Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\tan x) \cdot (\cot y) \\ y(0) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4\sqrt{2}y' + 8y = 5\cos\left(\sqrt{2}x\right).$$

3. Curve e integrali di linea
Si consideri l'arco di curva materiale piana omogenea γ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}(t) = \left(Rt^2, R\frac{\sqrt{5}}{3}t^3\right) \text{ per } t \in [-1, 1]$$

con R costante positiva. Calcolare l'elemento d'arco ds, la lunghezza di γ e la coordinata x_C del suo centroide, semplificando le espressioni trovate.

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} |x| \frac{xe^{-y}+ye^{x}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = e^{x-2y}\left(x^2 - 2x + 2 - y^2\right)$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \sqrt{y} x e^{-x^2} = 0 \\ y(0) = \frac{1}{25} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y' + 5y = xe^{-x}.$$

3. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin^4(2y) + e^{-x} x^3 y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^4+y^6}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

4. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = (x+2y-2)\left(x^2+y^2-4\right).$$

5. Funzione implicita

Dimostrare che l'equazione

$$f(x,y) = \log(1+xy) + e^{x-y} - 2\cos y = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h(y)$ in un intorno di $y_0 = 0$. Calcolare quindi $h'(0)$, semplificando l'espressione ottenuta.

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Tema n°3

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)_________________________________
codice persona (o n°di matricola)_________________________________
n°d'ordine (v. elenco)_____________________________________

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$2y'' + 3y' - 5y = 10e^{-x} \sin x$$

semplificando l'espressione ottenuta. Per la ricerca di una soluzione particolare della completa, si richiede di utilizzare il metodo dell'esponenziale complesso.

3. Curve e integrali di linea
Si consideri la curva piana γ di equazione in forma polare

$$\rho = R\theta^4 \text{ per } \theta \in [0, 3].$$

Calcolare poi il suo elemento d'arco, semplificando l'espressione ottenuta, stabilire se la curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari sulla curva, e calcolare la lunghezza di γ.

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3ye^{-y}+2\left(\sin^2 x\right)y^3}{\sqrt{x^4+y^6}} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.

c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y)=e^{-3x-2y}\left(9x^2+6x+2-y^2\right)$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Tema n°4

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine lineari
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y \cot x = \cos^2 x \\ y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases}$$

e determinare a priori l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 5y' = 4x - 2$$

e quindi risolvere il problema di Cauchy con condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{25} \end{cases}$$

3. Curve e integrali di linea
Sia γ un arco di curva materiale omogeneo, rappresentato dal grafico della funzione

$$y = \sin x \text{ per } x \in [0, \pi].$$

Calcolare l'elemento d'arco ds.

Lasciando indicata con L la lunghezza di γ (che NON si chiede di calcolare), calcolare le coordinate del centroide di γ. *Si suggerisce di fare un disegno e prestare attenzione alle simmetrie. Si richiede di riportare con cura impostazione e passaggi.*

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^4} \cdot e^{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)} \sin^3 x \cos y & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.

c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi vincolati

Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi xy}{3}\right)$$

soggetta al vincolo

$$x^4 + y^2 = 12.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\tan x) \cdot (\cot y) \\ y(0) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione a variabili separabili, il secondo membro ha senso per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, y \neq k\pi$. Soluzione costante dell'equazione è $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, che non risolve il problema. Risolviamo:

$$\int (\tan y)\, dy = \int (\tan x)\, dx$$
$$\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$
$$-\log|\cos y| = -\log|\cos x| + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = \frac{\pi}{3}$:

$$-\log \frac{1}{2} = -\log 1 + c$$
$$c = \log 2$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$-\log|\cos y| = -\log|\cos x| + \log 2.$$

Poiché x deve variare in un intorno di 0 e dev'essere $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ (dall'equazione), dovrà essere $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, in particolare $\cos x > 0$;

poiché y deve variare in un intorno di $\frac{\pi}{3}$ e dev'essere $y \neq k\pi$ (dall'equazione) ma anche $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (dall'espressione trovata $\log|\cos y|$), dovrà essere $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, in particolare $\cos y > 0$; perciò possiamo togliere entrambi i moduli:

$$-\log \cos y = -\log \cos x + \log 2$$
$$\log \cos y = \log\left(\frac{\cos x}{2}\right)$$
$$\cos y = \frac{\cos x}{2}$$

Per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ si ha $\frac{\cos x}{2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ perciò dovendo essere $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ si ha

$$y = \arccos\left(\frac{\cos x}{2}\right) \text{ per } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Questo è l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4\sqrt{2}y' + 8y = 5\cos\left(\sqrt{2}x\right).$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 - 4\sqrt{2}\alpha + 8 &= 0 \\ \left(\alpha - 2\sqrt{2}\right)^2 &= 0 \\ \alpha &= 2\sqrt{2} \text{ radice doppia} \end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{2\sqrt{2}x}\left(c_1 x + c_2\right).$$

