Analisi Matematica 2. Appello di settembre 2025
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del second'ordine. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y = 5e^{-x}\cos(3x).$$

Per la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa è richiesto il metodo dell'esponenziale complesso.

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili.
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^4y^2 + 2y^3\sin^2 y}{|x|^3 + y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

3. Funzione implicita
Dimostrare che l'equazione

$$f(x,y) = x\sin(\pi y) + 4y\cos(\pi x) + 2e^{-x} = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$. Calcolare quindi $g'(0)$, semplificando l'espressione ottenuta.

4. Integrali doppi
Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_{\Omega} xydxdy,$$

dove Ω è la regione piana descritta analiticamente da:

$$\Omega = \left\{(x, y) : x^2 + (y+1)^2 \leq 5, 0 \leq x \leq y\right\}.$$

Prestare cura nell'impostazione del problema, anzitutto disegnando l'insieme Ω e riscrivendolo in forma di dominio x o y-semplice, e riscrivendo il risultato ottenuto nella forma il più possibile semplificata.

5. Campi vettoriali, potenziale
Si consideri il campo vettoriale:

$$\underline{F}(x, y, z) = \left(-\sin y, 2\cos(yz) - yz\sin(yz) - x\cos y, -y^2\sin(yz) + \frac{yz\cos(yz) - \sin(yz)}{z^2} + \frac{1}{z^2}\right).$$

a. Si verifichi se il campo è irrotazionale o meno nel suo dominio di definizione Ω.
b. Si stabilisca se il campo è conservativo o meno nel dominio Ω, calcolando in caso affermativo un potenziale di $\underline{F}$.

Analisi Matematica 2. Appello di settembre 2025
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

1. Equazioni differenziali del second'ordine. Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y = 5e^{-x}\cos(3x).$$

Per la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa è richiesto il metodo dell'esponenziale complesso.

Equazione omogenea: è un'equazione dell'oscillatore armonico con $\omega^2 = 4$, integrale generale:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x).$$

Soluzione particolare dell'equazione completa: poiché

$$5e^{-x}\cos(3x) = \operatorname{Re}\left(5e^{x(-1+3i)}\right)$$

cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione

$$w'' + 4w = 5e^{x(-1+3i)}$$

e poi prenderemo $y(x) = \operatorname{Re} w(x)$. Per il metodo di somiglianza, poniamo

$$\begin{aligned}
w(x) &= Ae^{x(-1+3i)} \\
w'(x) &= A(-1+3i)\,e^{x(-1+3i)} \\
w''(x) &= A(-1+3i)^2\,e^{x(-1+3i)} = A(-8-6i)\,e^{x(-1+3i)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ae^{x(-1+3i)}\{(-8-6i)+4\} &= 5e^{x(-1+3i)} \\
A = \frac{5}{-4-6i} &= \frac{5(-4+6i)}{16+36} = \frac{5}{26}(-2+3i) \\
w(x) &= \frac{5}{26}(-2+3i)\,e^{-x}(\cos(3x) + i\sin(3x)) \\
y(x) = \operatorname{Re} w(x) &= \frac{5}{26}e^{-x}(-2\cos 3x - 3\sin 3x)
\end{aligned}$$

perciò l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - \frac{5}{26}e^{-x}(2\cos(3x) + 3\sin(3x)).$$

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili.
Si consideri la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^4y^2+2y^3\sin^2 y}{|x|^3+y^4} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$|f(x,y)|\leq\frac{3x^4y^2+2|y|^3\sin^2 y}{|x|^3+y^4}$$

poiché $|\sin y|\leq|y|$ e per $|x|\leq 1$ è $|x|^3\geq x^4$ si ha:

$$\leq\frac{3x^4y^2+2|y|^5}{x^4+y^4}=\frac{3x^4y^2}{x^4+y^4}+\frac{2|y|^5}{x^4+y^4}\equiv f_1(x,y)+f_2(x,y).$$

Poiché f_1,f_2 sono funzioni continue fuori dall'origine e positivamente omogenee di grado $2,1$, rispettivamente, entrambe tendono a 0 per $(x,y)\to(0,0)$. Per il criterio del confronto, $f(x,y)\to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$, perciò f è continua in $(0,0)$.
b.

$$f(x,0)=0,\ \text{quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0.$$
$$f(0,y)=\frac{2y^3\sin^2 y}{y^4}=\frac{2\sin^2 y}{y}\sim 2y,\ \text{quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=2.$$

