Analisi Matematica 2. Appello di agosto 2024
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y' = e^{-x} \cos(3x).$$

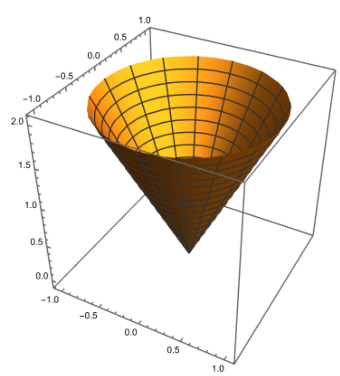
2. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2 + 4y^2 - 8\right)(x + 2y).$$

3. Flusso di un campo vettoriale
Si consideri la superficie Σ (superficie laterale di un cono) delimitata dal grafico di

$$z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \text{ per } x^2+y^2 \le R^2,$$

dove R, h sono costanti positive fissate.



Si calcoli il flusso attraverso Σ del campo vettoriale

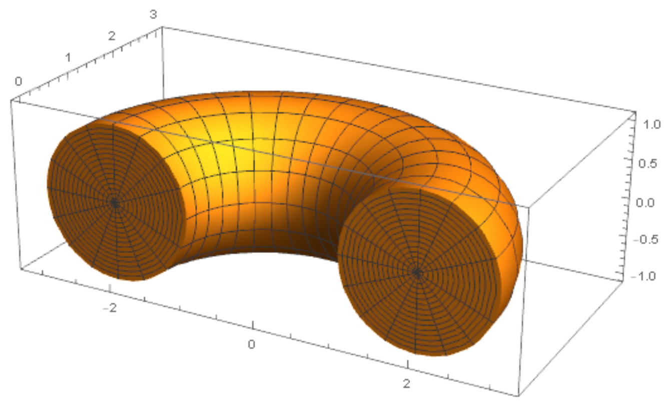
$$\underline{F} = (xz, yz, |x|\, z),$$

orientando la normale in modo che *si allontani* dall'asse z.

4. Integrali tripli.
Si consideri il solido materiale Ω omogeneo (contenuto dentro la metà di una superficie toroidale), descritto analiticamente da:

$$\begin{cases} x = (R + \rho\cos\phi)\cos\theta \\ y = (R + \rho\cos\phi)\sin\theta \quad \text{per } \rho \in [0, r]\,, \phi \in [0, 2\pi]\,, \theta \in [0, \pi] \\ z = \rho\sin\phi \end{cases}$$

dove $R > r > 0$ sono costanti fissate. Calcolare il volume e il centroide di Ω, prestando attenzione alle simmetrie.



Suggerimento: Ω è contenuto nel semispazio $y \geq 0$.

5. Campi vettoriali
Si consideri il campo vettoriale piano:

$$\underline{F}(x, y) = \left(\arctan(xy) + \frac{2xy}{1+x^2} + \frac{xy}{1+x^2y^2}, \frac{x^2}{1+x^2y^2} + \frac{y}{1+y^2} + \log\left(1+x^2\right)\right).$$

a. Stabilire se $\underline{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$.
b. Stabilire se $\underline{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$, calcolando in caso affermativo un potenziale.

Analisi Matematica 2. Appello di agosto 2024
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del second'ordine

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y' = e^{-x}\cos(3x).$$

$$\alpha^2 + 4\alpha = 0; \alpha = 0, \alpha = -4$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 + c_2 e^{-4x}.$$

Metodo di somiglianza, poiché

$$e^{-x}\cos(3x) = \operatorname{Re}\left(e^{x(-1+3i)}\right),$$

cerco prima una soluzione particolare dell'equazione

$$w'' + 4w' = e^{x(-1+3i)},$$

e poi porrò $\overline{y}(x) = \operatorname{Re}(w(x))$. Cerco

$$\begin{aligned} w(x) &= Ae^{x(-1+3i)} \\ w'(x) &= A(-1+3i)e^{x(-1+3i)} \\ w''(x) &= A(-1+3i)^2 e^{x(-1+3i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Ae^{x(-1+3i)}\left\{(-1+3i)^2 + 4(-1+3i)\right\} = e^{x(-1+3i)} \\ &A\{-8-6i-4+12i\} = 1 \\ &A = \frac{1}{-12+6i} = \frac{1}{6}\frac{1}{(-2+i)} = \frac{1}{6}\frac{(-2-i)}{5} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{30}(-2-i)e^{-x}(\cos(3x) + i\sin(3x)) \\ \overline{y}(x) &= \operatorname{Re}(w(x)) = \frac{1}{30}e^{-x}(-2\cos(3x) + \sin(3x)) \end{aligned}$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{30} e^{-x} \left(-2\cos(3x) + \sin(3x)\right).$$

2. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2 + 4y^2 - 8\right)(x + 2y).$$

$$\begin{cases} f_x = 2x(x+2y) + (x^2+4y^2-8) = 0 \\ f_y = 8y(x+2y) + 2(x^2+4y^2-8) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x(x+2y) = -(x^2+4y^2-8) \\ 4y(x+2y) = -(x^2+4y^2-8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x(x+2y) = 4y(x+2y) \\ 2x(x+2y) + (x^2+4y^2-8) = 0 \end{cases}$$

L' equazione $2x(x+2y) = 4y(x+2y)$ dà

$$(x-2y)(x+2y) = 0; \quad x = 2y \text{ oppure } x = -2y.$$

Se $x = 2y$ la seconda equazione dà:

$$4y \cdot 4y + 4y^2 + 4y^2 - 8 = 0; \quad 24y^2 = 8; y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

che dà i punti $\pm\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Se $x = -2y$ la seconda equazione dà:

$$4y^2 + 4y^2 - 8 = 0$$
$$y^2 = 1, y = \pm 1$$

che dà i punti $\pm(-2,1)$. I punti stazionari sono:

$$\pm(-2,1), \pm\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+4y & 4x+8y \\ 4x+8y & 8x+48y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3x+2y & 2x+4y \\ 2x+4y & 4x+24y \end{bmatrix}.$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf(-2,1) = 2\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \text{ indefinita, } (-2,1) \text{ è punto di sella.}$$

$$Hf(2,-1) = 2\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -16 \end{bmatrix} \text{ indefinita, } (2,-1) \text{ è punto di sella.}$$

$$Hf\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\begin{bmatrix}\frac{8}{\sqrt{3}} & \frac{8}{\sqrt{3}}\\ \frac{8}{\sqrt{3}} & \frac{32}{\sqrt{3}}\end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ punto di minimo relativo.}$$

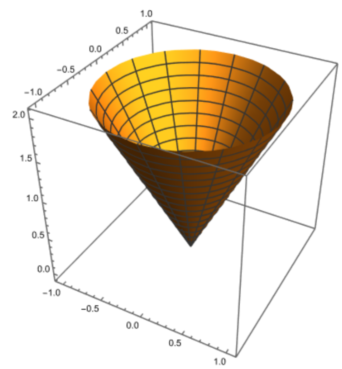
$$Hf\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\begin{bmatrix}-\frac{8}{\sqrt{3}} & -\frac{8}{\sqrt{3}}\\ -\frac{8}{\sqrt{3}} & -\frac{32}{\sqrt{3}}\end{bmatrix} \text{ definita negativa,}$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ punto di massimo relativo.}$$

3. Flusso di un campo vettoriale
Si consideri la superficie Σ (superficie laterale di un cono) delimitata dal grafico di

$$z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \text{ per } x^2+y^2\leq R^2,$$

dove R,h sono costanti positive fissate.



Si calcoli il flusso attraverso Σ del campo vettoriale

$$\underline{F}=(xz,yz,|x|\,z),$$

orientando la normale in modo che *si allontani* dall'asse z.

Sulla superficie Σ, detta $f(x,y)=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ si ha:

$$\underline{n}dS=(f_x,f_y,-1)\,dxdy$$

(Geometricamente si vede che la normale che si allontana dall'asse z ha la componente z negativa). Quindi:

$$\underline{n}dS=\left(\frac{h}{R}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{h}{R}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)dxdy.$$

