Analisi Matematica 2. Appello di settembre 2022

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)____________________________________

codice persona (o n°di matricola)____________________________________

n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^3}{x \log x} \\ y(e) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Continuità e differenziabilità di funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\left(e^{2x}-e^{y}\right)(|x|-|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

3. Integrale di superficie

Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse x della curva γ che nel piano xz è grafico della funzione

$$z = 1 + \cos x \text{ per } x \in [0, \pi] .$$

a. Scrivere le equazioni parametriche di Σ, l'elemento d'area di Σ, e determinare gli eventuali punti singolari di Σ.
b. Calcolare l'integrale di superficie

$$\int\int_{\Sigma} (\sin x)\, dS.$$

Riportare impostazione e passaggi.

4. Campi vettoriali
Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x,y)=\left(x+\frac{9x}{9x^2+4y^2-1},\frac{4y}{9x^2+4y^2-1}+2y^3\right)$$

nell'aperto

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:9x^2+4y^2>1\right\}.$$

a. Stabilire se il campo è irrotazionale in Ω.
b. Stabilire se il campo è conservativo in Ω.
c. Calcolare, *col procedimento più semplice possibile*, il lavoro del campo $\underline{F}$ lungo l'arco di curva (quarto di circonferenza) $\gamma:\underline{r}(t)=(\cos t,\sin t)$ per $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5. Serie di Fourier
Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[0,2]$ da

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ per } x\in[0,1] \\ 2-x \text{ per } x\in[1,2]. \end{cases}$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Analisi Matematica 2. Appello di settembre 2022
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	7
2	7
3	6
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^3}{x \log x} \\ y(e) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione a variabili separabili. Soluzione costante dell'equazione è $y = 0$, che non risolve il problema. L'equazione impone $x > 0$.
Risolviamo:

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int \frac{dx}{x \log x}$$
$$-\frac{1}{2y^2} = \log|\log x| + c$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(e) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$-1 = c$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$-\frac{1}{2y^2} = \log|\log x| - c$$
$$y^2 = \frac{1}{2(1 - \log|\log x|)}$$

che impone (oltre a $x > 0$), $|\log x| > 0$ e $1 - \log|\log x| > 0$.
La condizione $|\log x| > 0$ dà $x \neq 1$, e dovendo la soluzione essere definita in un intorno di $x = e$, questo implica $x > 1$. Allora $\log x > 0$. La condizione

$$\begin{aligned} 1 - \log|\log x| &> 0 \text{ dà} \\ \log(\log x) &< 1 \\ \log x &< e \\ x &< e^e. \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione è definita in $(1, e^e)$. In quest'intervallo sarà

$$y = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \log(\log x))}}$$

(il segno $+$ della radice è perché $y(e) > 0$).

2. Continuità e differenziabilità di funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\left(e^{2x}-e^{y}\right)(|x|-|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Scriviamo:

$$f(x,y) = \left(e^{2x}-e^{y}\right)\frac{(|x|-|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} \equiv \left(e^{2x}-e^{y}\right) f_1(x,y).$$

Poiché f_1 è positivamente omogenea di grado 0 e continua fuori dall'origine, f_1 è limitata, perciò

$$|f(x,y)| \leq c\left|e^{2x}-e^{y}\right| \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)$$

perciò $f(x,y) \to 0$ e f è continua.
b.

$$f(x,0) = \frac{\left(e^{2x}-1\right)|x|}{\sqrt{x^2}} \sim \frac{2x|x|}{|x|} = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$$

$$f(0,y) = (1-e^{y})\frac{(-|y|)}{\sqrt{y^2}} = e^{y}-1 \sim y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (2,1)$.
c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$h(x,y) \equiv \frac{f(x,y)-2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Poniamo:

$$h(x,y) = \frac{\left(e^{2x}-e^{y}\right)\frac{(|x|-|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}}-2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

In particolare,

$$h(x,x) = \frac{-3x}{\sqrt{2x^2}} \to \mp\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ per } x \to 0^{\pm}.$$

Poiché $h(x,x)$ non tende a zero, f non è differenziabile in $(0,0)$.

3. Integrale di superficie

Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse x della curva γ che nel piano xz è grafico della funzione

$$z = 1 + \cos x \text{ per } x \in [0, \pi] .$$

a. Scrivere le equazioni parametriche di Σ, l'elemento d'area di Σ, e determinare gli eventuali punti singolari di Σ.

b. Calcolare l'integrale di superficie

$$\int\int_{\Sigma} (\sin x) \, dS.$$

Riportare impostazione e passaggi.

a. La superficie Σ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = (1 + \cos t) \cos \theta \quad t \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi] . \\ z = (1 + \cos t) \sin \theta \end{cases}$$

