right) \rho^2 d\rho \\
&= 2\mu\pi \frac{c}{b} \int_0^1 \left[-2\cos\phi - \rho^3 \frac{\sin^4\phi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\rho \\
&= 2\mu\pi \frac{c}{b} \int_0^1 \left(2 - \frac{\rho^3}{4} \right) \rho^2 d\rho = 2\mu\pi \frac{c}{b} \int_0^1 \left(2\rho^2 - \frac{\rho^5}{4} \right) d\rho \\
&= 2\mu\pi \frac{c}{b} \left[2\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^6}{4 \cdot 6} \right]_0^1 = \frac{2}{3}\mu\pi \frac{c}{b} \left(2 - \frac{1}{8} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{8} \mu\pi \frac{c}{b} = \frac{5}{4}\pi\mu \frac{c}{b}.
\end{aligned}$$

5. Integrale di superficie
Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazione cartesiana:

$$x = 1 + z^2 \text{ per } z \in [-1, 1].$$

Dopo aver scritto le equazioni parametriche di γ e di Σ, e l'elemento d'area di Σ, calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_{\Sigma} \frac{|xz|}{\sqrt{x^2+y^2}} dS.$$

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = 1 + t^2 \\ z = b(t) = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1].$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = (1+t^2)\cos\theta \\ y = (1+t^2)\sin\theta \\ z = t \end{cases} \quad t \in [-1,1], \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned} a'(t) &= 2t, b'(t) = 1 \\ dS &= |a(t)| \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} dt d\theta \\ &= \left(1+t^2\right) \sqrt{1+4t^2} dt d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\int_{\Sigma} \frac{|xz|}{\sqrt{x^2+y^2}} dS &= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{(1+t^2)|\cos\theta||t|}{(1+t^2)} d\theta \right) \left(1+t^2\right)\sqrt{1+4t^2} dt \\ &= \left(\int_{-1}^{1} |t| \left(1+t^2\right) \sqrt{1+4t^2} dt \right) \left(\int_0^{2\pi} |\cos\theta| \, d\theta \right) \\ &= \left(2\int_0^1 t\left(1+t^2\right)\sqrt{1+4t^2} dt \right) \left(4\int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \right). \end{aligned}$$

$$4\int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = 4 [\sin\theta]_0^{\pi/2} = 4.$$

$$I = 2\int_0^1 t\left(1+t^2\right)\sqrt{1+4t^2} dt$$

$$\sqrt{1+4t^2} = u; 1+4t^2 = u^2; 8tdt = 2udu; tdt = \frac{1}{4}udu; 1+t^2 = 1+\frac{u^2-1}{4}.$$

$$\begin{aligned} I &= 2\int_1^{\sqrt{5}} \left(1+\frac{u^2-1}{4}\right) u \frac{1}{4} u du = \frac{1}{8}\int_1^{\sqrt{5}} \left(3+u^2\right) u^2 du \\ &= \frac{1}{8}\left[u^3 + \frac{u^5}{5}\right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{1}{8}\left(5\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{8}\left(10\sqrt{5} - \frac{6}{5}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(5\sqrt{5} - \frac{3}{5}\right). \end{aligned}$$

$$\int\int_{\Sigma} \frac{|xz|}{\sqrt{x^2+y^2}} dS = \frac{1}{4}\left(5\sqrt{5} - \frac{3}{5}\right) \cdot 4 = 5\sqrt{5} - \frac{3}{5}.$$