Metodo di somiglianza, notando che il termine noto *non è* soluzione dell'omogenea, cerchiamo

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= A\cos\left(\sqrt{2}x\right) + B\sin\left(\sqrt{2}x\right) \\ \overline{y}'(x) &= -\sqrt{2}A\sin\left(\sqrt{2}x\right) + B\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}x\right) \\ \overline{y}''(x) &= -2A\cos\left(\sqrt{2}x\right) - 2B\sin\left(\sqrt{2}x\right) \end{aligned}$$

$$\left(-2A\cos\left(\sqrt{2}x\right) - 2B\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right) - 4\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}A\sin\left(\sqrt{2}x\right) + B\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}x\right)\right)$$
$$+8\left(A\cos\left(\sqrt{2}x\right) + B\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right) = 5\cos\left(\sqrt{2}x\right)$$

$$\begin{cases} -2A - 8B + 8A = 5 \\ -2B + 8A + 8B = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6A - 8B = 5 \\ 8A + 6B = 0 \end{cases} \begin{cases} B = -\frac{4}{3}A \\ 6A + \frac{32}{3}A = 5 \end{cases} \begin{cases} A = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} \\ B = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Soluzione particolare dell'equazione completa:

$$\overline{y}(x) = \frac{3}{10}\cos\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{2}{5}\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

Integrale generale dell'equazione completa:

$$y(x) = e^{2\sqrt{2}x}\left(c_1 x + c_2\right) + \frac{3}{10}\cos\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{2}{5}\sin\left(\sqrt{2}x\right).$$

3. Curve e integrali di linea

Si consideri l'arco di curva materiale piana omogenea γ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}\left(t\right)=\left(Rt^2,R\frac{\sqrt{5}}{3}t^3\right)\quad\text{per }t\in\left[-1,1\right]$$

con R costante positiva. Calcolare l'elemento d'arco ds, la lunghezza di γ e la coordinata x_C del suo centroide, semplificando le espressioni trovate.

$$\begin{aligned}\underline{r}'\left(t\right)&=R\left(2t,\sqrt{5}t^2\right)\\ \left|\underline{r}'\left(t\right)\right|&=R\sqrt{4t^2+5t^4}=R\left|t\right|\sqrt{4+5t^2}.\\ ds&=R\left|t\right|\sqrt{4+5t^2}dt.\end{aligned}$$

Lunghezza:

$$\begin{aligned}l\left(\gamma\right)&=\int_{-1}^{1}R\left|t\right|\sqrt{4+5t^2}dt=2R\int_0^1 t\sqrt{4+5t^2}dt\\ &=2R\left[\frac{1}{15}\left(4+5t^2\right)^{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{15}R\left(3^3-2^3\right)=\frac{38}{15}R.\end{aligned}$$

Centroide:

$$\begin{aligned}x_C&=\frac{1}{l\left(\gamma\right)}\int_\gamma xds=\frac{15}{38R}\int_{-1}^{1}Rt^2R\left|t\right|\sqrt{4+5t^2}dt\\ &=\frac{15}{38}R\cdot 2\int_0^1 t^3\sqrt{4+5t^2}dt\\ \sqrt{4+5t^2}&=u;t^2=\frac{u^2-4}{5};tdt=\frac{udu}{5};\\ &=\frac{15}{19}R\int_2^3\frac{u^2-4}{5}\cdot u\cdot\frac{udu}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{3}{19\cdot 5}R\int_2^3\left(u^2-4\right)u^2du\\ &=\frac{3}{19\cdot 5}R\left[\frac{u^5}{5}-\frac{4}{3}u^3\right]_2^3\\ &=\frac{3}{19\cdot 5}R\left[\frac{3^5}{5}-\frac{4}{3}3^3-\frac{2^5}{5}+\frac{4}{3}2^3\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{19 \cdot 5} R \left[9 \left(\frac{3^3}{5} - 4 \right) - 2^5 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \right] \\
&= \frac{3}{19 \cdot 5} R \left[9 \left(\frac{7}{5} \right) + 32 \frac{2}{15} \right] \\
&= \frac{3}{19 \cdot 5} R \left[\frac{189 + 64}{15} \right] = \frac{253}{475} R.
\end{aligned}
$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$
f(x, y) = \begin{cases} |x| \frac{x e^{-y} + y e^{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{per } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0,0) . \end{cases}
$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Scriviamo:

$$
f(x, y) = e^{-y} \frac{|x| \, x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + e^{x} \frac{|x| \, y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \equiv e^{-y} f_1(x, y) + e^{x} f_2(x, y) .
$$

Poiché f_1 e f_2 sono positivamente omogenee di grado 1 e continue fuori dall'origine,

$$
f_1(x, y) \to 0 \text{ e } f_2(x, y) \to 0 \text{ per } (x, y) \to (0,0)
$$

perciò

$$
f(x, y) \to 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0,
$$

e f è continua.
b.