Perciò f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0)=(0,2)$.
c. Verifichiamo se f è differenziabile in $(0,0)$. Essendo $f(0,0)=0$ e $\nabla f(0,0)=(0,2)$ questo è equivalente al fatto che

$$\frac{f(x,y)-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0).$$

$$\frac{f(x,y)-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{3x^4y^2+2y^3\sin^2 y-2y\left(|x|^3+y^4\right)}{\left(|x|^3+y^4\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\frac{3x^4y^2+2y^3\left(\sin^2 y-y^2\right)-2y|x|^3}{\left(|x|^3+y^4\right)\sqrt{x^2+y^2}}\equiv g(x,y).$$

Notiamo che

$$g(x,x)=\frac{3x^6+2x^3\left(\sin^2 x-x^2\right)-2x|x|^3}{\left(|x|^3+x^4\right)|x|\sqrt{2}}\sim\frac{-2x|x|^3}{x^4\sqrt{2}}$$
$$=-\sqrt{2}\frac{x}{|x|}\to\mp\sqrt{2}\text{ per } x\to 0\pm.$$

Poiché g non tende a zero, f non è differenziabile in $(0,0)$.

3. Funzione implicita
Dimostrare che l'equazione

$$f(x,y) = x\sin(\pi y) + 4y\cos(\pi x) + 2e^{-x} = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$. Calcolare quindi $g'(0)$, semplificando l'espressione ottenuta.

La funzione f è $C^1(\mathbb{R}^2)$.

$$f(0,y) = 4y + 2 = 0 \text{ per } y = -\frac{1}{2}.$$

Quindi $y_0 = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\pi\cos(\pi y) + 4\cos(\pi x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,-\frac{1}{2}\right) = 4 \neq 0.$$

Poiché $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f\left(0,-\frac{1}{2}\right) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,-\frac{1}{2}\right) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$, C^1, in un intorno di $x_0 = 0$. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(\pi y) - 4\pi y\sin(\pi x) - 2e^{-x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,-\frac{1}{2}\right) = -3$$
$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}.$$

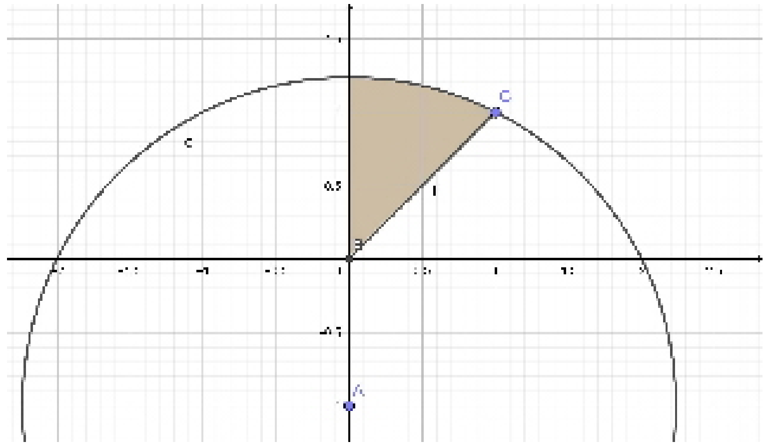
4. Integrali doppi
Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_{\Omega} xy\,dx\,dy,$$

dove Ω è la regione piana descritta analiticamente da:

$$\Omega = \left\{(x,y) : x^2 + (y+1)^2 \leq 5, 0 \leq x \leq y\right\}.$$

Prestare cura nell'impostazione del problema, anzitutto disegnando l'insieme Ω e riscrivendolo in forma di dominio x o y-semplice, e riscrivendo il risultato ottenuto nella forma il più possibile semplificata.



La retta $y = x$ interseca la circonferenza $x^2 + (y+1)^2 = 5$ (di centro $(0, -1)$ e raggio 5) per:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 4 &= 0 \\ x^2 + x - 2 &= (x-1)(x+2) = 0 \\ x &= 1, x = -2. \end{aligned}$$

Il punto che ci interessa è $(1, 1)$. In forma di dominio y-semplice, si ha:

$$\Omega = \left\{ (x, y) : x \leq y \leq -1 + \sqrt{5 - x^2} \text{ per } x \in [0, 1] \right\}.$$

