# Rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier. Convergenza totale di serie di Fourier

Marco Bramanti

22 dicembre 2021

*Queste note contengono materiale quasi completamente contenuto sul libro di testo, ma qui presentato esattamente nel modo in cui è stato presentato a lezione.*

Sappiamo che più rapidamente tendono a zero i coefficienti di una serie trigonometrica, più regolare sarà la funzione. Ad esempio:

1.

$$\text{Se } \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right) \text{ converge, allora}$$
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \text{ converge totalmente,}$$

a una funzione $f(x)$ che è *continua* (e $2\pi$-periodica).

2.

$$\text{Se } \sum_{n=1}^{\infty} n\left(|a_n| + |b_n|\right) \text{ converge, allora}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)' \text{ converge totalmente,}$$

alla derivata $f'(x)$, in particolare $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Ci interessa ora il viceversa: è vero che più regolare è $f$ e più rapidamente tendono a zero i coefficienti? Questo fatto ha anche un interesse pratico: più rapidamente tendono a zero i coefficienti, meglio la funzione $f(x)$ sarà approssimata dalla somma parziale di Fourier $s_n(x)$ già per un piccolo valore di $n$, con un vantaggio computazionale.

Per indagare questa questione premettiamo la seguente:

**Proposizione 1** *Per una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ regolare a tratti e continua, vale il teorema fondamentale del calcolo integrale. Quindi per due funzioni di questo tipo vale la formula di integrazione per parti.*

**Dimostrazione.** Proviamolo nel caso di una funzione $f$ continua in $[a,b]$ che abbia un unico punto $c \in (a,b)$ di non derivabilità, in cui comunque esistono finiti i limiti destro e sinistro di $f'$. Ne segue che $f'$ è una funzione limitata e Riemann integrabile su $[a,b]$, perciò

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^c f'(x)\,dx + \int_c^b f'(x)\,dx.$$

Inoltre su ciascuno dei due intervalli $[a,c],[c,b]$ la funzione $f'$ è prolungabile con continuità fino agli estremi, per cui possiamo applicare separatamente il teorema fondamentale del calcolo integrale e scrivere che

$$\int_a^c f'(x)\,dx + \int_c^b f'(x)\,dx = \left[f\left(c^-\right) - f(a)\right] + \left[f(b) - f\left(c^+\right)\right] = f(b) - f(a)$$

perché $f$ è continua in $c$. Quindi

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

■

Dimostriamo ora la seguente:

**Teorema 2** *Sia $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ regolare a tratti e continua in $[0,T]$ e supponiamo che soddisfi la condizione di raccordo*

$$f(T) = f(0).$$

*Allora:*

*1.$f'$ è una funzione limitata, Riemann integrabile, e detti $a'_k, b'_k$ i suoi coefficienti di Fourier, e $a_k, b_k$ i coefficienti di Fourier di $f$, valgono le relazioni:*

$$a'_k = k\omega b_k$$
$$b'_k = -k\omega a_k.$$

*2. La serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(a_k^2 + b_k^2\right) \text{ converge.}$$

*3.*

$$a_k, b_k = o\left(\frac{1}{k}\right) \text{ per } k \to \infty.$$

*4. La serie di Fourier di $f$ converge totalmente.*

Notiamo che l'ipotesi "$f$ continua in $[0,T]$ e $f(T) = f(0)$" è equivalente a: "la periodizzata di $f$ è continua in tutto $\mathbb{R}$".

**Dimostrazione.** 1. Per definizione stessa di funzione regolare a tratti si ha che $f'$ è limitata in $[0,T]$ e continua salvo un numero finito di punti di discontinuità a salto, quindi è Riemann integrabile. Calcoliamo i suoi coefficienti di Fourier integrando per parti, come è lecito per la Proposizione precedente.

$$\begin{aligned}
a_k' &= \frac{1}{T}\int_0^T f'(x)\cos(k\omega x)\,dx \\
&= \frac{1}{T}\left\{[f(x)\cos(k\omega x)]_0^T + \int_0^T f(x)\,k\omega\sin(kx)\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{T}[f(T)-f(0)] + k\omega\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\sin(kx)\,dx\right) \\
&= k\omega b_k,
\end{aligned}$$

dove si è sfruttata la condizione di raccordo $f(T) = f(0)$.

Analogamente,

$$\begin{aligned}
b_k' &= \frac{1}{T}\int_0^T f'(x)\sin(k\omega x)\,dx \\
&= \frac{1}{T}\left\{[f(x)\sin(k\omega x)]_0^T - \int_0^T f(x)\,k\omega\cos(kx)\,dx\right\} \\
&= -k\omega\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cos(kx)\,dx\right) \\
&= -k\omega b_k.
\end{aligned}$$

(In questo caso non c'è stato bisogno di sfruttare la condizione di raccordo).

2. Abbiamo dimostrato che $f'$ è limitata e Riemann integrabile, quindi per il risultato sulla convergenza delle serie di Fourier in norma quadratica (uguaglianza di Parseval) si ha che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left((a_k')^2 + (b_k')^2\right) \text{ converge,}$$

e sostituendo a $a_k', b_k'$ le espressioni ottenute al punto precedente si ha che

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(a_k^2 + b_k^2\right) \text{ converge.}$$

3. Poiché il termine generale di una serie convergente tende a zero, dal punto precedente segue che

$$k^2\left(a_k^2 + b_k^2\right) \to 0,$$

quindi

$$k^2 a_k^2 \to 0 \text{ e } k^2 b_k^2 \to 0,$$

quindi anche

$$k\,|a_k| \to 0 \text{ e } k\,|b_k| \to 0,$$

cioè

$$a_k, b_k = o\left(\frac{1}{k}\right) \text{ per } k \to \infty.$$

4. Vogliamo mostrare che le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \text{ convergono,}$$

il che implica la convergenza totale della serie di Fourier di $f$. Scriviamo, per la somma parziale della prima di queste serie:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |a_k| &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(k\,|a_k|) \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k^2}\end{aligned}$$

dove si è applicata la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz per il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$; l'ultima quantità scritta è

$$\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2} = c < \infty$$

perché $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ è una serie numerica convergente, e $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2$ converge per il punto 2). Quindi abbiamo provato che:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq c < \infty \text{ per ogni } n,$$

e per $n \to \infty$ si ha la convergenza di $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Analogamente si procede per i $b_k$. ■

Un punto interessante della dimostrazione precedente è che la convergenza totale della serie di Fourier di $f$ è stata ottenuta basandosi sul risultato di convergenza in norma quadratica, ma non su quello di convergenza puntuale.

Iterando il ragionamento della dimostrazione precedente, si ottiene il seguente

**Teorema 3** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $T$-periodica e supponiamo che per un certo $s = 1, 2, 3...$ sia $f \in C^{s-1}(\mathbb{R})$ e la derivata $f^{(s-1)}$ sia regolare a tratti in $[0, T]$. Allora:*

$$a_k, b_k = o\left(\frac{1}{k^s}\right) \text{ per } s \to \infty.$$

Si noti che per $s = 1$ il teorema è contenuto in quello precedente che abbiamo dimostrato. L'enunciato per $s > 1$ si ottiene con un ragionamento iterativo.