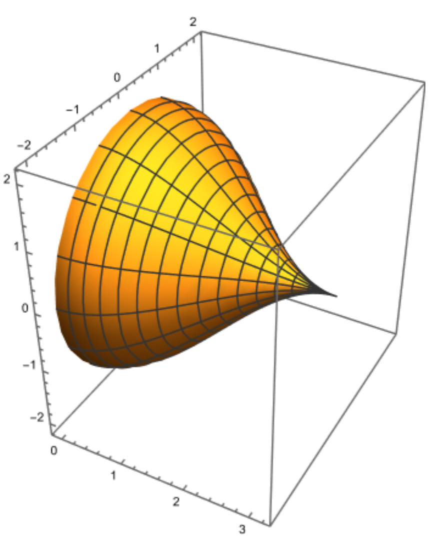
Posto $a(t) = (1 + \cos t), b(t) = t$, calcoliamo:

$$a'(t) = -\sin t; b'(t) = 1,$$

l'elemento d'area è:

$$\begin{aligned} dS &= |a(t)| \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} dt d\theta \\ &= (1 + \cos t) \sqrt{1 + \sin^2 t} dt d\theta. \end{aligned}$$

La superficie è singolare per $t = \pi$, cioè: $(\pi, 0, 0)$ è punto singolare.



b. Calcoliamo

$$\int\int_{\Sigma} (\sin x) \, dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin t (1 + \cos t) \sqrt{1 + \sin^2 t} dt \right) d\theta$$

Ponendo: $\cos t = u; -\sin t dt = du; u \in [1,-1]; \sqrt{1+\sin^2 t} = \sqrt{2-\cos^2 t}$

$$\begin{aligned}\int\int_{\Sigma} (\sin x)\, dS &= 2\pi \int_{-1}^{1} (1+u)\sqrt{2-u^2}du \\ &= 2\pi \left\{ \int_{-1}^{1} \sqrt{2-u^2}du + \int_{-1}^{1} u\sqrt{2-u^2}du \right\} \\ &= 2\pi \left\{ 2\int_{0}^{1} \sqrt{2-u^2}du + 0 \right\}\end{aligned}$$

Ponendo: $u = \sqrt{2}\sin v; du = \sqrt{2}\cos v dv; v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \sqrt{2-u^2} = \sqrt{2}\cos v$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos v\sqrt{2}\cos v dv = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v dv = 8\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi^2.$$

4. Campi vettoriali

Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x,y) = \left(x + \frac{9x}{9x^2+4y^2-1}, \frac{4y}{9x^2+4y^2-1} + 2y^3 \right)$$

nell'aperto

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2+4y^2 > 1 \right\}.$$

a. Stabilire se il campo è irrotazionale in Ω.
b. Stabilire se il campo è conservativo in Ω.
c. Calcolare, *col procedimento più semplice possibile*, il lavoro del campo $\underline{F}$ lungo l'arco di curva (quarto di circonferenza) $\gamma : \underline{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a. Per un campo piano la condizione di irrotazionalità equivale a $\partial_x F_2 = \partial_y F_1$. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\partial_x F_2 &= -\frac{4y}{(9x^2+4y^2-1)^2} \cdot 18x = -\frac{72xy}{(9x^2+4y^2-1)^2} \\ \partial_y F_1 &= -\frac{9x}{(9x^2+4y^2-1)^2} \cdot 8y = -\frac{72xy}{(9x^2+4y^2-1)^2}\end{aligned}$$

perciò il campo è irrotazionale in Ω.
b. Poiché Ω non è semplicemente connesso, non è possibile affermare che $\underline{F}$ è conservativo in quanto è irrotazionale: occorre vedere se esiste un potenziale. Cerchiamo un potenziale del campo in Ω, cioè $U(x,y)$ tale che $U_x = F_1$ e $U_y = F_2$.

$$\begin{aligned}U_x(x,y) &= x + \frac{9x}{9x^2+4y^2-1} \Rightarrow U(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log\left(9x^2+4y^2-1\right) + f(y) \\ U_y(x,y) &= \frac{4y}{9x^2+4y^2-1} + f'(y) = F_2 \Rightarrow f'(y) = 2y^3 \Rightarrow f(y) = \frac{y^4}{2} + c\end{aligned}$$

quindi

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log\left(9x^2+4y^2-1\right) + \frac{y^4}{2} + c.$$

Poiché $\underline{F}$ ha un potenziale U in tutto Ω, $\underline{F}$ è conservativo in Ω.
c. La linea γ ha per estremi $A = (1, 0)$ e $B = (0, 1)$, poiché il campo è conservativo il suo lavoro si può calcolare mediante il potenziale, così:

$$\begin{aligned} L &= \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = U(0,1) - U(1,0) \\ &= \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 8\right) \\ &= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{3}{2}\log 2. \end{aligned}$$

5. Serie di Fourier
Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[0, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ per } x \in [0,1] \\ 2 - x \text{ per } x \in [1,2]. \end{cases}$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[0, 2]$. I coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{k}\right)$.
b. La funzione periodizzata è pari, perciò $b_k = 0$ per ogni k. Per calcolare gli a_k, poiché $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\cos(k\pi x)\,dx \\ &= 2\int_0^1 x\cos(k\pi x)\,dx \end{aligned}$$

per $k \geq 1$

$$\begin{aligned} &= 2\left\{\left[x\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)\,dx\right\} \\ &= 2\left(\frac{1}{k\pi}\right)^2 [\cos(k\pi x)]_0^1 = 2\frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

$$a_0 = 2\int_0^1 x\,dx = 1.$$

La serie di Fourier di f è

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\cos(k\pi) - 1) \cos(k\pi x) . \end{aligned}$$

Grafico di $f(x)$ insieme alla sua somma parziale di Fourier fino a $n = 5$: