Analisi Matematica 2. Appello di settembre 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)_______________________________________

1. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + 10y = 2x - 5x^2.$$

2. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

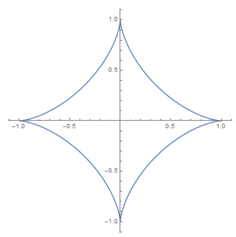
$$f(x, y) = e^{-2y}\left(2x^2 - 3xy + y^2\right).$$

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_{\Omega} |xy| \, dxdy$$

dove

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\right\}$$



Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione.

4. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ assegnata nel piano xz dall'equazione

$$\gamma : \begin{cases} x = Rt^{3/2} \\ z = R(1-t)^{3/2} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

dove $R > 0$ è una costante fissata. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e calcolato l'elemento d'area di Σ, calcolare l'area di Σ e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z, supponendola una superficie materiale omogenea di massa m.

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1, 1]$ da

$$f(x) = x|x|$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Analisi Matematica 2. Appello di settembre 2023
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + 10y = 2x - 5x^2.$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 10 = 0$$
$$\alpha = 1 \pm 3i$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^x \left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right).$$

Metodo di somiglianza, cerco

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= Ax^2 + Bx + C \\ \overline{y}'(x) &= 2Ax + B \\ \overline{y}''(x) &= 2A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2A - 2(2Ax + B) + 10\left(Ax^2 + Bx + C\right) &= 2x - 5x^2 \\ 10Ax^2 + x(-4A + 10B) + (2A - 2B + 10C) &= -5x^2 + 2x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 10A = -5 \\ -4A + 10B = 2 \\ 2A - 2B + 10C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ 2 + 10B = 2 \\ -1 - 2B + 10C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0 \\ C = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Quindi

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{10}$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = e^x \left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{10}.$$

2. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = e^{-2y}\left(2x^2 - 3xy + y^2\right).$$

$$\begin{cases} f_x = e^{-2y}(4x - 3y) = 0 \\ f_y = e^{-2y}(-4x^2 + 6xy - 2y^2 - 3x + 2y) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà $x = \frac{3}{4}y$ che sostituita nella seconda dà:

$$-\frac{9}{4}y^2 + \frac{18}{4}y^2 - 2y^2 - \frac{9}{4}y + 2y = 0; \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y = 0;$$
$$y(y-1) = 0, y = 0 \text{ o } y = 1.$$

Ora, poiché $x = \frac{3}{4}y$ si ha: $y = 0 \Rightarrow x = 0$ e $y = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$. I punti stazionari sono:

$$(0,0), \left(\frac{3}{4}, 1\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 4e^{-2y} & e^{-2y}(-8x + 6y - 3) \\ e^{-2y}(-8x + 6y - 3) & e^{-2y}(8x^2 - 12xy + 4y^2 + 6x - 4y + 6x - 4y + 2) \end{bmatrix}$$
$$= e^{-2y}\begin{bmatrix} 4 & -8x + 6y - 3 \\ -8x + 6y - 3 & 2(4x^2 - 6xy + 2y^2 + 6x - 4y + 1) \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$
$$(0,0) \text{ è punto di sella.}$$

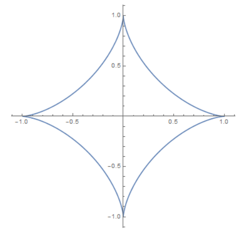
$$Hf\left(\frac{3}{4}, 1\right) = e^{-2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$
$$\left(\frac{3}{4}, 1\right) \text{ punto di minimo relativo.}$$

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_{\Omega} |xy| \, dxdy$$

dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1 \right\}$$



Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione.