Dunque si ha:

$$\begin{aligned} \int\int_{\Omega} xy dx dy &= \int_0^1 \left(x \int_x^{-1+\sqrt{5-x^2}} y dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_x^{-1+\sqrt{5-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 x \left(\frac{1 + 5 - x^2 - 2\sqrt{5 - x^2} - x^2}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 x \left(3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2} \right) dx = \int_0^1 \left(3x - x^3 - x\sqrt{5 - x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{2} x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3} \left(5 - x^2 \right)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{8}{3} - \frac{5^{3/2}}{3} \\ &= \frac{47}{12} - \frac{5\sqrt{5}}{3} = \frac{47 - 20\sqrt{5}}{12}. \end{aligned}$$

5. Campi vettoriali, potenziale

Si consideri il campo vettoriale:

$$\underline{F}(x, y, z) = \left(-\sin y, 2\cos(yz) - yz\sin(yz) - x\cos y, -y^2\sin(yz) + \frac{yz\cos(yz) - \sin(yz)}{z^2} + \frac{1}{z^2} \right).$$

a. Si verifichi se il campo è irrotazionale o meno nel suo dominio di definizione Ω.
b. Si stabilisca se il campo è conservativo o meno nel dominio Ω, calcolando in caso affermativo un potenziale di $\underline{F}$.

$$
\begin{aligned}
&\partial_y (F_1) = -\cos y = \partial_x (F_2) \\
&\partial_z (F_1) = 0 = \partial_x (F_3) \\
&\partial_z (F_2) = -2y \sin (yz) - y \sin (yz) - y^2 z \cos (yz) \\
&\partial_y (F_3) = -2y \sin (yz) - y^2 z \cos (yz) + \frac{1}{z^2} \left(z \cos (yz) - yz^2 \sin (yz) - z \cos (yz) \right) \\
&\qquad\quad = -2y \sin (yz) - y^2 z \cos (yz) - y \sin (yz) = \partial_z (F_2) \, .
\end{aligned}
$$

Il campo è irrotazionale nel suo dominio di definizione $z \neq 0$. Il dominio Ω non è connesso, quindi non è semplicemente connesso (il campo sarà conservativo, e quindi avrà un potenziale, nella regione $z > 0$ e lo stesso varrà nella regione $z < 0$; poiché le due regioni sono disgiunte, il potenziale può essere diverso nelle due regioni).

b. Cerchiamo $U(x, y, z)$ tale che $\nabla U = \underline{F}$.

$$
\begin{aligned}
&\partial_x (U) (x, y, z) = F_1 (x, y, z) \\
&U (x, y, z) = \int F_1 (x, y, z) \, dx = \int - \sin y dx = -x \sin y + f (y, z) \, .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_y U (x, y, z) &= -x \cos y + \partial_y f (y, z) = F_2 (x, y, z) = 2 \cos (yz) - yz \sin (yz) - x \cos y \\
\partial_y f (y, z) &= 2 \cos (yz) - yz \sin (yz) \\
f (y, z) &= \int [2 \cos (yz) - yz \sin (yz)] \, dy = \frac{2 \sin (yz)}{z} - z \int y \sin (yz) \, dy \\
&= \frac{2 \sin (yz)}{z} - z \left\{ -\frac{y \cos (yz)}{z} + \int \frac{\cos (yz)}{z} dy \right\} \\
&= \frac{2 \sin (yz)}{z} + y \cos (yz) - \int \cos (yz) \, dy \\
&= \frac{2 \sin (yz)}{z} + y \cos (yz) - \frac{\sin (yz)}{z} + g (z) \\
&= \frac{\sin (yz)}{z} + y \cos (yz) + g (z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U (x, y, z) &= -x \sin y + \frac{\sin (yz)}{z} + y \cos (yz) + g (z) \\
\partial_z (U (x, y, z)) &= \frac{yz \cos (yz) - \sin (yz)}{z^2} - y^2 \sin (yz) + g' (z) \\
&= F_3 (x, y, z) = -y^2 \sin (yz) + \frac{yz \cos (yz) - \sin (yz)}{z^2} + \frac{1}{z^2} \\
g' (z) &= \frac{1}{z^2} \\
g (z) &= -\frac{1}{z} + c
\end{aligned}
$$

e in definitiva

$$
U (x, y, z) = y \cos (yz) + \frac{\sin (yz)}{z} - x \sin y - \frac{1}{z} + c \quad \text{per } z \neq 0
$$

(dove la costante c può essere diversa per $z > 0$ e $z < 0$).