$$
\begin{aligned}
&f(x, 0) = |x| \frac{x}{\sqrt{x^2}} = x \\
&\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(0, y) = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.
\end{aligned}
$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (1,0)$.
c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$
h(x, y) \equiv \frac{f(x, y) - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to 0 \text{ per } (x, y) \to (0,0) .
$$

Ma:

$$h(x,y)=\frac{|x|\frac{xe^{-y}+ye^{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|x|\left(xe^{-y}+ye^{x}\right)-x\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}.$$

In particolare,

$$\begin{aligned}h(x,x)&=\frac{x|x|\left(e^{-x}+e^{x}\right)-x\sqrt{2x^2}}{2x^2}\\&=\frac{|x|}{x}\frac{\left(e^{-x}+e^{x}\right)-\sqrt{2}}{2}\to\pm\frac{2-\sqrt{2}}{2}\text{ per }x\to 0^{\pm}.\end{aligned}$$

Poiché $h(x,x)$ non tende a zero, f non è differenziabile in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y)=e^{x-2y}\left(x^2-2x+2-y^2\right)$$

$$\begin{cases}f_x=e^{x-2y}\left(x^2-2x+2-y^2+2x-2\right)=e^{x-2y}\left(x^2-y^2\right)=0\\f_y=e^{x-2y}\left(-2x^2+4x-4+2y^2-2y\right)=0\end{cases}$$

La prima equazione dà $y=\pm x$. La seconda equazione per $y=x$ dà

$$4x-4-2x=0\Rightarrow x=2,\text{ quindi }y=2.$$

La seconda equazione per $y=-x$ dà

$$6x-4=0\Rightarrow x=\frac{2}{3},\text{ quindi }y=-\frac{2}{3}.$$

I punti stazionari sono:

$$(2,2),\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{aligned}Hf(x,y)&=e^{x-2y}\begin{bmatrix}x^2-y^2+2x&-2x^2+2y^2-2y\\-2x^2+2y^2-2y&-2\left(-2x^2+4x-4+2y^2-2y\right)+4y-2\end{bmatrix}\\&=e^{x-2y}\begin{bmatrix}x^2-y^2+2x&2\left(-x^2+y^2-y\right)\\2\left(-x^2+y^2-y\right)&2\left(2x^2-2y^2-4x+4y+3\right)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf(2,2)=e^{-2}\begin{bmatrix}4&-4\\-4&6\end{bmatrix}\text{ definita positiva,}$$

$$(2,2)\text{ è punto di minimo relativo.}$$

$$Hf\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=e^2\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & -\frac{14}{3}\end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right) \text{ punti di sella.}$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \sqrt{y} x e^{-x^2} = 0 \\ y(0) = \frac{1}{25} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione a variabili separabili. Soluzione costante dell'equazione è $y = 0$, che non risolve il problema. Risolviamo:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int x e^{-x^2} dx$$

$$2\sqrt{y} = \frac{e^{-x^2}}{2} + c$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{25}$:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2} + c$$

$$c = -\frac{1}{10}$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$2\sqrt{y} = \frac{e^{-x^2}}{2} - \frac{1}{10}$$

che impone

$$\frac{e^{-x^2}}{2} - \frac{1}{10} > 0$$

$$e^{-x^2} > \frac{1}{5}; e^{x^2} < 5; x^2 < \log 5$$

$$-\sqrt{\log 5} < x < \sqrt{\log 5}$$

che è effettivamente un intorno di 0. In quest'intervallo possiamo invertire la funzione, ottenendo la soluzione

$$y = \frac{1}{16}\left(e^{-x^2} - \frac{1}{5}\right)^2$$

nell'intervallo $\left(-\sqrt{\log 5}, \sqrt{\log 5}\right)$.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y' + 5y = xe^{-x}.$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 4\alpha + 5 &= 0 \\ \alpha &= -2 \pm i. \end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z\left(x\right) = e^{-2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right).$$

Soluzione particolare dell'equazione completa. Osservo che il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea. Perciò in base al metodo di somiglianza, cerco

$$\begin{aligned} \overline{y}\left(x\right) &= e^{-x}\left(Ax + B\right) \\ \overline{y}'\left(x\right) &= e^{-x}\left(-Ax - B + A\right) \\ \overline{y}''\left(x\right) &= e^{-x}\left(Ax + B - A - A\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-x}\left\{\left(Ax + B - 2A\right) + 4\left(-Ax - B + A\right) + 5\left(Ax + B\right)\right\} &= xe^{-x} \\ 2Ax + 2A + 2B &= x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa è allora

$$\overline{y}\left(x\right) = \frac{1}{2}e^{-x}\left(x - 1\right)$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y\left(x\right) = e^{-2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right) + \frac{1}{2}e^{-x}\left(x - 1\right).$$

3. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f\left(x, y\right) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin^4(2y) + e^{-x}x^3y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^4+y^6}} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0, 0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.

