Analisi Matematica 2. Appello di luglio 2024
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)____________________________________
codice persona (o n°di matricola)____________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - y' - 6y = 5xe^{-2x}.$$

2. Massimi e minimi vincolati
Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 8y^3$$

soggetta al vincolo

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

3. Integrale doppio
Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse z di una lamina piana non omogenea che nel piano xy è descritta analiticamente da

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

e avente densità superficiale

$$\delta(x,y) = \frac{\mu}{ab} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)},$$

dove μ, a, b sono costanti positive fissate aventi le dimensioni μ di una massa, a e b di una lunghezza.

4. Integrali di linea
a. Calcolare il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F} = (y, -x)$$

lungo l'arco di curva γ di equazione polare

$$\rho = R\theta^2 \text{ con } \theta \in [0, 2\pi],$$

dove $R > 0$ è una costante fissata. *Si riporti con cura l'impostazione.*
b. Calcolare quindi l'elemento di lunghezza ds sulla curva e la lunghezza di γ.

5. Serie di Fourier
Si consideri la funzione π-periodica definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{per } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{2}{\pi}x & \text{per } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \end{cases}.$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier b_k di f. Non si richiede il calcolo dei coefficienti a_k.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Analisi Matematica 2. Appello di luglio 2024
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	7
2	7
3	6
4	7
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del second'ordine

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - y' - 6y = 5xe^{-2x}.$$

$$\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$$
$$\alpha = -2; \alpha = 3$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}.$$

Metodo di somiglianza, notando che il termine noto è $5xe^{-2x}$ e $\lambda = -2$ risolve l'equazione omogenea, cerco una soluzione particolare del tipo:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-2x}\left(Ax^2 + Bx\right) \\ y'(x) &= e^{-2x}\left(-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B\right) \\ y''(x) &= e^{-2x}\left(4Ax^2 + 4Bx - 4Ax - 2B - 4Ax - 2B + 2A\right) \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} &e^{-2x}\left\{\left(4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A\right) + \right. \\ &\left. -\left(-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B\right) - 6\left(Ax^2 + Bx\right)\right\} = 5xe^{-2x} \\ &(-10Ax - 6B) + (2A - 5B) = 5x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -10A = 5 \\ 2A - 5B = 0 \end{cases} \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$y(x) = e^{-2x}\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x\right)$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + e^{-2x}\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x\right).$$

2. Massimi e minimi vincolati
Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 8y^3$$

soggetta al vincolo

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Sia $g(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$, poiché g è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$\nabla g(x,y) = \left(\frac{x}{2}, 2y\right) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

e $g(0,0) \neq 0$, il vincolo non ha punti critici. Definiamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 + 8y^3 - \lambda\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$$

e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda\frac{x}{2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 24y^2 - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right) = 0 \end{cases}$$

La 1^a equazione dà:

$$x = 0 \text{ oppure } \lambda = 4.$$

Se $x = 0$ la terza equazione dà $y = \pm 1$ (e la seconda dà un certo valore di λ). Se invece $x \neq 0$ e quindi $\lambda = 4$, la seconda equazione dà

$$\begin{aligned} 24y^2 - 8y &= 0 \\ 8y(3y-1) &= 0 \\ y = 0 \text{ oppure } y &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Se $y = 0$ la terza equazione dà $x = \pm 2$.
Se $y = \frac{1}{3}$ la terza equazione dà

$$\begin{gathered} \frac{x^2}{4} + \frac{1}{9} = 1, x^2 = 4 \cdot \frac{8}{9}, \\ x = \pm\frac{4}{3}\sqrt{2} \end{gathered}$$

Perciò i punti stazionari della lagrangiana sono

$$(0,\pm 1), (\pm 2, 0), \left(\pm\frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right).$$

Poiché il vincolo rappresenta un insieme chiuso e limitato del piano, per il teorema di Weierstrass massimo e minimo assoluto vincolato di f esistono certamente, basta perciò confrontare i valori di f in questi 6 punti. Si ha:

$$\begin{aligned} f(0, \pm 1) &= \pm 8. \\ f(\pm 2, 0) &= 4 \\ f\left(\pm \frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right) &= \frac{32}{9} + \frac{8}{27} = \frac{104}{27}. \end{aligned}$$

pertanto:

$$\begin{aligned} &(0,1) \text{ è punto di massimo assoluto vincolato} \\ &(0,-1) \text{ è punto di minimo assoluto vincolato.} \end{aligned}$$

3. Integrale doppio

Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse z di una lamina piana non omogenea che nel piano xy è descritta analiticamente da

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

e avente densità superficiale

$$\delta(x,y) = \frac{\mu}{ab} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)},$$

dove μ, a, b sono costanti positive fissate aventi le dimensioni μ di una massa, a e b di una lunghezza.

$$I_z = \int\int_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) \delta(x,y)\, dxdy = \int\int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \left(x^2 + y^2\right) \frac{\mu}{ab} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dxdy.$$

Usiamo le coordinate polari ellittiche:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases} \quad dxdy = ab\rho d\rho d\theta$$

con cui $\Omega' = \{(\rho, \theta) : \rho \in [0,1], \theta \in [0, 2\pi]\}$.

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right) \frac{\mu}{ab} e^{-\rho^2} ab\rho d\rho d\theta \\ &= \mu \int_0^{2\pi} \left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right) d\theta \cdot \int_0^1 \underbrace{\left(-2\rho e^{-\rho^2}\right)}_{f'} \cdot \underbrace{\left(-\frac{\rho^2}{2}\right)}_{g} d\rho \\ &= \mu\pi \left(a^2 + b^2\right) \left\{ \left[-e^{-\rho^2} \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-\rho^2} \rho d\rho \right\} \\ &= \mu\pi \left(a^2 + b^2\right) \left[-e^{-\rho^2} \frac{\rho^2 + 1}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right) \pi\mu \left(a^2 + b^2\right). \end{aligned}$$

4. Integrali di linea
a. Calcolare il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F} = (y, -x)$$

lungo l'arco di curva γ di equazione polare

$$\rho = R\theta^2 \text{ con } \theta \in [0, 2\pi],$$

dove $R > 0$ è una costante fissata. *Si riporti con cura l'impostazione.*
b. Calcolare quindi l'elemento di lunghezza ds sulla curva e la lunghezza di γ.

a. La curva ha equazione parametrica vettoriale:

$$\begin{aligned} \underline{r}(\theta) &= \left(R\theta^2 \cos\theta, R\theta^2 \sin\theta\right) \text{ con } \theta \in [0, 2\pi]. \\ \underline{r}'(\theta) &= R2\theta(\cos\theta, \sin\theta) + R\theta^2(-\sin\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

Il campo lungo la curva è:

$$\underline{F}(\underline{r}(\theta)) = \left(R\theta^2 \sin\theta, -R\theta^2 \cos\theta\right).$$

Il lavoro è:

$$\begin{aligned} L &= \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{r}(\theta)) \cdot \underline{r}'(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R\theta^2(\sin\theta, -\cos\theta) \cdot \left\{R2\theta(\cos\theta, \sin\theta) + R\theta^2(-\sin\theta, \cos\theta)\right\} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{0 + R^2\theta^4\left(-\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\right\} d\theta = -R^2 \int_0^{2\pi} \theta^4 d\theta = -R^2 \frac{(2\pi)^5}{5} = -\frac{32}{5}\pi^5 R^2. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho')^2(\theta)}d\theta = \sqrt{(R\theta^2)^2 + (2R\theta)^2}d\theta \\ &= R\theta\sqrt{\theta^2 + 4}d\theta \end{aligned}$$

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} R\theta\sqrt{\theta^2 + 4}d\theta$$
$$\sqrt{\theta^2 + 4} = u; \theta^2 + 4 = u^2; \theta d\theta = u du$$

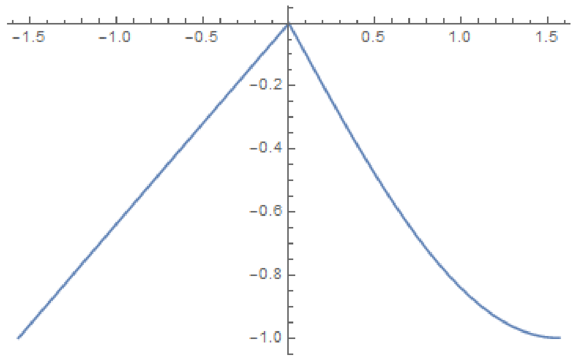
$$\ell(\gamma) = R\int_2^{2\sqrt{1+\pi^2}} u^2 du = \frac{R}{3}\left(\left(2\sqrt{1+\pi^2}\right)^3 - 8\right) = \frac{8}{3}R\left(\left(\sqrt{1+\pi^2}\right)^3 - 1\right).$$

5. Serie di Fourier
Si consideri la funzione π-periodica definita in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ da

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{per } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{2}{\pi}x & \text{per } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \end{cases}.$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier b_k di f. Non si richiede il calcolo dei coefficienti a_k.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La funzione periodizzata è continua in $\mathbb{R}$ e regolare a tratti, con derivata prima discontinua. Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



I coefficienti di Fourier tenderanno a zero $o\left(\frac{1}{k}\right)$.
b. La funzione non è né pari né dispari. Calcoliamo, per $T = \pi, \omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(k\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2kx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2}{\pi} x\sin(2kx)\,dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin(2kx)\,dx\right\}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i due integrali.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\sin(2kx)\,dx &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos(2kx)}{2k}\right]_{-\pi/2}^{0} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos(2kx)}{2k}dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\frac{\pi}{2}\cos(k\pi)}{2k} + \frac{1}{4k^2}\left[\sin(2kx)\right]_{-\pi/2}^{0}\right\} = -\frac{\cos(k\pi)}{2k}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin(2kx)\,dx &= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos((2k+1)x) - \cos((2k-1)x)\right]dx \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)} - \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)}\right]_{0}^{\pi/2} \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^k}{(2k+1)} + \frac{(-1)^k}{(2k-1)}\right] = -\frac{(-1)^k}{2}\frac{4k}{4k^2-1}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^k}{2}\frac{4k}{4k^2-1}\right) = \frac{(-1)^k}{\pi}\left(\frac{4k}{4k^2-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{(-1)^k}{\pi}\frac{1}{k\left(4k^2-1\right)}.
\end{aligned}
$$