Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{1-x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' - 12y = 7e^{-4x}.$$

3. Curve e integrali di linea
Sia γ l'arco di curva piano di equazione polare

$$\rho = 1 + |\sin\theta| \text{ per } \theta \in [0, 2\pi].$$

a. Scrivere le equazioni parametriche della curva, stabilire se l'arco di curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari della curva, calcolare l'elemento d'arco ds. [Decidete voi in quale ordine è meglio rispondere a queste domande]

b. Calcolare l'integrale di linea, semplificando l'espressione ottenuta:

$$\int_\gamma |x|\, ds.$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^{2/3} + x|x| - |y| \sin(2y)}{\sqrt[4]{x^4 + y^4}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0), \ f(0,0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = y(\log y + 1)\left(x^2 - 1\right).$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^3 (\log x)^2}{x} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$4y'' + 4y' + y = \frac{x^2}{2}.$$

3. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{2x^3 - x^2 y + 2xy^2 - y^3 + x^4 y - 3xy^3}{x^2+y^2} \text{ per } (x,y) \neq (0,0)\,, \ f(0,0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

4. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, limitandosi (data la periodicità) alla regione $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = x^2 + (2x + 1)\cos(2y).$$

5. Funzione implicita

Dimostrare che l'equazione

$$f(x, y) = x\sqrt{4 - y^2} + y\ \sqrt[3]{x + 1} = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = -2$. Calcolare quindi $g'(-2)$, semplificando l'espressione ottenuta.

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Tema n°3

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{2+x} = \frac{1}{x^3} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

dopo aver determinato (a priori) l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y' + 8y = 5 \sin 2x$$

semplificando l'espressione ottenuta.

3. Curve e integrali di linea
Si consideri l'arco di curva materiale omogenea γ di massa m ed equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos(\pi t) \\ y = \sin(\pi t) \\ z = \sqrt{\frac{2}{3}} \pi t^{3/2} \end{cases} \quad t \in [0, 2]$$

Calcolare il suo elemento d'arco, la sua lunghezza, e l'integrale di linea

$$\int_\gamma z^{\frac{2}{3}} \, ds.$$

Si richiede di *semplificare le espressioni trovate.*

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{y \sin\left(3x - y^2\right) + x^{7/3}\cos y}{\sqrt[4]{x^4 + y^2}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = y \log y \left(4x - x^2\right).$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Tema n°4

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine lineari
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{xy}{x+1} = e^{2x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

dopo aver determinato (a priori) l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$9y'' + 4y = 10e^{-x}\cos x.$$

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa, si richiede di usare il metodo dell'esponenziale complesso.

3. Curve e integrali di linea
Si consideri l'arco di curva materiale omogenea γ di massa m ed equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \quad t \in [-2\pi, 2\pi] \\ z = ht \end{cases}$$

con r, h costanti positive. Calcolare il suo elemento d'arco, la sua lunghezza, il suo momento d'inerzia rispetto all'asse x. [Attenzione: NON rispetto all'asse z]. Semplificare l'espressione trovata.

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{y^2 \operatorname{Sh} x - x^3 \operatorname{Ch} y \sin^2 x}{x^4 + y^2} \text{ per } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v}= (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi vincolati
Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^3 - y^3$$

soggetta al vincolo

$$2x^2 + y^2 = 1.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	7
2	6
3	7
4	7
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{1-x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione a variabili separabili, il secondo membro ha senso per $x \neq \pm 1$. Soluzione costante dell'equazione è $y = 0$, che non risolve il problema. Risolviamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^2} &= \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ -\frac{1}{y} &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c. \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = 2$:

$$-\frac{1}{2} = c.$$

e la soluzione del problema è definita da

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y} &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} &= \frac{1}{2} \left(1 - \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) \\ y &= \frac{2}{1 - \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|}. \end{aligned}$$

Poiché x deve variare in un intorno di 0 e dev'essere $x \neq \pm 1$ (dall'equazione), dovrà essere $x \in (-1, 1)$, in particolare $\left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \frac{1+x}{1-x}$ e la soluzione è:

$$y = \frac{2}{1 - \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)}.$$

Inoltre dev'essere

$$\begin{aligned}1-\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)&\neq 0\\ \frac{1+x}{1-x}&\neq e\\ x&\neq\frac{e-1}{e+1}\end{aligned}$$

e poiché $0<\frac{e-1}{e+1}<1$ l'intervallo massimale è:

$$x\in\left(-1,\frac{e-1}{e+1}\right)$$

Questo è l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y''+y'-12y=7e^{-4x}.$$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\alpha-12&=0\\ \alpha&=3;\alpha=-4\end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-4x}.$$