c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v}=(\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$
\begin{aligned}
|f(x,y)| &\leq \frac{x^2 \sin^4(2y)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^4+y^6}} + \frac{e^{-x}|x|^3 y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^4+y^6}} \\
&\leq \frac{x^2 2^3 y^4}{x^2 |y|^3} + \frac{e^{-x}|x|^3 y^2}{y^2 \cdot x^2} = 8|y| + e^{-x}|x| \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0),
\end{aligned}
$$

quindi per il teorema del confronto $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, e f è continua in $(0,0)$.

b.

$$
\begin{aligned}
f(x,0) = 0, &\text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\
f(0,y) = 0, &\text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.
\end{aligned}
$$

Perciò f è derivabile, con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

c. Sia

$$
\begin{aligned}
g(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) &= \frac{t^2\cos^2\theta \sin^4(2t\sin\theta) + e^{-t\cos\theta} t^3 \cos^3\theta t^2 \sin^2\theta}{t^2\sqrt{t^4\cos^4\theta + t^6\sin^6\theta}} \\
&= \frac{\cos^2\theta\sin^4(2t\sin\theta) + e^{-t\cos\theta} t^3\cos^3\theta\sin^2\theta}{t^2\sqrt{\cos^4\theta + t^2\sin^6\theta}} \\
&= \frac{\cos^2\theta\sin^4(2t\sin\theta)}{t^2\sqrt{\cos^4\theta + t^2\sin^6\theta}} + t\frac{e^{-t\cos\theta}\cos^3\theta\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^4\theta + t^2\sin^6\theta}}.
\end{aligned}
$$

Ora se $\cos\theta \neq 0$, per $t \to 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos^2\theta\sin^4(2t\sin\theta)}{t^2\sqrt{\cos^4\theta + t^2\sin^6\theta}} &\sim \frac{\cos^2\theta(2t\sin\theta)^4}{t^2\cos^2\theta} = t^2 16\sin^4\theta \\
t\frac{e^{-t\cos\theta}\cos^3\theta\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^4\theta + t^2\sin^6\theta}} &\sim t\cos\theta\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

quindi

$$
g(t) \sim t\cos\theta\sin^2\theta \text{ e } D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = \cos\theta\sin^2\theta.
$$

Se poi $\cos\theta = 0$ si ha $g(t) \equiv 0$, quindi $g'(0) = 0$, perciò in ogni caso è

$$
D_{\underline{v}} f(0,0) = \cos\theta\sin^2\theta.
$$

D'altro canto

$$
\nabla f(0,0) \cdot \underline{v} = (0,0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = 0 \text{ per ogni } \theta,
$$

perciò *non vale* la formula del gradiente. (In particolare, certamente f non è differenziabile in $(0,0)$).

4. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = (x+2y-2)\left(x^2+y^2-4\right).$$

$$\begin{cases} f_x = \left(x^2+y^2-4\right) + 2x(x+2y-2) = 0 \\ f_y = 2\left(x^2+y^2-4\right) + 2y(x+2y-2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x^2+y^2-4\right) = -2x(x+2y-2) \\ 2\left(x^2+y^2-4\right) = -2y(x+2y-2) \end{cases}$$

Dividendo membro a membro la seconda equazione per la prima, sotto le ipotesi

$$\left(x^2+y^2-4\right) \neq 0, x \neq 0, (x+2y-2) \neq 0,$$

si ottiene

$$2 = \frac{y}{x}, y = 2x$$

che sostituita nella prima equazione dà

$$\left(x^2+4x^2-4\right) + 2x(x+4x-2) = 0$$

$$15x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{15} = \frac{2 \pm 8}{15} = \begin{cases} \frac{2}{3}, \text{ che dà } y = \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{5}, \text{ che dà } y = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

quindi otteniamo per ora i due punti stazionari

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Discutiamo ora cosa accade quando si annulla uno dei tre fattori $\left(x^2+y^2-4\right), x, (x+2y-2)$.

Se $(x+2y-2) = 0$ le due equazioni danno $\left(x^2+y^2-4\right) = 0$, quindi otterremo punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x+2y-2 = 0 \\ x^2+y^2-4 = 0. \end{cases}$$

Se $(x+2y-2) \neq 0$ e $\left(x^2+y^2-4\right) = 0$, le due equazioni danno $x = y = 0$, che contraddice $\left(x^2+y^2-4\right) = 0$, e non otteniamo soluzioni.

Se $(x+2y-2) \neq 0, \left(x^2+y^2-4\right) \neq 0$ e $x = 0$ la prima equazione dà $\left(x^2+y^2-4\right) = 0$, contraddizione.

Risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2-2y \\ 4-8y+4y^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{gathered} 5y^2-8y=0 \text{ che dà } y=0 \text{ o } y=\frac{8}{5}. \\ \text{Se } y=0 \text{ si ha } x=2; \\ \text{se } y=\frac{8}{5} \text{ si ha } x=-\frac{6}{5}. \end{gathered}$$

Quindi abbiamo gli ulteriori due punti stazionari:

$$(2,0)\,, \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2+y^2-4+4xy-4x \\ f_y = 2\left(x^2+3y^2-4+xy-2y\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Hf\,(x,y) &= \begin{bmatrix} 6x+4y-4 & 2y+4x \\ 2y+4x & 2\,(6y+x-2) \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} 3x+2y-2 & y+2x \\ y+2x & 6y+x-2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = 2\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{20}{3} \end{bmatrix} = \frac{8}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ definita positiva, punto di minimo}$$

$$Hf\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 2\begin{bmatrix} -\frac{24}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{36}{5} \end{bmatrix} = \frac{8}{5}\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -9 \end{bmatrix} \text{ definita negativa, punto di massimo}$$

$$Hf\,(2,0) = 2\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella}$$

$$Hf\left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right) = 2\begin{bmatrix} -\frac{12}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{32}{5} \end{bmatrix} = \frac{8}{5}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella}$$

5. Funzione implicita

Dimostrare che l'equazione

$$f\,(x,y) = \log\,(1+xy) + e^{x-y} - 2\cos y = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h\,(y)$ in un intorno di $y_0 = 0$. Calcolare quindi $h'\,(0)$, semplificando l'espressione ottenuta.

La funzione è $C^1(A)$ con $A = \{(x,y) : xy > -1\}$.

$$f(x,0) = e^x - 2 = 0 \text{ per } x = \log 2.$$

Quindi $x_0 = \log 2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+xy} + e^{x-y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\log 2, 0) = 2.$$

Poiché $f \in C^1(A)$, $(\log 2, 0) \in A$, $f(\log 2, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(\log 2, 0) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h(y)$, C^1, in un intorno di $y_0 = 0$. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+xy} - e^{x-y} + 2\sin y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\log 2, 0) = \log 2 - 2$$
$$h'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\log 2, 0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\log 2, 0)} = -\frac{\log 2 - 2}{2} = 1 - \frac{\log 2}{2}.$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°3

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui in $(0, +\infty)$, la soluzione del problema sarà definita in $(0, +\infty)$.
$a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$A(x) = \int a(x)\, dx = 2\sqrt{x}$.
Integrale generale:

$$y(x) = e^{-2\sqrt{x}} \left\{ c + 2 \int e^{2\sqrt{x}} \sqrt{x} dx \right\}$$

$$\begin{aligned} \int e^{2\sqrt{x}} \sqrt{x} dx &= \left(\sqrt{x} = t; x = t^2; dx = 2tdt \right) \\ &= 2 \int e^{2t} t^2 dt = 2 \left\{ \frac{1}{2} e^{2t} t^2 - \int \frac{1}{2} e^{2t} 2t dt \right\} \\ &= e^{2t} t^2 - 2 \left\{ \frac{1}{2} e^{2t} t - \int \frac{1}{2} e^{2t} dt \right\} \\ &= e^{2t} t^2 - e^{2t} t + \frac{1}{2} e^{2t} = e^{2t} \left(t^2 - t + \frac{1}{2} \right) \\ &= e^{2\sqrt{x}} \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-2\sqrt{x}} \left\{ c + e^{2\sqrt{x}} \left(2x - 2\sqrt{x} + 1 \right) \right\} \\ &= c e^{-2\sqrt{x}} + \left(2x - 2\sqrt{x} + 1 \right) \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(1) = 2$ e abbiamo

$$\begin{aligned} 2 &= c e^{-2} + 1 \\ c &= e^2 \\ y(x) &= e^{2 - 2\sqrt{x}} + 2x - 2\sqrt{x} + 1 \text{ per } x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$2y'' + 3y' - 5y = 10e^{-x} \sin x$$

semplificando l'espressione ottenuta. Per la ricerca di una soluzione particolare della completa, si richiede di utilizzare il metodo dell'esponenziale complesso.

$$2\alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0$$
$$\alpha = 1, \alpha = -\frac{5}{2}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{5}{2}x}.$$

Metodo di somiglianza. Notiamo che il termine noto *non è* soluzione dell'omogenea. Poiché

$$10e^{-x} \sin x = \operatorname{Im}\left(10e^{x(-1+i)}\right),$$

cerchiamo prima una soluzione particolare dell'equazione

$$2w'' + 3w' - 5w = 10e^{x(-1+i)},$$

del tipo

$$\begin{aligned} \overline{w}(x) &= Ae^{x(-1+i)} \\ \overline{w}'(x) &= A(-1+i)\, e^{x(-1+i)} \\ \overline{w}''(x) &= A(-1+i)^2\, e^{x(-1+i)} \end{aligned}$$

$$Ae^{x(-1+i)} \left\{2(-1+i)^2 + 3(-1+i) - 5\right\} = 10e^{x(-1+i)}$$
$$A\{-4i - 3 + 3i - 5\} = 10$$
$$A\{-8 - i\} = 10$$
$$A = -\frac{10}{8+i} = -\frac{10(8-i)}{65} = \frac{2}{13}(-8+i)$$

$$\overline{w}(x) = \frac{2}{13}(-8+i)\, e^{-x} (\cos x + i \sin x)$$

Perciò una soluzione particolare dell'equazione completa di partenza è:

