Analisi Matematica 2. Appello di giugno 2026
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del second'ordine.
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 6y' + 16y = 8\cos 2x.$$

Per la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa *è richiesto il metodo dell'esponenziale complesso.*

2. Massimi e minimi vincolati.
Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{x^2} - 2e^{y^2}$$

soggetta al vincolo

$$e^{x^2} + e^{y^2} = e^2.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

3. Integrali tripli.
Si consideri il cilindro materiale

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : z \in [0,h], x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$$

avente densità

$$\delta(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(R^2 + h^2)\, Rh^2}\mu,$$

dove μ è una costante positiva avente le dimensioni di una massa, e R, h sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza. Si calcoli la massa totale del solido e il suo baricentro. Prestare cura nell'impostazione, sfruttare le simmetrie e riscrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.

4. Campi vettoriali, lavoro.
Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(yz, -xz, xz^2\right)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ z = ht \end{cases} \quad \text{per } t \in [0, 2\pi]\,,$$

dove a, b, h sono costanti positive. Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

5. Integrale di superficie.
Sia Σ la superficie laterale del cono di raggio R, altezza h, vertice nell'origine e asse l'asse z.
a. Scrivere le equazioni parametriche di Σ e il suo elemento d'area, costruendola come superficie di rotazione.
b. Calcolare la massa totale di Σ supponendo che sia una superficie materiale di densità superficiale

$$\sigma(x, y, z) = \frac{(Rh + |x|\, z)}{hR^3}\mu$$

dove μ è una costante positiva aventi le dimensioni di una massa.

Analisi Matematica 2. Appello di giugno 2026
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	7
2	7
3	7
4	6
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del second'ordine.
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 6y' + 16y = 8\cos 2x.$$

Per la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa *è richiesto il metodo dell'esponenziale complesso.*

$$\alpha^2 - 6\alpha + 16 = 0$$
$$\alpha = 3 \pm \sqrt{9-16} = 3 \pm \sqrt{7}.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{3x}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{7}x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{7}x\right)\right).$$

Per l'equazione completa, poiché

$$8\cos 2x = \operatorname{Re}\left(8e^{2ix}\right),$$

cerchiamo prima una soluzione particolare dell'equazione

$$w'' - 6w' + 16w = 8e^{2ix}.$$

Per il metodo di somiglianza, cerchiamo:

$$w(x) = Ae^{2ix}$$
$$w'(x) = A(2i)e^{2ix}$$
$$w''(x) = -4Ae^{2ix}$$

$$Ae^{2ix}\left[-4 - 6(2i) + 16\right] = 8e^{2ix}$$
$$A\left[12 - 12i\right] = 8$$
$$A = \frac{2}{3(1-i)} = \frac{1+i}{3}.$$

$$w(x) = \frac{1+i}{3}e^{2ix}$$

Soluzione particolare dell'equazione completa:

$$\overline{y}(x) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+i}{3}e^{2ix}\right) = \frac{1}{3}(\cos 2x - \sin 2x)$$

Integrale generale dell'equazione completa:

$$y(x) = e^{3x}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{7}x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{7}x\right)\right) + \frac{1}{3}(\cos 2x - \sin 2x).$$

2. Massimi e minimi vincolati.
Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{x^2} - 2e^{y^2}$$

soggetta al vincolo

$$e^{x^2} + e^{y^2} = e^2.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Sia $g(x,y) = e^{x^2} + e^{y^2} - e^2$, poiché g è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$\nabla g(x,y) = \left(2xe^{x^2}, 2ye^{y^2}\right) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

e $g(0,0) \neq 0$, il vincolo non ha punti critici. Definiamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = e^{x^2} - 2e^{y^2} - \lambda\left(e^{x^2} + e^{y^2} - e^2\right)$$

e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2xe^{x^2} - \lambda 2xe^{x^2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -4ye^{y^2} - \lambda 2ye^{y^2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\left(e^{x^2} + e^{y^2} - e^2\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2xe^{x^2}(1-\lambda) = 0 \\ -2ye^{y^2}(2+\lambda) = 0 \\ e^{x^2} + e^{y^2} = e^2 \end{cases}$$

