

Analisi Matematica 2. Appello di luglio 2026

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello) _____
codice persona (o n° di matricola) _____
n° d'ordine (v. elenco) _____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 18 \frac{\sqrt[3]{x}}{y^2} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

2. Curve e integrali di linea. Sia γ l'arco di curva materiale in $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$\underline{r}(t) = (Rt \cos t, Rt \sin t, R\sqrt{3}t) \text{ per } t \in [0, 2\pi]$$

e densità lineare

$$\rho = \frac{\mu}{R}t,$$

dove $R, \mu > 0$ sono costanti aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente. Dopo aver calcolato l'elemento d'arco ds , calcolare il momento d'inerzia di γ rispetto all'asse z .

Si richiede di riportare con cura impostazione e passaggi e semplificare il risultato ottenuto.

3. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = (x + 2) \left(\frac{y^3}{3} - y \right) + x^2 + 4x.$$

4. Integrali doppi. Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} + \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \right) dx dy$$

dove Ω è la corona circolare di centro l'origine e raggi R e $2R$ (con R costante positiva). Si raccomanda di curare l'impostazione, sfruttare le simmetrie e riscrivere il risultato finale nella forma il più possibile semplificata.

5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[-2, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{se } x \in [-2, -1] \\ 1 & \text{se } x \in (-1, 1) \\ 2-x & \text{se } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f , in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f , tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier. Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata*.

Analisi Matematica 2. Appello di luglio 2026

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Svolgimento

Es.	Punti
1	7
2	6
3	7
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 18 \frac{\sqrt[3]{x}}{y^2} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

Equazione a variabili separabili. Il secondo membro è $a(x)b(y)$ con $a(x)$ continua in $\mathbb{R}$ e $b(y) \in C^1(-\infty, 0)$. Poiché $y_0 = -1 < 0$, la soluzione esiste ed è unica in un intorno del punto $x_0 = 0$. Risolviamo:

$$\begin{aligned} \int y^2 dy &= \int 18 \sqrt[3]{x} dx \\ \frac{y^3}{3} &= 18 \cdot \frac{3}{4} x^{4/3} + c \\ y^3 &= \frac{81}{2} x^{4/3} + c \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = -1$:

$$-1 = c$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$y^3 = \frac{81}{2} x^{4/3} - 1,$$

ossia:

$$y(x) = \left(\frac{81}{2} x^{4/3} - 1 \right)^{1/3},$$

funzione che è definita per ogni x ma è derivabile solo se

$$\begin{aligned} \left(\frac{81}{2} x^{4/3} - 1 \right) &\neq 0 \\ x^{4/3} &\neq \frac{2}{81}, x \neq \pm \left(\frac{2}{81} \right)^{3/4} = \pm \frac{2^{3/4}}{27} \end{aligned}$$

perciò l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione è

$$\left(-\frac{2^{3/4}}{27}, \frac{2^{3/4}}{27} \right).$$

2. Curve e integrali di linea. Sia γ l'arco di curva materiale in $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$\underline{r}(t) = \left(Rt \cos t, Rt \sin t, R\sqrt{3}t \right) \text{ per } t \in [0, 2\pi]$$

e densità lineare

$$\rho = \frac{\mu}{R}t,$$

dove $R, \mu > 0$ sono costanti aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente. Dopo aver calcolato l'elemento d'arco ds , calcolare il momento d'inerzia di γ rispetto all'asse z .

Si richiede di riportare con cura impostazione e passaggi e semplificare il risultato ottenuto.

$$\begin{aligned}\underline{r}'(t) &= R \left(\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, \sqrt{3} \right) \\ |\underline{r}'(t)|^2 &= R^2 (1 + t^2 + 3) \\ ds &= R\sqrt{4 + t^2} dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= \int_{\gamma} (x^2 + y^2) \rho ds = \int_0^{2\pi} R^2 t^2 \cdot \frac{\mu}{R} t \cdot R\sqrt{4 + t^2} dt \\ &= R^2 \mu \int_0^{2\pi} t^3 \sqrt{4 + t^2} dt \\ \sqrt{4 + t^2} &= u; 4 + t^2 = u^2; t dt = u du; u \in [2, 2\sqrt{1 + \pi^2}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= R^2 \mu \int_2^{2\sqrt{1+\pi^2}} (u^2 - 4) \cdot u \cdot u du \\ &= R^2 \mu \int_2^{2\sqrt{1+\pi^2}} (u^4 - 4u^2) du \\ &= R^2 \mu \left[\frac{u^5}{5} - \frac{4}{3} u^3 \right]_2^{2\sqrt{1+\pi^2}} \\ &= R^2 \mu \left[\frac{32(1 + \pi^2)^{5/2}}{5} - \frac{32}{3} (1 + \pi^2)^{3/2} - \frac{32}{5} + \frac{32}{3} \right] \\ &= 32R^2 \mu \left[\frac{(1 + \pi^2)^{5/2}}{5} - \frac{1}{3} (1 + \pi^2)^{3/2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right] \\ &= 32R^2 \mu \left[(1 + \pi^2)^{3/2} \left(\frac{\pi^2}{5} - \frac{2}{15} \right) + \frac{2}{15} \right].\end{aligned}$$

3. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = (x + 2) \left(\frac{y^3}{3} - y \right) + x^2 + 4x.$$

$$\begin{cases} f_x = \left(\frac{y^3}{3} - y\right) + 2x + 4 = 0 \\ f_y = (x + 2)(y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione dà

$$x = -2 \text{ oppure } y = \pm 1.$$

Se $x = -2$ la prima equazione dà

$$\begin{aligned} \frac{y^3}{3} - y &= 0 \\ y \left(\frac{y^2}{3} - 1 \right) &= 0, \text{ quindi } y = 0 \text{ o } y = \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Se $y = 1$ la prima equazione dà

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} + 2x + 4 &= 0 \\ -\frac{1}{3} + x + 2 &= 0, x = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Se $y = -1$ la prima equazione dà

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + 2x + 4 &= 0 \\ \frac{1}{3} + x + 2 &= 0, x = -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Quindi si trovano i punti stazionari:

$$(-2, 0), \left(-2, \pm\sqrt{3}\right), \left(-\frac{5}{3}, 1\right), \left(-\frac{7}{3}, -1\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{cases} f_x = \left(\frac{y^3}{3} - y\right) + 2x + 4 \\ f_y = (x + 2)(y^2 - 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2 \\ f_{xy} &= y^2 - 1 \\ f_{yy} &= 2y(x + 2) \end{aligned}$$

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & y^2 - 1 \\ y^2 - 1 & 2y(x + 2) \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$(-2, 0), \left(-2, \pm\sqrt{3}\right), \left(-\frac{5}{3}, 1\right), \left(-\frac{7}{3}, -1\right).$$

$$Hf(-2, 0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella}$$

$$Hf(-2, \pm\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punti di sella}$$

$$Hf\left(-\frac{5}{3}, 1\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ definita positiva, punto di minimo}$$

$$Hf\left(-\frac{7}{3}, -1\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ definita positiva, punto di minimo}$$

4. Integrali doppi. Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} + \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \right) dx dy$$

dove Ω è la corona circolare di centro l'origine e raggi R e $2R$ (con R costante positiva). Si raccomanda di curare l'impostazione, sfruttare le simmetrie e riscrivere il risultato finale nella forma il più possibile semplificata.

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} + \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \right) dx dy = I_1 + I_2$$

con $I_2 = 0$ per simmetria e

$$I_1 = 4 \int \int_{\Omega^+} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) dx dy$$

dove Ω^+ è la parte di Ω contenuta nel primo quadrante. In coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 \int_R^{2R} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2} d\theta \right) \rho d\rho \\ &= 4 \left(\int_R^{2R} \rho^2 d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right) \\ &= 4 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_R^{2R} \cdot \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} \\ &= 4 \cdot \frac{7}{3} R^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{28}{9} R^3. \end{aligned}$$

5. Serie di Fourier. Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[-2, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{se } x \in [-2, -1] \\ 1 & \text{se } x \in (-1, 1) \\ 2-x & \text{se } x \in [1, 2] \end{cases}$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f , in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire

circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f , tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier. Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata*.

a. La periodizzata della funzione è continua in $\mathbb{R}$ (ma ha punti angolosi) ed è regolare a tratti. Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[-2, 2]$ e i coefficienti di Fourier saranno $o(1/k)$.

b. La funzione è pari, perciò $b_k = 0$ per ogni k . Per calcolare gli a_k , scriviamo, essendo $T = 4, \omega = 2\pi/T = \pi/2$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx = \int_0^2 f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx \\ &= \int_0^1 \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx + \int_1^2 (2-x) \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Se $k = 0$,

$$a_0 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Per $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^1 \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx + \int_1^2 (2-x) \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx \\ &= \left[\frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \right]_0^1 + 2 \left[\frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \right]_1^2 \\ &\quad - \left\{ \left[x \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx \right\} \\ &= \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{4}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \\ &\quad + \left[-\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \right]_1^2 \\ &= \frac{4}{k^2\pi^2} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos(k\pi) \right]. \end{aligned}$$

La serie di Fourier di f è

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos(k\pi)}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right).$$