Analisi Matematica 2. Appello di giugno 2025
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del second'ordine.
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$3y'' + 5y' - 2y = 4e^{-x/3}.$$

2. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \frac{x^4}{2} + x^2\left(y^2 - 1\right) + \frac{2}{3}x^3 y.$$

3. Integrali doppi. Sia Ω una lamina materiale piana, non omogenea, descritta nel piano xy dall'ellisse

$$\Omega = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

avente densità superficiale

$$\delta(x,y) = \frac{\mu}{ab}\left(1 + \frac{|xy|}{ab}\right)$$

dove μ, a, b sono costanti positive aventi le dimensioni di massa, lunghezza, lunghezza, rispettivamente. Calcolare il momento d'inerzia della lamina rispetto a un asse perpendicolare al piano xy e passante per l'origine.
Si raccomanda di fare una figura, sfruttare le simmetrie, prestare cura nell'impostazione, e semplificare il più possibile i risultati ottenuti.

4. Campi vettoriali, lavoro. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F} = \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

lungo l'arco di curva γ espressa in forma polare da:

$$\rho = A\theta \text{ per } \theta \in [0, 2\pi]$$

con $A > 0$ costante. Prestare cura nell'impostazione e riscrivere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

5. Serie di Fourier.
Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[-2, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{per } |x| < 1 \\ 0 & \text{per } 1 \leq |x| \leq 2 \end{cases}.$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Analisi Matematica 2. Appello di giugno 2025
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	7
2	7
3	6
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del second'ordine.
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$3y'' + 5y' - 2y = 4e^{-x/3}.$$

$$3\alpha^2 + 5\alpha - 2 = 0$$

$$\alpha = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -2 \end{cases}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 e^{x/3} + c_2 e^{-2x}.$$

Soluzione particolare dell'equazione completa. Osservo che il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea. Perciò in base al metodo di somiglianza, cerco

$$\overline{y}(x) = ae^{x/3}x$$
$$\overline{y}'(x) = ae^{x/3}\left(\frac{x}{3}+1\right)$$
$$\overline{y}''(x) = ae^{x/3}\left(\frac{x}{9}+\frac{2}{3}\right)$$

$$ae^{-x/3}\left\{3\left(\frac{x}{9}+\frac{2}{3}\right) + 5\left(\frac{x}{3}+1\right) - 2x\right\} = 4e^{-x/3}$$
$$7a = 4, a = \frac{4}{7}.$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa è allora

$$\overline{y}(x) = \frac{4}{7}e^{x/3}x$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = c_1 e^{x/3} + c_2 e^{-2x} + \frac{4}{7}e^{x/3}x.$$

2. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \frac{x^4}{2} + x^2\left(y^2-1\right) + \frac{2}{3}x^3 y.$$

$$\begin{cases} f_x = 2x^3 + 2x\left(y^2-1\right) + 2x^2 y = 2x\left(x^2+y^2-1+xy\right) = 0 \\ f_y = 2x^2 y + \frac{2}{3}x^3 = 2x^2\left(y+\frac{1}{3}x\right) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione dà

$$x = 0 \text{ oppure } y = -\frac{1}{3}x.$$

Se $x = 0$ la prima equazione è soddisfatta, quindi $x = 0$ *è una retta di punti stazionari.*
Se $y = -\frac{1}{3}x$ la prima equazione dà

$$2x\left(x^2 + \left(\frac{x^2}{9} - 1\right) + x\left(-\frac{x}{3}\right)\right) = 0,$$

che per $x \neq 0$ dà

$$x^2\left(1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) - 1 = 0, \frac{7}{9}x^2 = 1$$

$$x = \pm\frac{3}{\sqrt{7}}, y = \mp\frac{1}{\sqrt{7}}.$$

In definitiva i punti stazionari sono:

$$\pm\left(\frac{3}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right), (0, y_0)$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\left(3x^2 + y^2 - 1 + 2xy\right) \\ f_{xy} &= 2x(2y) + 2x^2 = 2x(2y+x) \\ f_{yy} &= 2x^2 \end{aligned}$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2\left(3x^2+y^2-1+2xy\right) & 2x(2y+x) \\ 2x(2y+x) & 2x^2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3x^2+y^2-1+2xy & x(2y+x) \\ x(2y+x) & x^2 \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf(0,y_0) = 2\begin{bmatrix} y_0^2-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ caso dubbio.}$$

$$\begin{aligned} Hf\left(\frac{3}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right) &= 2\begin{bmatrix} 3x^2+y^2-1+2xy & x(2y+x) \\ x(2y+x) & x^2 \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} 3\cdot\frac{9}{7}+\frac{1}{7}-1-2\cdot\frac{3}{7} & -2\cdot\frac{3}{7}+\frac{9}{7} \\ -2\cdot\frac{3}{7}+\frac{9}{7} & \frac{9}{7} \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} \frac{15}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{9}{7} \end{bmatrix} = 2\cdot\frac{3}{7}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ definita positiva,} \\ &\left(\frac{3}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \text{ punto di minimo} \end{aligned}$$

$$Hf\left(-\frac{3}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=2\cdot\frac{3}{7}\begin{bmatrix}2&1\\1&3\end{bmatrix}\text{ definita positiva,}$$

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\text{ punto di minimo.}$$

Studiamo i casi dubbi.

$$f(x,y)=\frac{x^4}{2}+x^2\left(y^2-1\right)+\frac{2}{3}x^3y=x^2\left(\frac{x^2}{2}+y^2-1+\frac{2xy}{3}\right).$$

$f(0,y_0)=0$, quindi studiare il segno dell'incremento di f equivale a studiare il segno di $f(x,y)$ in un intorno di $(0,y_0)$. E' lo stesso segno di

$$g(x,y)=\frac{x^2}{2}+y^2-1+\frac{2xy}{3},$$

che per $(x,y)\to(0,y_0)$ tende a y_0^2-1. Quindi:
se $y_0^2>1$, cioè $y_0>1$ o $y_0<-1$, la funzione è ≥ 0 in un intorno di $(0,y_0)$ e questo punto è di minimo;
se $y_0^2<1$, cioè $-1<y<1$, la funzione è ≤ 0 in un intorno di $(0,y_0)$ e questo punto è di massimo;
se $y_0=\pm1$ la funzione cambia di segno in un intorno del punto: infatti se $y_0=1$,

$$g(x,1)=\frac{x^2}{2}+\frac{2x}{3}$$

in un intorno di $x=0$ ha il segno di x, quindi cambia segno; se $y_0=-1$,

$$g(x,-1)=\frac{x^2}{2}-\frac{2x}{3}$$

in un intorno di $x=0$ ha il segno di $-x$, quindi cambia segno. Perciò:
$(0,\pm1)$ sono punti di sella;
$(0,y_0)$ sono punti di minimo se $y_0>1$ o $y_0<-1$;
$(0,y_0)$ sono punti di massimo se $-1<y<1$; e inoltre, come già visto,
$\pm\left(\frac{3}{\sqrt{7}},-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$ sono punti di minimo.

3. Integrali doppi. Sia Ω una lamina materiale piana, non omogenea, descritta nel piano xy dall'ellisse

$$\Omega=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$$

avente densità superficiale

$$\delta(x,y)=\frac{\mu}{ab}\left(1+\frac{|xy|}{ab}\right)$$

dove μ,a,b sono costanti positive aventi le dimensioni di massa, lunghezza, lunghezza, rispettivamente. Calcolare il momento d'inerzia della lamina rispetto a un asse perpendicolare al piano xy e passante per l'origine.
Si raccomanda di fare una figura, sfruttare le simmetrie, prestare cura nell'impostazione, e semplificare il più possibile i risultati ottenuti.

$$I=\int\int_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\delta\left(x,y\right)dxdy=\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\left(x^2+y^2\right)\frac{\mu}{ab}\left(1+\frac{|xy|}{ab}\right)dxdy$$

introduciamo le coordinate polari ellittiche:

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\theta \\ y=b\rho\sin\theta \end{cases} \quad dxdy=ab\rho d\rho d\theta$$