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) = \operatorname{Im} \overline{w}(x) &= \operatorname{Im}\left[\frac{2}{13}(-8+i)\, e^{-x} (\cos x + i \sin x)\right] \\ &= \frac{2}{13} e^{-x} (\cos x - 8 \sin x) \end{aligned}$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{2}{13} e^{-x} (\cos x - 8 \sin x).$$

3. Curve e integrali di linea

Si consideri la curva piana γ di equazione in forma polare

$$\rho = R\theta^4 \text{ per } \theta \in [0, 3].$$

Calcolare poi il suo elemento d'arco, semplificando l'espressione ottenuta, stabilire se la curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari sulla curva, e calcolare la lunghezza di γ.

Detto $f(\theta) = R\theta^4$ si ha $f'(\theta) = 4R\theta^3$,

$$ds = \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta = R\sqrt{\theta^8 + 16\theta^6} d\theta = R\theta^3 \sqrt{\theta^2 + 16} d\theta.$$

La curva è regolare ad eccezione del punto singolare per $\theta = 0$, che è l'origine.

Lunghezza:

$$\begin{aligned}
l(\gamma) &= \int_0^3 R\theta^3 \sqrt{\theta^2 + 16} d\theta \\
\sqrt{\theta^2 + 16} &= t; \theta^2 = t^2 - 16; \theta d\theta = t dt, t \in [4, 5] \\
&= R \int_4^5 \left(t^2 - 16\right) t^2 dt = R \int_4^5 \left(t^4 - 16t^2\right) dt \\
&= R \left[\frac{t^5}{5} - \frac{16}{3} t^3\right]_4^5 = R \left[\frac{5^5}{5} - \frac{16}{3} 5^3 - \frac{4^5}{5} + \frac{16}{3} 4^3\right] \\
&= R \left[5^3 \left(5 - \frac{16}{3}\right) - 4^5 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\right] \\
&= R \left[-\frac{1}{3} 5^3 + \frac{2}{15} 4^5\right] = R \left(\frac{2048}{15} - \frac{125}{3}\right) \\
&= R \left(\frac{2048 - 625}{15}\right) = \frac{1423}{15} R.
\end{aligned}$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y e^{-y} + 2\left(\sin^2 x\right) y^3}{\sqrt{x^4 + y^6}} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0, 0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0, 0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0, 0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &\leq \frac{\left|x^3y\right| e^{-y}}{\sqrt{x^4+y^6}} + \frac{2\left(\sin^2 x\right)|y|^3}{\sqrt{x^4+y^6}} \\ &\leq \frac{\left|x^3y\right| e^{-y}}{\sqrt{x^4}} + \frac{2\left(\sin^2 x\right)|y|^3}{\sqrt{y^6}} \\ &= |xy|\, e^{-y} + 2\left(\sin^2 x\right) \equiv g(x,y)\,.\end{aligned}$$

Poiché g è una funzione continua, che vale 0 in $(0,0)$, quindi tende a 0 per $(x,y) \to (0,0)$, per il teorema del confronto

$$|f(x,y)| \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)$$

Perciò f è continua in $(0,0)$.

b.

$$\begin{aligned}f(x,0) &= 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0. \\ f(0,y) &= 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.\end{aligned}$$

Perciò f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (0,0)$

c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$h(x,y) \equiv \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)\,.$$

Si ha:

$$h(x,y) = \frac{x^3ye^{-y} + 2\left(\sin^2 x\right)y^3}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^4+y^6}}$$

$$\begin{aligned}|h(x,y)| &\leq \frac{\left|x^3y\right| e^{-y}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^4+y^6}} + \frac{2\left(\sin^2 x\right)|y|^3}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^4+y^6}} \\ &\leq \frac{\left|x^3y\right| e^{-y}}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^4}} + \frac{2\left(\sin^2 x\right)|y|^3}{\sqrt{x^2}\sqrt{y^6}} \\ &= |y|\, e^{-y} + \frac{2\left(\sin^2 x\right)}{|x|} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)\end{aligned}$$

perché: $|y|\, e^{-y}$ è continua e nell'origine vale zero, mentre

$$\frac{2\left(\sin^2 x\right)}{|x|} \sim \frac{2x^2}{|x|} = 2|x| \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)\,.$$

Quindi per il teorema del confronto,

$$h(x,y) \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)$$

perciò f è differenziabile in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = e^{-3x-2y}\left(9x^2+6x+2-y^2\right)$$

$$\begin{cases} f_x = e^{-3x-2y}\left(-27x^2-18x-6+3y^2+18x+6\right) = 3e^{-3x-2y}\left(y^2-9x^2\right) = 0 \\ f_y = e^{-3x-2y}\left(-18x^2-12x-4+2y^2-2y\right) = -2e^{-3x-2y}\left(9x^2+6x+2-y^2+y\right) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà $y = \pm 3x$. La seconda equazione per $y = 3x$ dà

$$9x^2+6x+2-9x^2+3x = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{9}, \text{ quindi } y = -\frac{2}{3}.$$

La seconda equazione per $y = -3x$ dà

$$9x^2+6x+2-9x^2-3x = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}, \text{ quindi } y = 2.$$

I punti stazionari sono:

$$\left(-\frac{2}{9},-\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3},2\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$Hf(x,y) = e^{-3x-2y}\begin{bmatrix} 9\left(9x^2-y^2-6x\right) & 6\left(9x^2-y^2+y\right) \\ 6\left(9x^2-y^2+y\right) & 2\left(2\left(9x^2-y^2+6x+2y\right)+3\right) \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf\left(-\frac{2}{9},-\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & -14 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$\left(-\frac{2}{9},-\frac{2}{3}\right) \text{ è punto di sella.}$$

$$Hf\left(-\frac{2}{3},2\right) = e^{-2}\begin{bmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$

$$\left(-\frac{2}{3},2\right) \text{ è punto di minimo relativo.}$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°4

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

1. Equazioni differenziali del prim'ordine lineari
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y\cot x = \cos^2 x \\ y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases}$$

e determinare a priori l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui per $x \neq k\pi$, poiché la condizione iniziale è assegnata in $x = -\frac{\pi}{6}$ la soluzione del problema sarà definita in $(-\pi, 0)$.
$a(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
$A(x) = \int a(x)\,dx = \log|\sin x| = \log(-\sin x)$ in $(-\pi, 0)$.
Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\log(-\sin x)}\left\{c + \int e^{\log(-\sin x)}\cos^2 x dx\right\} \\ &= -\frac{1}{\sin x}\left\{c - \int \sin x\cos^2 x dx\right\} \\ &= -\frac{1}{\sin x}\left\{c + \frac{\cos^3 x}{3}\right\} \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0$ e abbiamo

$$0 = 2\left(c + \frac{\left(\sqrt{3}/2\right)^3}{3}\right)$$

$$c = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$y(x) = -\frac{1}{\sin x}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\cos^3 x}{3}\right\} \text{ per } x \in (-\pi, 0).$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 5y' = 4x - 2$$

e quindi risolvere il problema di Cauchy con condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{25} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + 5\alpha = 0$$

$$\alpha = 0, \alpha = -5.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 e^{-5x} + c_2.$$

Cerco una soluzione particolare dell'equazione completa col metodo di somiglianza. Poiché il primo membro non contiene il termine in y occorre cercare:

$$\overline{y}(x) = Ax^2 + Bx$$
$$\overline{y}'(x) = 2Ax + B$$
$$\overline{y}''(x) = 2A$$

$$2A + 5(2Ax + B) = 4x - 2$$

$$\begin{cases} 10A = 4 \\ 2A + 5B = -2 \end{cases} \quad A = \frac{2}{5}, B = -\frac{14}{25}.$$

$$\overline{y}(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{14}{25}x$$

Integrale generale della completa:

$$y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 + \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{14}{25}x\right).$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 + c_2 \\ \frac{1}{25} = y'(0) = -5c_1 - \frac{14}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{3}{25} \\ c_2 = \frac{3}{25} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{3}{25}\left(1 - e^{-5x}\right) + \frac{2}{5}x^2 - \frac{14}{25}x.$$

3. Curve e integrali di linea

Sia γ un arco di curva materiale omogeneo, rappresentato dal grafico della funzione

$$y = \sin x \text{ per } x \in [0, \pi].$$

Calcolare l'elemento d'arco ds.

Lasciando indicata con L la lunghezza di γ (che NON si chiede di calcolare), calcolare le coordinate del centroide di γ. *Si suggerisce di fare un disegno e prestare attenzione alle simmetrie. Si richiede di riportare con cura impostazione e passaggi.*

Posto $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, si ha:

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \sqrt{1 + \cos^2 x}dx$$

Per simmetria, si ha $x_C = \frac{\pi}{2}$ mentre

$$y_C = \frac{1}{L} \int_\gamma y ds.$$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma y ds &= \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \\
\cos x &= t; -\sin x dx = dt \\
&= -\int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt \\
t &= \operatorname{Sh} u; dt = \operatorname{Ch} u du \\
&= 2 \int_0^{\operatorname{SettSh} 1} (\operatorname{Ch} u)^2 du = [\operatorname{Sh} u \operatorname{Ch} u + u]_0^{\operatorname{SettSh} 1} \\
&= \sqrt{2} + \operatorname{SettSh} 1.
\end{aligned}$$

Quindi

$$y_C = \frac{\sqrt{2} + \operatorname{SettSh} 1}{L}.$$

(In effetti si ha $L = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \simeq 3.8202$, da cui $y_C \simeq \frac{2.2956}{3.8202} \simeq 0.6$).