Per le simmetrie si ha:

$$\int\int_{\Omega} |xy| \, dxdy = 4 \int\int_{\Omega^+} xydxdy$$

dove

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

$$4 \int\int_{\Omega^+} xydxdy = 4 \int_0^1 x \left(\int_0^{\left(1-x^{2/3}\right)^{3/2}} ydy \right) dx = 4 \int_0^1 \frac{x}{2} \left(1 - x^{2/3}\right)^3 dx$$

$$x^{2/3} = t; x = t^{3/2}; dx = \frac{3}{2} t^{1/2} dt$$

$$= 2 \int_0^1 t^{3/2} (1 - t)^3 \frac{3}{2} t^{1/2} dt = 3 \int_0^1 t^2 (1 - t)^3 dt$$

$$= 3 \int_0^1 \left(t^2 - 3t^3 + 3t^4 - t^5\right) dt = 3 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3}{4} t^4 + \frac{3}{5} t^5 - \frac{1}{6} t^6 \right]_0^1$$

$$= 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{20}.$$

4. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ assegnata nel piano xz dall'equazione

$$\gamma : \begin{cases} x = Rt^{3/2} \\ z = R(1-t)^{3/2} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

dove $R > 0$ è una costante fissata. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e calcolato l'elemento d'area di Σ, calcolare l'area di Σ e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z, supponendola una superficie materiale omogenea di massa m.

La superficie Σ è generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = Rt^{3/2} \\ z = b(t) = R(1-t)^{3/2} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

perciò ha equazioni parametriche

$$\Sigma : \begin{cases} x = Rt^{3/2}\cos\theta \\ y = Rt^{3/2}\sin\theta & t \in [0,1], \theta \in [0,2\pi] \\ z = R(1-t)^{3/2} \end{cases}$$

e elemento d'area

$$dS = a(t)\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}dtd\theta.$$

Poiché

$$a'(t) = \frac{3}{2}Rt^{1/2}; b'(t) = -\frac{3}{2}R(1-t)^{1/2},$$

$$dS = Rt^{3/2} \cdot \frac{3}{2}R\sqrt{t+1-t}dtd\theta = \frac{3}{2}R^2t^{3/2}dtd\theta$$

L'area è:

$$|\Sigma| = \int\int_\Sigma dS = 2\pi\int_0^1 \frac{3}{2}R^2t^{3/2}dt = 3\pi R^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}\pi R^2.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse z è:

$$I = \frac{m}{|\Sigma|}\int\int_\Sigma \left(x^2+y^2\right)dS = \frac{5m}{6\pi R^2} \cdot 2\pi\int_0^1 \left(R^2t^3\right)\frac{3}{2}R^2t^{3/2}dt$$
$$= \frac{5}{2}mR^2\int_0^1 t^{3+\frac{3}{2}}dt = \frac{5}{2}mR^2 \cdot \frac{1}{4+\frac{3}{2}} = \frac{5}{11}mR^2.$$

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1,1]$ da

$$f(x) = x|x|$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La funzione è continua ma non soddisfa la condizione di raccordo, inoltre è regolare a tratti. Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $(-1,1)$ mentre nei punti ±1 converge a $\left(f(-1^+) + f(1^-)\right)/2 = 0$, e i suoi coefficienti di Fourier tendono a zero senza soddisfare stime quantitative.

$b.$ La funzione è dispari, perciò $a_k = 0$ per ogni k. Poiché $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(k\omega x)\,dx = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\sin(k\omega x)\,dx = 2\int_0^1 x^2\sin(k\pi x)\,dx \\
&= 2\left\{\left[-\frac{1}{k\pi}x^2\cos(k\pi x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{k\pi}2x\cos(k\pi x)\,dx\right\} \\
&= -\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4}{k\pi}\int_0^1 x\cos(k\pi x)\,dx \\
&= -\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4}{k\pi}\left\{\left[x\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}dx\right\} \\
&= -\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{4}{(k\pi)^2}\left[-\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 \\
&= -\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4}{(k\pi)^3}\left(\cos(k\pi) - 1\right)
\end{aligned}
$$

La serie di Fourier di f è

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[-\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4}{(k\pi)^3}\left(\cos(k\pi) - 1\right)\right]\sin(k\pi x)\right\}.
\end{aligned}
$$