

Analisi Matematica 2. Appello di agosto 2026

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello) _____
codice persona (o n° di matricola) _____
n° d'ordine (v. elenco) _____

1. Equazioni differenziali del second'ordine. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' = 3x - 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{3}{4}, \end{cases}$$

dopo aver scritto l'integrale generale dell'equazione differenziale.

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili. Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin^3 x - y^2 \sin(y^3) \cos x}{x^2 + y^4} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Stabilire se f è continua in $(0, 0)$.
- Stabilire se f è derivabile in $(0, 0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0, 0)$.
- Stabilire se f è differenziabile nell'origine.

*Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.***3. Funzione implicita.** Dimostrare che l'equazione

$$f(x, y) = \sqrt[3]{1 + xy} + 2xe^{-y} + 3x \sin(2\pi y) = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h(y)$ in un intorno di $y_0 = 0$. Calcolare quindi $h'(0)$, semplificando l'espressione ottenuta.

4. Integrali doppi. Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_{\Omega} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$$

dove Ω è la regione piana racchiusa dall'arco di spirale espressa in forma polare da

$$\rho = R\theta, \theta \in [0, 2\pi],$$

R è una costante positiva. Si raccomanda di curare l'impostazione e riscrivere il risultato finale nella forma il più possibile semplificata.

5. Campi vettoriali. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F} = \left(\frac{y}{x^2 - y^2}, \frac{x}{y^2 - x^2} \right)$$

e la curva piana γ :

$$y = \sqrt{1 + x^2}, x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

- a. Dopo aver determinato il più grande aperto connesso Ω che contiene γ e in cui il campo $\underline{F}$ è C^1 (si consiglia di fare una figura), stabilire se il campo è irrotazionale o meno in Ω .
- b. Stabilire se il campo è conservativo o meno in Ω , determinando in caso affermativo un potenziale.
- c. Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo la curva γ , riscrivendo il risultato ottenuto nella forma il più possibile semplificata.

Analisi Matematica 2. Appello di agosto 2026

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Svolgimento

Es.	Punti
1	7
2	7
3	6
4	6
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del second'ordine. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' = 3x - 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{3}{4}, \end{cases}$$

dopo aver scritto l'integrale generale dell'equazione differenziale.

Equazione omogenea.

$$\alpha^2 + 2\alpha = 0; \alpha = 0, \alpha = -2.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 + c_2 e^{-2x}.$$

Soluzione particolare dell'equazione completa. In base al metodo di somiglianza, poiché il termine noto è un polinomio di 1° grado e a primo membro manca il termine in y , cerchiamo

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= ax^2 + bx \\ \bar{y}'(x) &= 2ax + b \\ \bar{y}''(x) &= 2a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a + 2(2ax + b) &= 3x - 1 \\ \begin{cases} 4a = 3 \\ 2a + 2b = -1 \end{cases} &\quad \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ 2b = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}; b = -\frac{5}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa è allora

$$\bar{y}(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + c_1 + c_2 e^{-2x}.$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Poiché

$$y'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} - 2c_2e^{-2x},$$
$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ \frac{3}{4} = -\frac{5}{4} - 2c_2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = 3 \end{cases}$$

e la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 3 - e^{-2x}.$$

2. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili. Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin^3 x - y^2 \sin(y^3) \cos x}{x^2 + y^4} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a. Stabilire se f è continua in $(0, 0)$.
- b. Stabilire se f è derivabile in $(0, 0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0, 0)$.
- c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$|f(x, y)| = \frac{|x \sin^3 x - y^2 \sin(y^3) \cos x|}{x^2 + y^4} \leq \frac{|x \sin^3 x|}{x^2 + y^4} + \frac{y^2 |\sin(y^3)|}{x^2 + y^4}$$
$$\leq \frac{x^4}{x^2} + \frac{|y|^5}{y^4} = x^2 + |y| \rightarrow 0 \text{ per } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Per il criterio del confronto, $f(x, y) \rightarrow 0$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, perciò f è continua in $(0, 0)$.

b.

$$f(x, 0) = \frac{x \sin^3 x}{x^2} \sim x^2, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$
$$f(0, y) = \frac{-y^2 \sin(y^3)}{y^4} \sim -y, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1.$$

Perciò f è derivabile in $(0, 0)$, con $\nabla f(0, 0) = (0, -1)$.

c. Verifichiamo se f è differenziabile in $(0, 0)$. Essendo $f(0, 0) = 0$ e $\nabla f(0, 0) = (0, -1)$ questo è equivalente al fatto che

$$\frac{f(x, y) + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0 \text{ per } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$
$$\frac{f(x, y) + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x \sin^3 x - y^2 \sin(y^3) \cos x + x^2 y + y^5}{(x^2 + y^4) \sqrt{x^2 + y^2}} \equiv g(x, y).$$

Ora,

$$g(x, x) = \frac{x \sin^3 x - x^2 \sin(x^3) \cos x + x^3 + x^5}{(x^2 + x^4) \sqrt{2x^2}} \sim \frac{x^3}{x^2 \sqrt{2} |x|} = \frac{x}{|x| \sqrt{2}} \rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ per } x \rightarrow 0^\pm.$$

Perciò $g(x, y)$ non tende a zero per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, quindi f non è differenziabile in $(0, 0)$.