Inoltre,

$$\underline{F}_{/\Sigma}=\left(x\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2},y\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2},|x|\,\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

perciò

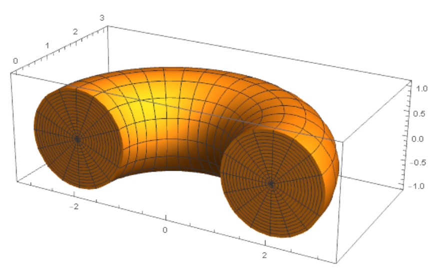
$$
\begin{aligned}
\Phi\left(\underline{F},\Sigma\right) &= \int\int_{\Sigma} \underline{F}\cdot \underline{n} dS \\
&= \int\int_{x^2+y^2\leq R^2} \left(x\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}, y\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}, |x|\,\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\frac{h}{R}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{h}{R}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dxdy \\
&= \int\int_{x^2+y^2\leq R^2} \left[\left(\frac{h}{R}\right)^2\left(x^2+y^2\right) - \frac{h}{R}\,|x|\,\sqrt{x^2+y^2}\right] dxdy \text{ (in coordinate polari)} \\
&= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{h}{R}\right)^2\rho^2 - \frac{h}{R}\rho^2\,|\cos\theta|\right) d\theta\right)\rho d\rho = \left(\int_0^R \rho^3 d\rho\right)\left(4\int_0^{\pi/2}\left(\left(\frac{h}{R}\right)^2 - \frac{h}{R}\cos\theta\right)d\theta\right) \\
&= \frac{R^4}{4}4\left[\left(\frac{h}{R}\right)^2\frac{\pi}{2} - \frac{h}{R}\right] = R^3 h\left(\frac{h}{R}\frac{\pi}{2} - 1\right).
\end{aligned}
$$

4. Integrali tripli

Si consideri il solido materiale Ω omogeneo (contenuto dentro la metà di una superficie toroidale), descritto analiticamente da:

$$
\begin{cases} x = (R+\rho\cos\phi)\cos\theta \\ y = (R+\rho\cos\phi)\sin\theta \quad \text{per } \rho\in[0,r], \phi\in[0,2\pi], \theta\in[0,\pi] \\ z = \rho\sin\phi \end{cases}
$$

dove $R > r > 0$ sono costanti fissate. Calcolare il volume il centroide di Ω, prestando attenzione alle simmetrie.



Il volume del toro intero è noto essere $\pi r^2\cdot 2\pi R$, quindi

$$
|\Omega| = \pi r^2\cdot\pi R = \pi^2 r^2 R.
$$

Oppure lo si calcola come integrale. Introduciamo le coordinate toroidali mediante le quali è data la definizione di Ω:

$$
\begin{cases} x = (R+\rho\cos\phi)\cos\theta \\ y = (R+\rho\cos\phi)\sin\theta \\ z = \rho\sin\phi \end{cases}
$$

La matrice jacobiana è:

$$
J = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & \sin\phi \\ -\rho\sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi \\ -\left(R+\rho\cos\phi\right)\sin\theta & \left(R+\rho\cos\phi\right)\cos\theta & 0 \end{bmatrix}
$$

e il modulo del determinante è $(R+\rho\cos\phi)\,\rho$, quindi il cambio di variabili nell'integrale dà

$$dxdydz = (R+\rho\cos\phi)\,\rho d\rho d\phi d\theta.$$

Perciò

$$\begin{aligned}|\Omega| &= \int\int\int_\Omega dxdydz = \int_0^r \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} (R+\rho\cos\phi)\,d\phi\right) d\theta\right) \rho d\rho \\ &= \int_0^r \left(\int_0^\pi 2\pi R d\theta\right) \rho d\rho = \int_0^r 2\pi^2 R\rho d\rho = 2\pi^2 R\cdot\frac{r^2}{2} = \pi^2 r^2 R.\end{aligned}$$