La 1^a equazione dà $x = 0$ o $\lambda = 1$.
Se $x = 0$ il vincolo dà $y = \pm\sqrt{\log(e^2-1)}$.
Se $\lambda = 1$ la 2^a equazione dà $y = 0$, e il vincolo dà $x = \pm\sqrt{\log(e^2-1)}$.
Perciò i punti stazionari della lagrangiana sono

$$\left(\pm\sqrt{\log(e^2-1)}, 0\right), \left(0, \pm\sqrt{\log(e^2-1)}\right).$$

Il vincolo rappresenta un insieme chiuso e limitato del piano, infatti

$$e^{x^2} + e^{y^2} = e^2 \text{ implica } x^2 < 1 \text{ e } y^2 < 1$$

(perciò il vincolo è contenuto nel quadrato $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$), per il teorema di Weierstrass massimo e minimo assoluto vincolato di f esistono certamente, basta perciò confrontare i valori di f in questi punti. Si ha:

$$f(x,y) = e^{x^2} - 2e^{y^2}$$

$$f\left(\pm\sqrt{\log\left(e^2-1\right)},0\right) = \left(e^2-1\right)-2 = e^2-3>0$$
$$f\left(0,\pm\sqrt{\log\left(e^2-1\right)}\right) = 1-2\left(e^2-1\right) = 3-2e^2<0$$

Perciò

$$\left(\pm\sqrt{\log\left(e^2-1\right)},0\right) \text{ sono punti di massimo assoluti vincolati}$$
$$\left(0,\pm\sqrt{\log\left(e^2-1\right)}\right) \text{ sono punti di minimo assoluti vincolati.}$$

3. Integrali tripli.
Si consideri il cilindro materiale

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : z\in[0,h], x^2+y^2\le R^2\right\}$$

avente densità

$$\delta(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{\left(R^2+h^2\right)Rh^2}\mu,$$

dove μ è una costante positiva avente le dimensioni di una massa, e R, h sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza. Si calcoli la massa totale del solido e il suo baricentro Prestare cura nell'impostazione, sfruttare le simmetrie e riscrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.

$$\begin{aligned}
m &= \int\int\int_\Omega \delta(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^h\left(\int\int_{x^2+y^2\le R^2}\frac{x^2+y^2+z^2}{\left(R^2+h^2\right)Rh^2}\mu dxdy\right)dz \\
&= \frac{\mu}{\left(R^2+h^2\right)Rh^2}\int_0^h\left(2\pi\int_0^R\left(\rho^2+z^2\right)\rho d\rho\right)dz \\
&= \frac{2\pi\mu}{\left(R^2+h^2\right)Rh^2}\int_0^h\left(\frac{R^4}{4}+\frac{z^2R^2}{2}\right)dz \\
&= \frac{2\pi\mu}{\left(R^2+h^2\right)Rh^2}\left(\frac{R^4h}{4}+\frac{h^3R^2}{6}\right) \\
&= \frac{2\pi\mu}{\left(R^2+h^2\right)Rh^2}R^2h\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{6}\right) = \frac{\pi\mu R}{\left(R^2+h^2\right)h}\left(\frac{R^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right).
\end{aligned}$$

Il baricentro, per le simmetrie di Ω e di δ, starà sull'asse z, quindi $x_c = y_c = 0$, mentre

$$\begin{aligned}
z_c &= \frac{1}{m}\int\int\int_\Omega z\delta(x,y,z)\,dxdydz = \frac{1}{m}\int_0^h\left(\int\int_{x^2+y^2\le R^2}\frac{x^2+y^2+z^2}{\left(R^2+h^2\right)Rh^2}\mu dxdy\right)zdz \\
&= \frac{1}{m}\frac{2\pi\mu}{\left(R^2+h^2\right)Rh^2}\int_0^h\left(\frac{R^4}{4}z+\frac{z^3R^2}{2}\right)dz \\
&= \frac{\left(R^2+h^2\right)h}{\pi\mu R\left(\frac{R^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)}\cdot\frac{2\pi\mu}{\left(R^2+h^2\right)Rh^2}\left(\frac{R^4h^2}{8}+\frac{R^2h^4}{8}\right) \\
&= \frac{h\left(R^2+h^2\right)}{4\left(\frac{R^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)} = \frac{3h\left(R^2+h^2\right)}{2\left(3R^2+2h^2\right)}.
\end{aligned}$$

$$C = \left(0, 0, \frac{3h\left(R^2 + h^2\right)}{2\left(3R^2 + 2h^2\right)}\right).$$

4. Campi vettoriali, lavoro.
Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(yz, -xz, xz^2\right)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ z = ht \end{cases} \quad \text{per } t \in [0, 2\pi],$$

dove a, b, h sono costanti positive. Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= (a\cos t, b\sin t, ht) \\ \underline{r}'(t) &= (-a\sin t, b\cos t, h). \\ \underline{F}(\underline{r}(t)) &= \left(bht\sin t, -aht\cos t, ah^2t^2\cos t\right) \\ \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) &= \left(bht\sin t, -aht\cos t, ah^2t^2\cos t\right) \cdot (-a\sin t, b\cos t, h) \\ &= -abht + ah^3t^2\cos t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left\{-abht + ah^3t^2\cos t\right\} dt \\ &= -abh\frac{(2\pi)^2}{2} + ah^3\int_0^{2\pi} t^2\cos t dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} t^2\cos t dt &= \left[t^2\sin t\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t\sin t dt \\ &= -2\left\{\left[-t\cos t\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cot s dt\right\} = 4\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= -2\pi^2abh + 4\pi ah^3 \\ &= 2\pi ah\left(2h^2 - \pi b\right). \end{aligned}$$

5. Integrale di superficie.
Sia Σ la superficie laterale del cono di raggio R, altezza h, vertice nell'origine e asse l'asse z.
a. Scrivere le equazioni parametriche di Σ e il suo elemento d'area, costruendola come superficie di rotazione.

b. Calcolare la massa totale di Σ supponendo che sia una superficie materiale di densità superficiale

$$\sigma(x,y,z)=\frac{(Rh+|x|\,z)}{hR^3}\mu$$

dove μ è una costante positiva aventi le dimensioni di una massa.

a. La superficie è generata dalla rotazione intorno all'asse z del segmento:

$$\begin{cases} x=t=a(t) \\ z=\frac{h}{R}t=b(t) \end{cases} \quad t\in[0,R]$$

perciò ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=t\cos\theta \\ y=t\sin\theta \quad t\in[0,R]\,,\theta\in[0,2\pi] \\ z=\frac{h}{R}t \end{cases}$$

e elemento d'area

$$dS=|a(t)|\sqrt{a'(t)^2+b'(t)^2}dtd\theta=t\sqrt{1+\left(\frac{h}{R}\right)^2}dtd\theta.$$

b.

$$\begin{aligned}
m&=\int\int_\Sigma \sigma(x,y,z)\,dS=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{\left(Rh+|t\cos\theta|\,\frac{h}{R}t\right)}{hR^3}\mu\cdot t\sqrt{1+\left(\frac{h}{R}\right)^2}dt\right)d\theta \\
&=\mu\sqrt{1+\left(\frac{h}{R}\right)^2}\frac{1}{hR^3}\int_0^{2\pi}\int_0^R\left(Rht+t^3|\cos\theta|\frac{h}{R}\right)dtd\theta \\
&=\mu\sqrt{1+\left(\frac{h}{R}\right)^2}\frac{1}{hR^3}\left[2\pi\cdot Rh\cdot\frac{R^2}{2}+\frac{h}{R}\frac{R^4}{4}4\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta\right] \\
&=\mu\sqrt{1+\left(\frac{h}{R}\right)^2}\frac{1}{hR^3}\left[\pi R^3h+hR^3\right]=\mu\sqrt{1+\left(\frac{h}{R}\right)^2}(\pi+1)\,.
\end{aligned}$$