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)} \sin^3 x \cos y}{x^2 + y^4} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0, 0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0, 0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0, 0)$.

c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0, 0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. La funzione $g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ è positivamente omogenea di grado 0 e continua fuori dall'origine, perciò limitata, quindi

$$|f(x,y)| \leq e^{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)} \frac{|x|^3}{x^2+y^4} \leq c\frac{|x|^3}{x^2} = c|x| \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0),$$

quindi f è continua in $(0,0)$.

b.

$$f(x,0) = \frac{e\sin^3 x}{x^2} \sim ex, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = e$$
$$f(0,y) = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Perciò f è derivabile, con $\nabla f(0,0) = (e,0)$.

c. Sia

$$g(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) = \frac{e^{\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)}\sin^3(t\cos\theta)\cos(t\sin\theta)}{t^2\cos^2\theta + t^4\sin^4\theta}.$$

Se $\cos\theta \neq 0$, per $t \to 0$ è

$$g(t) \sim \frac{e^{\cos 2\theta}t^3\cos^3\theta}{t^2\cos^2\theta} = te^{\cos 2\theta}\cos\theta, \text{ quindi}$$
$$D_{\underline{v}}f(0,0) = g'(0) = e^{\cos 2\theta}\cos\theta.$$

Se poi $\cos\theta = 0$ si ha $g(t) \equiv 0$ quindi $g'(0) = 0$. Perciò in ogni caso è:

$$D_{\underline{v}}f(0,0) = e^{\cos 2\theta}\cos\theta.$$

D'altro canto

$$\nabla f(0,0) \cdot \underline{v} = (e,0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = e\cos\theta \neq e^{\cos 2\theta}\cos\theta \text{ per } \cos 2\theta \neq 1,$$

perciò *non vale* la formula del gradiente. (In particolare, certamente f non è differenziabile in $(0,0)$).

5. Massimi e minimi vincolati

Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi xy}{3}\right)$$

soggetta al vincolo

$$x^4 + y^2 = 12.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Sia $g(x,y) = x^4 + y^2 - 12$, poiché g è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$\nabla g(x,y) = \left(4x^3, 2y\right) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

e $g(0,0) \neq 0$, il vincolo non ha punti critici. Definiamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = \sin\left(\frac{\pi xy}{3}\right) - \lambda\left(x^4 + y^2 - 12\right)$$

e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\pi y}{3}\cos\left(\frac{\pi xy}{3}\right) - 4\lambda x^3 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\pi x}{3}\cos\left(\frac{\pi xy}{3}\right) - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\left(x^4 + y^2 - 12\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi y}{3}\cos\left(\frac{\pi xy}{3}\right) = 4\lambda x^3 \\ \frac{\pi x}{3}\cos\left(\frac{\pi xy}{3}\right) = 2\lambda y \\ x^4 + y^2 = 12 \end{cases}$$

Dividendo membro a membro la 1^a equazione per la 2^a (supponendo, per il momento, che sia: $x \neq 0, \cos\left(\frac{\pi xy}{3}\right) \neq 0, y \neq 0$) si ha

$$\frac{y}{x} = 2\frac{x^3}{y}, y^2 = 2x^4$$

che nella terza equazione dà:

$$3x^4 = 12, x^4 = 4, x^2 = 2, x = \pm\sqrt{2} \text{ e quindi}$$
$$y^2 = 2x^4 = 8, y = \pm 2\sqrt{2}.$$

Abbiamo così i 4 punti stazionari della lagrangiana:

$$\pm\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right), \pm\left(\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right).$$

Esaminiamo ora il caso in cui non valgono le condizioni $x \neq 0, \cos\left(\frac{\pi xy}{3}\right) \neq 0, y \neq 0$.

Se $\cos\left(\frac{\pi xy}{3}\right) = 0$ le equazioni danno $x = y = 0$, che non rispetta il vincolo, quindi nessuna soluzione.

Se $\cos\left(\frac{\pi xy}{3}\right) \neq 0$ e $x = 0$ (o $y = 0$) otteniamo rispettivamente $y = 0$ (o $x = 0$) dunque di nuovo $(0,0)$ che non rispetta il vincolo. Quindi non ci sono altri punti stazionari liberi della lagrangiana.

Poiché il vincolo rappresenta un insieme chiuso e limitato del piano, per il teorema di Weierstrass massimo e minimo assoluto vincolato di f esistono certamente, basta perciò confrontare i valori di f in questi punti. Si ha:

$$f\left(\pm\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{3}\right) = \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$f\left(\pm\left(\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)\right) = \sin\left(-\frac{\pi\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{3}\right) = \sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

pertanto:

$$\pm\left(\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right) \text{ sono punti di massimo assoluto vincolato}$$
$$\pm\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) \text{ sono punti di minimo assoluti vincolati.}$$