Detto $C=(x_C,y_C,z_C)$ il centroide, per simmetria, sarà $x_C=z_C=0$, mentre

$$\begin{aligned}y_C &= \frac{1}{|\Omega|}\int\int\int_\Omega ydxdydz = \frac{1}{\pi^2r^2R}\int_0^r \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} (R+\rho\cos\phi)^2\,d\phi\right)\sin\theta d\theta\right)\rho d\rho \\ &= \frac{1}{\pi^2r^2R}\left(\int_0^\pi \sin\theta d\theta\right)\cdot\int_0^r \left(\int_0^{2\pi}\left(R^2+2R\rho\cos\phi+\rho^2\cos^2\phi\right)d\phi\right)\rho d\rho \\ &= \frac{1}{\pi^2r^2R}\left(\int_0^\pi \sin\theta d\theta\right)\cdot\int_0^r \left(2\pi R^2+0+\pi\rho^2\right)\rho d\rho = \frac{2}{\pi r^2 R}\int_0^r \left(2R^2\rho+\rho^3\right)d\rho \\ &= \frac{2}{\pi r^2R}\left[R^2\rho^2+\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r = \frac{2}{\pi r^2 R}\left(R^2r^2+\frac{r^4}{4}\right) = \frac{2}{\pi R}\left(R^2+\frac{r^2}{4}\right).\end{aligned}$$

5. Campi vettoriali

Si consideri il campo vettoriale piano:

$$\underline{F}(x,y) = \left(\arctan(xy)+\frac{2xy}{1+x^2}+\frac{xy}{1+x^2y^2},\frac{x^2}{1+x^2y^2}+\frac{y}{1+y^2}+\log\left(1+x^2\right)\right).$$

a. Stabilire se $\underline{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$.
b. Stabilire se $\underline{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$, calcolando in caso affermativo un potenziale.

a. La condizione di irrotazionalità per un campo piano è $\partial_x(F_2)=\partial_y(F_1)$. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\partial_x(F_2) &= \partial_x\left(\frac{x^2}{1+x^2y^2}+\frac{y}{1+y^2}+\log\left(1+x^2\right)\right) \\ &= \frac{2x\left(1+x^2y^2\right)-2x^3y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}+\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x}{\left(1+x^2y^2\right)^2}+\frac{2x}{1+x^2}. \\ \partial_y(F_1) &= \partial_y\left(\arctan(xy)+\frac{2xy}{1+x^2}+\frac{xy}{1+x^2y^2}\right) \\ &= \frac{x}{1+x^2y^2}+\frac{2x}{1+x^2}+x\frac{1+x^2y^2-2x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2} \\ &= \frac{2x}{1+x^2}+x\frac{\left(1+x^2y^2\right)+\left(1-x^2y^2\right)}{\left(1+x^2y^2\right)^2} = \frac{2x}{1+x^2}+\frac{2x}{\left(1+x^2y^2\right)^2} = \partial_x(F_2),\end{aligned}$$

perciò $\underline{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$.

b. Poiché $\underline{F}$ è irrotazionale in tutto $\mathbb{R}^2$ (semplicemente connesso), è anche conservativo in $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo un potenziale. Cerchiamo $U(x,y)$ tale che

$$\partial_x(U) = F_1; \partial_y(U) = F_2.$$

$$U(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx = \int \left(\arctan(xy) + \frac{2xy}{1+x^2} + \frac{xy}{1+x^2y^2}\right) dx.$$

$$\int \frac{2xy}{1+x^2}dx = y\log\left(1+x^2\right) + c_1(y).$$

$$\int \underbrace{\arctan(xy)}_{f} \cdot \underset{g'}{1}dx = x\arctan(xy) - \int \frac{xy}{1+x^2y^2}dx + c_2(y)$$

quindi

$$U(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx = \int \left(\arctan(xy) + \frac{2xy}{1+x^2} + \frac{xy}{1+x^2y^2}\right) dx$$

$$U(x,y) = \int \left(\arctan(xy) + \frac{2xy}{1+x^2} + \frac{xy}{1+x^2y^2}\right) dx = x\arctan(xy) + y\log\left(1+x^2\right) + c(y).$$

$$\begin{aligned}\partial_y(U(x,y)) &= \partial_y\left(x\arctan(xy) + y\log\left(1+x^2\right) + c(y)\right)\\ &= \frac{x^2}{1+x^2y^2} + \log\left(1+x^2\right) + c'(y)\\ &= F_2 = \frac{x^2}{1+x^2y^2} + \frac{y}{1+y^2} + \log\left(1+x^2\right)\end{aligned}$$

se e solo se

$$c'(y) = \frac{y}{1+y^2}.$$

$$c(y) = \int \frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\log\left(1+y^2\right) + c$$

perciò un potenziale è:

$$U(x,y) = x\arctan(xy) + y\log\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\log\left(1+y^2\right).$$