Metodo di somiglianza, notando che il termine noto *è soluzione dell'omogenea*, cerco

$$\begin{aligned}\overline{y}(x)&=Axe^{-4x}\\ \overline{y}'(x)&=Ae^{-4x}(-4x+1)\\ \overline{y}''(x)&=Ae^{-4x}(16x-8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Ae^{-4x}[(16x-8)+(-4x+1)-12x]&=7e^{-4x}\\ -7A&=7\\ A&=-1\end{aligned}$$

Quindi

$$\overline{y}(x)=-xe^{-4x}$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x)=c_1e^{3x}+(c_2-x)e^{-4x}.$$

3. Curve e integrali di linea

Sia γ l'arco di curva piano di equazione polare

$$\rho = 1 + |\sin\theta| \text{ per } \theta \in [0, 2\pi].$$

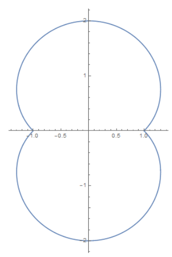
a. Scrivere le equazioni parametriche della curva, stabilire se l'arco di curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari della curva, calcolare l'elemento d'arco ds. [Decidete voi in quale ordine è meglio rispondere a queste domande]

b. Calcolare l'integrale di linea, semplificando l'espressione ottenuta:

$$\int_\gamma |x|\, ds.$$

a. Equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = (1 + |\sin\theta|)\cos\theta \\ y = (1 + |\sin\theta|)\sin\theta \end{cases} \text{ per } \theta \in [0, 2\pi].$$



La funzione ρ non è derivabile per $\sin\theta = 0$, cioè $\theta = k\pi$. Al di fuori di questi valori si ha:

$$\rho' = \cos\theta \cdot \operatorname{sgn}(\sin\theta)$$
$$ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = \sqrt{2 + 2|\sin\theta|} d\theta.$$

Poiché l'elemento di lunghezza $\sqrt{2 + 2|\sin\theta|}$ (dove esiste) non si annulla mai, l'arco di curva è regolare a tratti, i valori singolari del parametro sono $\theta = k\pi$ che danno i seguenti punti singolari della curva (come si vede sosituendo nelle equazioni parametriche):

$$(1, 0), (-1, 0).$$

b.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma |x|\, ds &= \int_0^{2\pi} (1+|\sin\theta|)\,|\cos\theta|\,\sqrt{2+2\,|\sin\theta|}d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\theta)\cos\theta\sqrt{2+2\sin\theta}d\theta \\
&= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\theta)^{3/2}\cos\theta d\theta \\
&= 4\sqrt{2}\left[\frac{2}{5}(1+\sin\theta)^{5/2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{5}\sqrt{2}\cdot\left(2^{5/2}-1\right) \\
&= \frac{8}{5}\left(8-\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{x^2y^{2/3} + x\,|x| - |y|\sin(2y)}{\sqrt[4]{x^4+y^4}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0)\,,\ f(0,0) = 0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Scriviamo:

$$f(x,y) = \frac{x^2y^{2/3}}{\sqrt[4]{x^4+y^4}} + \frac{x\,|x| - |y|\sin(2y)}{\sqrt[4]{x^4+y^4}} \equiv f_1(x,y) + f_2(x,y)\,.$$

Poiché f_1 è positivamente omogenea di grado $1+\frac{2}{3}$ e continua fuori dall'origine, perciò

$$f_1(x,y) \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)\,.$$

Inoltre

$$|f_2(x,y)| \leq \frac{x^2+2y^2}{\sqrt[4]{x^4+y^4}} \equiv f_3(x,y)$$

dove f_3 è positivamente omogenea di grado 1 e continua fuori dall'origine, perciò $f_3 \to 0$ e per il teorema del confronto

$$f_2(x,y) \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)\,,$$

perciò $f(x,y) \to 0$,e f è continua.
b.

$$f(x,0) = \frac{x\,|x|}{|x|} = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$f(0,y) = \frac{-|y|\sin(2y)}{|y|} = -\sin(2y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -2.$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (1,-2)$.

c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$g(x,y) \equiv \frac{f(x,y) - x + 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Ma:

$$g(x,y) = \frac{x^2 y^{2/3} + x|x| - |y|\sin(2y) + \sqrt[4]{x^4+y^4}\,(2y-x)}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt[4]{x^4+y^4}}.$$

In particolare,

$$\begin{aligned} g(x,x) &= \frac{x^{2+2/3} + x|x| - |x|\sin(2x) + \sqrt[4]{2}\,|x|\,x}{|x|\sqrt{2}\,|x|\,\sqrt[4]{2}} \\ &= \frac{x^{2+2/3}}{x^2 2^{3/4}} + \frac{x|x|\left(1 - \frac{\sin(2x)}{x} + \sqrt[4]{2}\right)}{x^2 2^{3/4}} \to 0 \pm \frac{\left(\sqrt[4]{2}-1\right)}{2^{3/4}} \text{ per } x \to 0^{\pm}. \end{aligned}$$

Poiché $g(x,x)$ non tende a zero, f *non è differenziabile* in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = y(\log y + 1)\left(x^2 - 1\right).$$

La funzione è definita per $y > 0$.

$$\begin{cases} f_x = 2xy(\log y + 1) = 0 \\ f_y = (\log y + 2)\left(x^2-1\right) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà $x = 0$ o $y = \frac{1}{e}$ ($y = 0$ non è accettabile).