3. Funzione implicita. Dimostrare che l'equazione

$$f(x, y) = \sqrt[3]{1 + xy} + 2xe^{-y} + 3x \sin(2\pi y) = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h(y)$ in un intorno di $y_0 = 0$. Calcolare quindi $h'(0)$, semplificando l'espressione ottenuta.

$$f(x, 0) = 1 + 2x = 0 \text{ per } x = -\frac{1}{2}.$$

Quindi $x_0 = -\frac{1}{2}$. Il punto $(-\frac{1}{2}, 0)$ è interno all'aperto $\Omega = \{1 + xy \neq 0\}$ in cui f è C^1 . Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y}{3(1 + xy)^{2/3}} + 2e^{-y} + 3 \sin(2\pi y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}, 0\right) &= 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Poiché $f \in C^1(\Omega)$, $f(-\frac{1}{2}, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(-\frac{1}{2}, 0) \neq 0$, l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h(y)$, C^1 , in un intorno di $y_0 = 0$. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x}{3(1 + xy)^{2/3}} - 2xe^{-y} + 6\pi x \cos(2\pi y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}, 0\right) &= -\frac{1}{6} + 1 + 3\pi = \frac{5}{6} - 3\pi \\ h'(0) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(-\frac{1}{2}, 0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(-\frac{1}{2}, 0)} = -\frac{\frac{5}{6} - 3\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi - \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

4. Integrali doppi. Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_{\Omega} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$$

dove Ω è la regione piana racchiusa dall'arco di spirale espressa in forma polare da

$$\rho = R\theta, \theta \in [0, 2\pi]$$

dove R è una costante positiva. Si raccomanda di curare l'impostazione e riscrivere il risultato finale nella forma il più possibile semplificata.

$$\begin{aligned} I &= \int \int_{\Omega} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{R\theta} \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \left(\int_0^{R\theta} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{R^2 \theta^2}{2} d\theta = \frac{R^2}{4} \int_0^{2\pi} \theta^2 \sin 2\theta d\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \theta^2 \sin 2\theta d\theta &= \left[-\theta^2 \frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2\theta \frac{\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= -2\pi^2 + \int_0^{2\pi} \theta \cos 2\theta d\theta \\
&= -2\pi^2 + \left[\theta \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta \\
&= -2\pi^2. \\
I &= \frac{R^2}{4} \cdot (-2\pi^2) = -\pi^2 \frac{R^2}{2}.
\end{aligned}$$

5. Campi vettoriali. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F} = \left(\frac{y}{x^2 - y^2}, \frac{x}{y^2 - x^2} \right)$$

e la curva piana γ :

$$y = \sqrt{1 + x^2}, \quad x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

a. Dopo aver determinato il più grande aperto connesso Ω che contiene γ e in cui il campo $\underline{F}$ è C^1 (si consiglia di fare una figura), stabilire se il campo è irrotazionale o meno in Ω .

b. Stabilire se il campo è conservativo o meno in Ω , determinando in caso affermativo un potenziale.

c. Calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo la curva γ , riscrivendo il risultato ottenuto nella forma il più possibile semplificata.

a. Il campo $\underline{F}$ è ben definito e C^1 nel piano privato delle rette $y = \pm x$. Queste dividono il piano in 4 aperti connessi, di cui quello che contiene γ è

$$\Omega = \{(x, y) : y > |x|\}.$$

$$\underline{F} = \left(\frac{y}{x^2 - y^2}, \frac{x}{y^2 - x^2} \right)$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
(F_1)_y &= \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}; \\
(F_2)_x &= \frac{y^2 - x^2 + 2x^2}{(y^2 - x^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Il campo è irrotazionale in Ω .

b. Poiché Ω è anche semplicemente connesso, il campo è conservativo in Ω . Cerchiamo un potenziale $U(x, y)$ tale che

$$\begin{aligned}
U_x(x, y) &= F_1 = \frac{y}{x^2 - y^2} \\
U(x, y) &= \int \frac{y}{x^2 - y^2} dx = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - y} - \frac{1}{x + y} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \log \left| \frac{x - y}{x + y} \right| + c(y)
\end{aligned}$$

$$U_y(x,y) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x+y} \right) + c'(y) = \frac{x}{y^2 - x^2} + c'(y) = F_2 = \frac{x}{y^2 - x^2}$$

$$c'(y) = 0; \quad c(y) = c$$

Quindi un potenziale di $\underline{F}$ in Ω è:

$$U(x,y) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-y}{x+y} \right| = \frac{1}{2} \log \left(\frac{y-x}{x+y} \right).$$

c. La curva γ

$$y = \sqrt{1+x^2}, \quad x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

ha estremi

$$A = (-\sqrt{3}, 2), \quad B = (\sqrt{3}, 2).$$

Perciò il lavoro è

$$\begin{aligned} L &= U(B) - U(A) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right) \\ &= \log \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right) = \log \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2 \log (2-\sqrt{3}). \end{aligned}$$