$$\Omega=\left\{(\rho,\theta):\rho\in[0,1]\,,\theta\in[0,2\pi]\right\}.$$

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1 ab\rho\left(\int_0^{2\pi}\frac{\mu}{ab}\left(a^2\rho^2\cos^2\theta+b^2\rho^2\sin^2\theta\right)\left(1+\frac{ab\rho^2\left|\cos\theta\sin\theta\right|}{ab}\right)d\theta\right)d\rho\\
&=4\mu\int_0^1\rho\left(\int_0^{\pi/2}\left(a^2\rho^2\cos^2\theta+b^2\rho^2\sin^2\theta\right)\left(1+\rho^2\cos\theta\sin\theta\right)d\theta\right)d\rho\\
&=4\mu\int_0^1\rho\left(\int_0^{\pi/2}\left(a^2\rho^2\cos^2\theta+b^2\rho^2\sin^2\theta\right)d\theta+\rho^2\int_0^{\pi/2}\left(a^2\rho^2\cos^3\theta\sin\theta+b^2\rho^2\sin^3\theta\cos\theta\right)d\theta\right)d\rho\\
&=4\mu\int_0^1\rho\left(\frac{\pi}{4}\rho^2\left(a^2+b^2\right)+\rho^4\left[-a^2\frac{\cos^4\theta}{4}+b^2\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}\right)d\rho\\
&=4\mu\int_0^1\left(\frac{\pi}{4}\rho^3\left(a^2+b^2\right)+\rho^5\frac{\left(a^2+b^2\right)}{4}\right)d\rho=\mu\left(a^2+b^2\right)\int_0^1\left(\pi\rho^3+\rho^5\right)d\rho\\
&=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}\right)\mu\left(a^2+b^2\right).
\end{aligned}$$

4. Campi vettoriali, lavoro. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F}=\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

lungo l'arco di curva γ espressa in forma polare da:

$$\rho=A\theta \text{ per } \theta\in[0,2\pi]$$

con $A>0$ costante. Prestare cura nell'impostazione e riscrivere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

Riscriviamo in forma cartesiana la curva γ:

$$\underline{r}\left(\theta\right)=\left(A\theta\cos\theta,A\theta\sin\theta\right)\ \text{ per } \theta\in[0,2\pi]\,.$$
$$\underline{r}'\left(\theta\right)=A\left(\cos\theta-\theta\sin\theta,\sin\theta+\theta\cos\theta\right).$$

$$\underline{F}\left(\underline{r}\left(\theta\right)\right)=\left(-\frac{A\theta\sin\theta}{A\theta},\frac{A\theta\cos\theta}{A\theta}\right)=\left(-\sin\theta,\cos\theta\right).$$

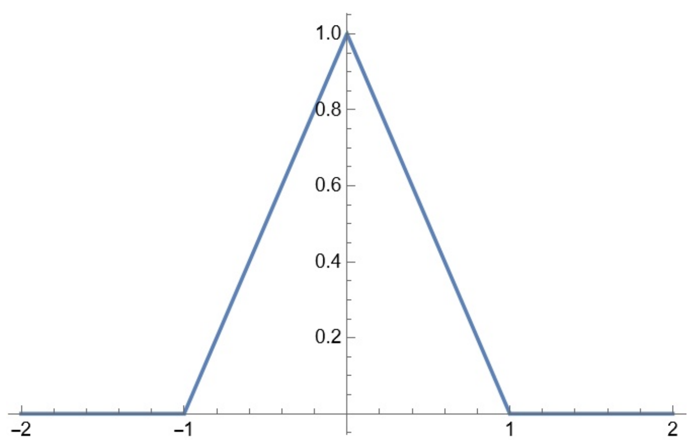
$$
\begin{aligned}
L &= \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{F}\left(\underline{r}\left(\theta\right)\right) \cdot \underline{r}'\left(\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin\theta, \cos\theta\right) \cdot A\left(\cos\theta - \theta\sin\theta, \sin\theta + \theta\cos\theta\right) d\theta \\
&= A \int_0^{2\pi} \left(-\sin\theta\cos\theta + \theta\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \theta\cos^2\theta\right) d\theta \\
&= A \int_0^{2\pi} \theta d\theta = A \cdot \frac{\left(2\pi\right)^2}{2} = 2\pi^2 A.
\end{aligned}
$$

5. Serie di Fourier.
Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[-2, 2]$ da

$$
f\left(x\right) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{per } |x| < 1 \\ 0 & \text{per } 1 \leq |x| \leq 2 \end{cases} .
$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (ma non è C^1). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[-2, 2]$ e i coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{k}\right)$.



b. La funzione è pari, perciò $b_k = 0$. Essendo $T = 4, \omega = 2\pi/T = \pi$,

$$
a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f\left(x\right) \cos\left(k\omega x\right) dx = \int_0^2 f\left(x\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(1 - x\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx.
$$

$$
a_0 = \int_0^1 \left(1 - x\right) = \frac{1}{2}.
$$

Calcoliamo, per $k \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
a_k &= \int_0^1 (1-x)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)dx = \left\{\left[(1-x)\,\frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)}dx\right\} \\
&= \left[-\frac{\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\left(1-\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{4}{k^2\pi^2}\left(1-\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) = \frac{8}{k^2\pi^2}\sin^2\left(\frac{k\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
f(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k^2}\left(1-\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)\right]\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right).
$$