Analisi Matematica 2. Appello di luglio 2022
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)________________________________
codice persona (o n°di matricola)________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____________________________________

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 3xy = x\sin\left(x^2\right) \\ y\left(\sqrt{\pi}\right) = 0 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Curve e integrali di linea
Si consideri l'arco di curva materiale piana omogenea γ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}\left(t\right) = \left(t - \operatorname{Th} t, \frac{1}{\operatorname{Ch} t}\right) \text{ per } t \in [-3, 3].$$

Calcolare l'elemento d'arco ds, la lunghezza di γ e le coordinate del suo centroide, sfruttando le simmetrie e semplificando le espressioni trovate.

3. Integrale triplo
Si consideri il solido omogeneo Ω descritto da:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq x + 2R\right\}$$

con $R > 0$ fissato. (Si suggerisce di disegnare Ω per capire di che solido si tratta e sfruttare meglio le simmetrie).
Calcolare il volume e la coordinata x_C del centroide di Ω.

4. Flusso di un campo vettoriale
Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F}(x, y, z) = (z, y, x)$$

attraverso la superficie Σ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}(t, u) = \left(t^2, ut, u^2\right), \text{ con } u^2 + t^2 \leq R^2$$

($R > 0$ fissato), orientando Σ in modo che la terza componente della normale sia ≥ 0.

5. Massimi e minimi vincolati
Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x^4 + 1} - \frac{1}{y^2 + 1}$$

soggetta al vincolo

$$x^2 + y^4 = 16.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Analisi Matematica 2. Appello di luglio 2022
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	7
2	7
3	6
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 3xy = x \sin(x^2) \\ y(\sqrt{\pi}) = 0 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui in $\mathbb{R}$, la soluzione del problema sarà definita in tutto $\mathbb{R}$.
$a(x) = 3x$
$A(x) = \int a(x)\, dx = \frac{3}{2}x^2$.
Integrale generale:

$$y(x) = e^{-\frac{3}{2}x^2} \left\{ c + \int e^{\frac{3}{2}x^2} x \sin(x^2)\, dx \right\}$$

$$\int e^{\frac{3}{2}x^2} x \sin(x^2)\, dx = \left(x^2 = t; dx = \frac{1}{2}dt \right) = \frac{1}{2} \int e^{\frac{3}{2}t} \sin t dt$$

$$\begin{aligned} I &= \int e^{\frac{3}{2}t} \sin t dt = -e^{\frac{3}{2}t} \cos t + \int \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}t} \cos t dt \\ &= -e^{\frac{3}{2}t} \cos t + \frac{3}{2} \left\{ e^{\frac{3}{2}t} \sin t - \int \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}t} \sin t dt \right\} \\ &= e^{\frac{3}{2}t} \left(\frac{3}{2} \sin t - \cos t \right) - \frac{9}{4} I. \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{1 + \frac{9}{4}} e^{\frac{3}{2}t} \left(\frac{3}{2} \sin t - \cos t \right) = \frac{2}{13} e^{\frac{3}{2}t} (3 \sin t - 2 \cos t).$$

$$\int e^{\frac{3}{2}x^2} x \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2} I = \frac{1}{13} e^{\frac{3}{2}x^2} \left(3 \sin(x^2) - 2 \cos(x^2) \right).$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\frac{3}{2}x^2} \left\{ c + \frac{1}{13} e^{\frac{3}{2}x^2} \left(3 \sin(x^2) - 2 \cos(x^2) \right) \right\} \\ &= c e^{-\frac{3}{2}x^2} + \frac{1}{13} \left(3 \sin(x^2) - 2 \cos(x^2) \right). \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y\left(\sqrt{\pi}\right)=0$ e abbiamo

$$\begin{aligned}
0&=ce^{-\frac{3}{2}\pi}+\frac{2}{13}\\
c&=-\frac{2}{13}e^{\frac{3}{2}\pi}\\
y\left(x\right)&=\frac{1}{13}\left\{3\sin\left(x^2\right)-2\cos\left(x^2\right)-2e^{\frac{3}{2}\left(\pi-x^2\right)}\right\}.
\end{aligned}$$

2. Curve e integrali di linea

Si consideri l'arco di curva materiale piana omogenea γ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}\left(t\right)=\left(t-\operatorname{Th}t,\frac{1}{\operatorname{Ch}t}\right)\text{ per }t\in\left[-3,3\right].$$

Calcolare l'elemento d'arco ds, la lunghezza di γ e le coordinate del suo centroide, sfruttando le simmetrie e semplificando le espressioni trovate.

