Analisi Matematica 2. Appello di luglio 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 5y' = 4e^{-x} \sin(2x).$$

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea si raccomanda di usare il metodo dell'esponenziale complesso.

2. Curve e integrali di linea
Sia γ l'arco di curva piano di equazione polare

$$\rho = e^{\theta} \text{ per } \theta \in [-\pi, \pi].$$

a. Scrivere le equazioni parametriche della curva e calcolare l'elemento d'arco ds.
b. Calcolare l'integrale di linea, semplificando l'espressione ottenuta:

$$\int_{\gamma} xyds.$$

3. Integrali tripli.
Si consideri il solido materiale non omogeneo Ω descritto dall'ellissoide:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq R^2 \right\}$$

avente densità:

$$\delta(x, y, z) = \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{\mu}{64R^3}$$

dove μ, R sono costanti positive avente le dimensioni di una massa e di una lunghezza, rispettivamente. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z. *Riportare con cura impostazione e passaggi. Si raccomanda di utilizzare le coordinate ellissoidali.*

4. Funzione implicita
Dimostrare che l'equazione

$$f(x,y) = \left(x^2+1\right)\log y + e^{-2x}(y-e-1) = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$. Calcolare quindi $g'(0)$.

5. Campi vettoriali.
Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(ze^{-y} + yz(1-x)e^{-x-z}, e^{-z} - xze^{-y} + xze^{-x-z}, xe^{-y} - ye^{-z} + xy(1-z)e^{-x-z}\right).$$

a. Si verifichi se il campo è irrotazionale o meno in $\mathbb{R}^3$.
b. Si stabilisca se il campo è conservativo o meno in $\mathbb{R}^3$, calcolando in caso affermativo un potenziale di $\underline{F}$.

Analisi Matematica 2. Appello di luglio 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	7
2	7
3	7
4	6
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del second'ordine

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 5y' = 4e^{-x} \sin(2x).$$

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea si raccomanda di usare il metodo dell'esponenziale complesso.

$$\alpha^2 + 5\alpha = 0$$
$$\alpha = -5; \alpha = 0$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 e^{-5x} + c_2.$$

Metodo di somiglianza, notando che

$$4e^{-x} \sin(2x) = \operatorname{Im}\left(4e^{x(-1+2i)}\right)$$

risolvo prima l'equazione complessa

$$w'' + 5w' = 4e^{x(-1+2i)}$$

e poi porrò $\overline{y}(x) = \operatorname{Im}(w(x))$. Per risolvere l'equazione in w utilizzo il metodo di somiglianza, cercando

$$\begin{aligned} w(x) &= Ae^{x(-1+2i)} \\ w'(x) &= A(-1+2i)e^{x(-1+2i)} \\ w''(x) &= A(-1+2i)^2 e^{x(-1+2i)} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} Ae^{x(-1+2i)}\left\{(-1+2i)^2 + 5(-1+2i)\right\} &= 4e^{x(-1+2i)} \\ A\{(-3-4i) + (-5+10i)\} &= 4 \\ A = \frac{4}{-8+6i} = \frac{2}{-4+3i} &= \frac{2(-4-3i)}{25}. \end{aligned}$$

$$w(x) = \frac{2(-4-3i)}{25} e^{x(-1+2i)} = \frac{2e^{-x}}{25}(-4-3i)(\cos(2x) + i\sin(2x))$$

Quindi

$$\overline{y}(x) = \operatorname{Im}(w(x)) = \frac{2}{25} e^{-x}(-3\cos(2x) - 4\sin(2x)).$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 - \frac{6}{25}\cos(2x) - \frac{8}{25} e^{-x}\sin(2x).$$

2. Curve e integrali di linea

Sia γ l'arco di curva piano di equazione polare

$$\rho = e^{\theta} \text{ per } \theta \in [-\pi, \pi].$$

a. Scrivere le equazioni parametriche della curva e calcolare l'elemento d'arco ds.
b. Calcolare l'integrale di linea, semplificando l'espressione ottenuta:

$$\int_{\gamma} xyds.$$

a. Equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = e^{\theta}\cos\theta \\ y = e^{\theta}\sin\theta \end{cases} \text{ per } \theta \in [-\pi, \pi].$$

$$\rho' = e^{\theta}$$
$$ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = \sqrt{2e^{2\theta}} d\theta = \sqrt{2} e^{\theta} d\theta.$$

b.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} xyds &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{\theta}\cos\theta e^{\theta}\sin\theta \sqrt{2} e^{\theta} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{3\theta}\sin(2\theta) d\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int e^{3\theta}\sin(2\theta) d\theta = \operatorname{Im}\int e^{\theta(3+2i)} d\theta = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{\theta(3+2i)}}{3+2i}\right) \\ = \frac{e^{3\theta}}{9+4} \cdot \operatorname{Im}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(3-2i) \\ = \frac{e^{3\theta}}{13}(-2\cos 2\theta + 3\sin 2\theta).\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} xyds &= \frac{1}{13\sqrt{2}}\left[e^{3\theta}(-2\cos 2\theta + 3\sin 2\theta)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{13\sqrt{2}}\left[-2e^{3\pi} + 2e^{-3\pi}\right] = \frac{\sqrt{2}}{13}\left(-e^{3\pi} + e^{-3\pi}\right).\end{aligned}$$

3. Integrali tripli.
Si consideri il solido materiale non omogeneo Ω descritto dall'ellissoide:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq R^2 \right\}$$

avente densità:

$$\delta(x, y, z) = \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{\mu}{64R^3}$$

dove μ, R sono costanti positive avente le dimensioni di una massa e di una lunghezza, rispettivamente. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z. *Riportare con cura impostazione e passaggi. Si raccomanda di utilizzare le coordinate ellissoidali.*

Ω è un ellissoide di semiassi $3R, 2R, R$. Utilizziamo le coordinate ellissoidali:

$$\begin{cases} x = 3\rho \sin\phi \cos\theta \\ y = 2\rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

$$dxdydz = 3 \cdot 2\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\Omega = \{(\rho, \phi, \theta) : \rho \in [0, R], \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_\Omega \left(x^2 + y^2\right) \delta(x, y, z) \, dxdydz \\
&= \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left[9\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + 4\rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta\right] \left(1 + \frac{\rho^2 \cos^2\phi}{R^2}\right) \frac{\mu}{64R^3} d\theta \right) \sin\phi d\phi \right) 6\rho^2 d\rho \\
&= 6\frac{\mu}{64R^3} \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(1 + \frac{\rho^2\cos^2\phi}{R^2}\right) \left[9\sin^2\phi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta + 4\sin^2\phi \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta\right] \sin\phi d\phi \right) \rho^4 d\rho \\
&= \frac{3\mu}{32R^3} \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(1 + \frac{\rho^2\cos^2\phi}{R^2}\right) 13\pi \sin^3\phi d\phi \right) \rho^4 d\rho \\
&= \frac{3\mu}{32R^3} 13\pi \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(1 + \frac{\rho^2}{R^2}\cos^2\phi\right) \left(1 - \cos^2\phi\right) \sin\phi d\phi \right) \rho^4 d\rho
\end{aligned}$$

$\cos\phi = t; -\sin\phi d\phi = dt; t \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{39}{32}\pi \frac{\mu}{R^3} \int_0^R \left(\int_{-1}^1 \left(1 + \frac{\rho^2}{R^2} t^2\right) \left(1 - t^2\right) dt \right) \rho^4 d\rho \\
&= \frac{39}{32}\pi \frac{\mu}{R^3} \int_0^R \left(2\int_0^1 \left(1 + t^2 \left(\frac{\rho^2}{R^2} - 1\right) - \frac{\rho^2}{R^2} t^4\right) dt \right) \rho^4 d\rho \\
&= \frac{39}{32}\pi \frac{\mu}{R^3} \int_0^R 2 \left[t + \frac{t^3}{3}\left(\frac{\rho^2}{R^2} - 1\right) - \frac{\rho^2}{R^2}\frac{t^5}{5}\right]_0^1 \rho^4 d\rho
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{39}{32}\cdot 2\pi \frac{\mu}{R^3}\int_0^R \left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\rho^2}{R^2}-1\right)-\frac{\rho^2}{R^2}\frac{1}{5}\right]\rho^4 d\rho \\
&= \frac{39}{16}\pi \frac{\mu}{R^3}\int_0^R \left(\frac{2}{3}\rho^4+\frac{2}{15}\frac{\rho^6}{R^2}\right) d\rho \\
&= \frac{39}{16}\pi \frac{\mu}{R^3}\left(\frac{2}{3}\frac{R^5}{5}+\frac{2}{15}\frac{R^7}{7R^2}\right) \\
&= \frac{39}{16}\pi \cdot \frac{2}{15}\cdot \frac{8}{7}\pi\mu R^2 = \frac{13}{35}\pi\mu R^2.
\end{aligned}
$$

4. Funzione implicita

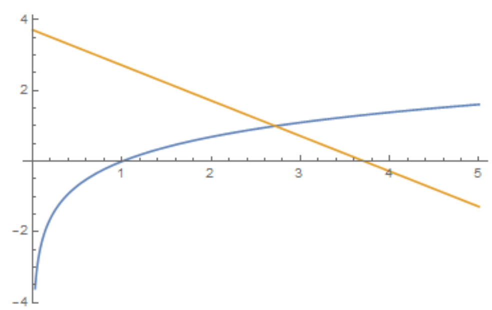
Dimostrare che l'equazione

$$f(x,y) = \left(x^2+1\right)\log y + e^{-2x}(y-e-1) = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$. Calcolare quindi $g'(0)$, semplificando l'espressione ottenuta.

La funzione è $C^1(A)$ con $A = \{(x,y) : y > 0\}$.

$$
\begin{aligned}
f(0,y) &= \log y + (y-e-1) = 0 \\
\log y &= (1+e-y) \text{ per } y = e.
\end{aligned}
$$



Quindi $y_0 = e$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{(x^2+1)}{y} + e^{-2x} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,e) &= \frac{1}{e} + 1 \neq 0
\end{aligned}
$$

Poiché $f \in C^1(A)$, $(0,e) \in A$, $f(0,e) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,e) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$, C^1, in un intorno di $x_0 = 0$, ed è $g(0) = e$. Si ha:

$$f(x,y) = \left(x^2+1\right)\log y + e^{-2x}(y-e-1)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\log y - 2e^{-2x}(y-e-1) \\
\frac{\partial f}{\partial x}(0,e) &= 2 \\
g'(0) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,e)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,e)} = -\frac{2}{\frac{1}{e}+1}.
\end{aligned}
$$

5. Campi vettoriali.
Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(ze^{-y} + yz(1-x)e^{-x-z}, e^{-z} - xze^{-y} + xze^{-x-z}, xe^{-y} - ye^{-z} + xy(1-z)e^{-x-z}\right).$$

a. Si verifichi se il campo è irrotazionale o meno in $\mathbb{R}^3$.
b. Si stabilisca se il campo è conservativo o meno in $\mathbb{R}^3$, calcolando in caso affermativo un potenziale di $\underline{F}$.

a.

$$\begin{aligned}
(F_1)_y &= -ze^{-y} + z(1-x)e^{-x-z} = (F_2)_x; \\
(F_1)_z &= e^{-y} + y(1-x)(1-z)e^{-x-z} = (F_3)_x \\
(F_2)_z &= -e^{-z} - xe^{-y} + x(1-z)e^{-x-z} = (F_3)_y.
\end{aligned}$$

Quindi il campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^3$.
b. Essendo il campo vettoriale irrotazionale in $\mathbb{R}^3$, dominio semplicemente connesso, il campo è anche conservativo in $\mathbb{R}^3$. Determiniamone un potenziale. Cerchiamo $U(x,y,z)$ tale che

$$\begin{aligned}
U_x(x,y,z) &= F_1(x,y,z) = ze^{-y} + yz(1-x)e^{-x-z} \\
U(x,y,z) &= \int \left(ze^{-y} + yz(1-x)e^{-x-z}\right) dx \\
&= xze^{-y} + yze^{-z} \int (1-x)e^{-x} dx \\
&= xze^{-y} + xyze^{-x-z} + f(y,z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_y(x,y,z) &= -xze^{-y} + xze^{-x-z} + f_y(y,z) = F_2 = e^{-z} - xze^{-y} + xze^{-x-z} \\
f_y(y,z) &= e^{-z}; f(y,z) = ye^{-z} + g(z); \\
U(x,y,z) &= xze^{-y} + xyze^{-x-z} + ye^{-z} + g(z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_z(x,y,z) &= xe^{-y} + xy(1-z)e^{-x-z} - ye^{-z} + g'(z) \\
&= F_3 = xe^{-y} - ye^{-z} + xy(1-z)e^{-x-z}; \\
g'(z) &= 0; g(z) = c;
\end{aligned}$$

e in definitiva

$$U(x,y,z) = xze^{-y} + xyze^{-x-z} + ye^{-z} + c.$$