$$\begin{aligned}
\underline{r}'\left(t\right)&=\left(1-\frac{1}{\operatorname{Ch}^2t},-\frac{\operatorname{Sh}t}{\operatorname{Ch}^2t}\right)\\
\left|\underline{r}'\left(t\right)\right|^2&=1-\frac{2}{\operatorname{Ch}^2t}+\frac{1}{\operatorname{Ch}^4t}+\frac{\operatorname{Sh}^2t}{\operatorname{Ch}^4t}=1-\frac{2}{\operatorname{Ch}^2t}+\frac{\operatorname{Ch}^2t}{\operatorname{Ch}^4t}=1-\frac{1}{\operatorname{Ch}^2t}=\frac{\operatorname{Sh}^2t}{\operatorname{Ch}^2t}\\
ds&=\frac{\left|\operatorname{Sh}t\right|}{\operatorname{Ch}t}dt.
\end{aligned}$$

Lunghezza:

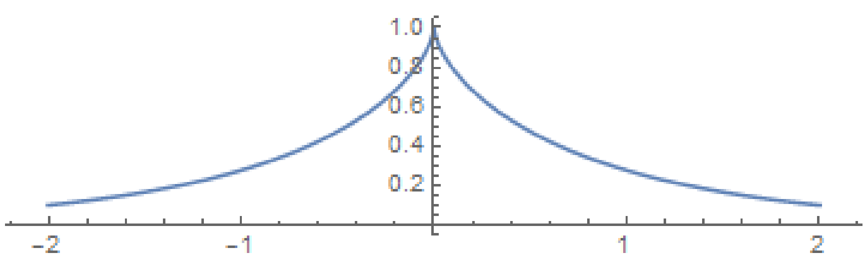
$$l\left(\gamma\right)=\int_{-3}^{3}\frac{\left|\operatorname{Sh}t\right|}{\operatorname{Ch}t}dt=2\int_0^3\frac{\operatorname{Sh}t}{\operatorname{Ch}t}dt=2\left[\log\left(\operatorname{Ch}t\right)\right]_0^3=2\log\left(\operatorname{Ch}3\right).$$

Centroide:

$$x_C=\frac{1}{l\left(\gamma\right)}\int_\gamma xds=\frac{1}{2\log\left(\operatorname{Ch}3\right)}\int_{-3}^{3}\left(t-\operatorname{Th}t\right)\frac{\left|\operatorname{Sh}t\right|}{\operatorname{Ch}t}dt=0$$

per simmetria dispari dell'integranda.

$$\begin{aligned}
y_C&=\frac{1}{l\left(\gamma\right)}\int_\gamma yds=\frac{1}{2\log\left(\operatorname{Ch}3\right)}\int_{-3}^{3}\frac{1}{\operatorname{Ch}t}\frac{\left|\operatorname{Sh}t\right|}{\operatorname{Ch}t}dt\\
&=\frac{1}{2\log\left(\operatorname{Ch}3\right)}2\int_0^3\frac{\operatorname{Sh}t}{\operatorname{Ch}^2t}dt=\frac{1}{\log\left(\operatorname{Ch}3\right)}\left[-\frac{1}{\operatorname{Ch}t}\right]_0^3\\
&=\frac{1}{\log\left(\operatorname{Ch}3\right)}\left(1-\frac{1}{\operatorname{Ch}3}\right)\simeq0.39.
\end{aligned}$$



3. Integrale triplo
Si consideri il solido omogeneo Ω descritto da:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq x + 2R\right\}$$

con $R > 0$ fissato. (Si suggerisce di disegnare Ω per capire di che solido si tratta e sfruttare meglio le simmetrie).
Calcolare il volume e la coordinata x_C del centroide di Ω.

$$|\Omega| = \int\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(\int_0^{x+2R} dz\right) dxdy = \int\int_{x^2+y^2\leq R^2} (x + 2R)\, dxdy$$

(per simmetria dispari)

$$= \int\int_{x^2+y^2\leq R^2} 2Rdxdy = 2R \cdot \pi R^2 = 2\pi R^3.$$

Centroide:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{|\Omega|} \int\int\int_\Omega xdxdydz = \frac{1}{2\pi R^3} \int\int_{x^2+y^2\leq R^2} x \left(\int_0^{x+2R} dz\right) dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi R^3} \int\int_{x^2+y^2\leq R^2} \left(x^2 + 2Rx\right) dxdy \end{aligned}$$

(per simmetria dispari)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi R^3} \int\int_{x^2+y^2\leq R^2} x^2 dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi R^3} \left(\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^2 \cos^2\theta \rho d\rho d\theta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi R^3} \left[\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta\right)\left(\int_0^R \rho^3 d\rho\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi R^3}\left(\pi \cdot \frac{R^4}{4}\right) = \frac{R}{8}. \end{aligned}$$

4. Flusso di un campo vettoriale
Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F}\,(x, y, z) = (z, y, x)$$

attraverso la superficie Σ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}\,(t, u) = \left(t^2, ut, u^2\right),\ \text{con } u^2 + t^2 \leq R^2$$

($R > 0$ fissato), orientando Σ in modo che la terza componente della normale sia ≥ 0.

$$\underline{r}_t \times \underline{r}_u = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2t & u & 0 \\ 0 & t & 2u \end{vmatrix} = \left(2u^2, -4ut, 2t^2\right).$$

Poiché la terza componente è ≥ 0, è già l'orientazione richiesta.

$$\underline{n} \cdot dS = \left(2u^2, -4ut, 2t^2\right) dudt.$$

$$\underline{F} = (z, y, x) = \left(u^2, ut, t^2\right)$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int\int_\Sigma \underline{F} \cdot \underline{n} \cdot dS = \int\int_{u^2+t^2 \leq R^2} \left(u^2, ut, t^2\right) \cdot \left(2u^2, -4ut, 2t^2\right) dudt \\
&= \int\int_{u^2+t^2 \leq R^2} \left(2u^4 - 4u^2t^2 + 2t^4\right) dtdu \\
&= 2\int\int_{u^2+t^2 \leq R^2} \left(u^2 - t^2\right)^2 dtdu \\
&= 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \left(\rho^2 \cos^2\theta - \rho^2 \sin^2\theta\right)^2 \rho d\rho\right) d\theta \\
&= 2\left(\int_0^R \rho^5 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2(2\theta)\, d\theta\right) \\
&= 2 \cdot \frac{R^6}{6} \cdot \pi = \frac{\pi}{3} R^6.
\end{aligned}$$

5. Massimi e minimi vincolati

Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x^4 + 1} - \frac{1}{y^2 + 1}$$

soggetta al vincolo

$$x^2 + y^4 = 16.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Sia $g(x, y) = x^2 + y^4 - 16$, poiché g è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$\nabla g(x, y) = \left(2x, 4y^3\right) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

e $g(0, 0) \neq 0$, il vincolo non ha punti critici. Definiamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = \frac{1}{x^4 + 1} - \frac{1}{y^2 + 1} - \lambda\left(x^2 + y^4 - 16\right)$$

e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{4x^3}{(x^4+1)^2} - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{2y}{(y^2+1)^2} - 4\lambda y^3 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\left(x^2 + y^4 - 16\right) = 0 \end{cases}$$

La 1^a equazione dà:

$$-\frac{4x^3}{(x^4+1)^2}-2\lambda x=-2x\left[\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}+\lambda\right]=0 \text{ per } \begin{cases} x=0 \text{ oppure} \\ \lambda=-\frac{2x^2}{(x^2+1)^2} \end{cases}$$

Se $x=0$ la terza equazione dà $y=\pm 2$ (e la seconda dà un certo valore di λ). Se invece $x\neq 0$ e quindi $\lambda=-\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}$, la seconda equazione dà

$$2y\left[\frac{1}{(y^2+1)^2}-2\lambda y^2\right]=2y\left[\frac{1}{(y^2+1)^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+1)^2}\right]=0 \text{ se e solo se } y=0$$

(la quantità entro quadre è sempre positiva). Perciò $x\neq 0\Rightarrow y=0$, che dalla terza equazione dà $x=\pm 4$.
Perciò i punti stazionari della lagrangiana sono

$$(\pm 4,0)\,,(0,\pm 2)\,.$$

Poiché il vincolo rappresenta un insieme chiuso e limitato del piano, per il teorema di Weierstrass massimo e minimo assoluto vincolato di f esistono certamente, basta perciò confrontare i valori di f in questi 4 punti. Si ha:

$$f(\pm 4,0)=\frac{1}{257}-1<0$$
$$f(0,\pm 2)=1-\frac{1}{5}>0$$

pertanto:

$(\pm 4,0)$ sono punti di minimo assoluti vincolati
$(0,\pm 2)$ sono punti di massimo assoluti vincolati.