La seconda equazione per $x = 0$ dà

$$\log y + 2 = 0, \text{ quindi } y = e^{-2};$$

per $y = \frac{1}{e}$ dà

$$x^2 - 1 = 0, \text{ quindi } x = \pm 1.$$

I punti stazionari sono:

$$\left(\pm 1, \frac{1}{e}\right), \left(0, \frac{1}{e^2}\right).$$

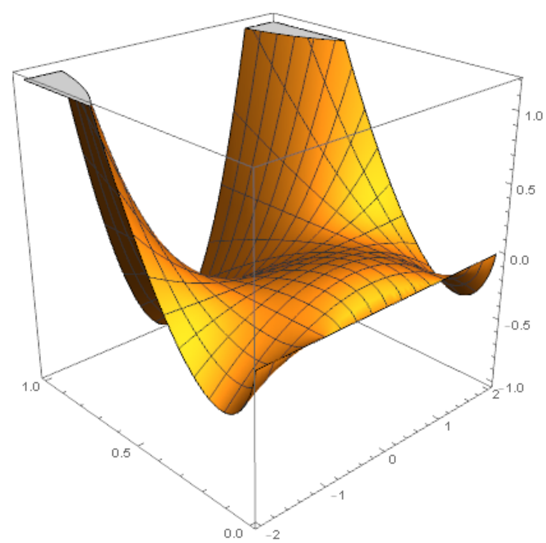
Calcoliamo la matrice hessiana.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2y(\log y + 1) & 2x(\log y + 2) \\ 2x(\log y + 2) & \frac{x^2-1}{y} \end{bmatrix}.$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf\left(\pm 1, \frac{1}{e}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$
$$\left(\pm 1, \frac{1}{e}\right) \text{ sono punti di sella.}$$

$$Hf\left(0, \frac{1}{e^2}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{e^2} & 0 \\ 0 & -e^2 \end{bmatrix} \text{ definita negativa,}$$
$$\left(0, \frac{1}{e^2}\right) \text{ punto di massimo relativo.}$$



Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	7
2	6
3	7
4	7
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^3(\log x)^2}{x} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione a variabili separabili. Soluzione costante dell'equazione è $y = 0$, che non risolve il problema. L'equazione impone $x > 0$. Risolviamo:

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int \frac{(\log x)^2}{x} dx$$
$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{(\log x)^3}{3} + c$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(1) = -1$:

$$-\frac{1}{2} = c$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{(\log x)^3}{3} - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{y^2} = 1 - \frac{2(\log x)^3}{3}$$
$$y^2 = \frac{1}{1 - \frac{2(\log x)^3}{3}}$$

che impone

$$1 - \frac{2(\log x)^3}{3} > 0$$
$$(\log x)^3 < \frac{3}{2}, \log x < \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$
$$0 < x < e^{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}}$$

che è effettivamente un intorno di 1. In quest'intervallo possiamo invertire la funzione, e ricordando che dev'essere $y(1) = -1$ otteniamo la soluzione

$$y = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2(\log x)^3}{3}}}$$

nell'intervallo $\left(0, e^{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}}\right)$.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$4y'' + 4y' + y = \frac{x^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} &4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0 \\ &\quad (2\alpha + 1)^2 = 0, \alpha = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{-\frac{x}{2}}(c_1 + c_2 x).$$

Soluzione particolare dell'equazione completa. In base al metodo di somiglianza, cerco

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= Ax^2 + Bx + C \\ \overline{y}'(x) &= 2Ax + B \\ \overline{y}''(x) &= 2A \end{aligned}$$

$$4 \cdot 2A + 4(2Ax + B) + \left(Ax^2 + Bx + C\right) = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ 8A + B = 0 \\ 8A + 4B + C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -4 \\ C = 12 \end{cases}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa è allora

$$\overline{y}(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 12$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}(c_1 + c_2 x) + \frac{x^2}{2} - 4x + 12.$$

3. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y)=\frac{2x^3-x^2y+2xy^2-y^3+x^4y-3xy^3}{x^2+y^2}\ \text{ per }\ (x,y)\neq(0,0)\,,\ f(0,0)=0$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}}f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$f(x,y)=\frac{2x^3-x^2y+2xy^2-y^3}{x^2+y^2}+\frac{x^4y}{x^2+y^2}+\frac{-3xy^3}{x^2+y^2}\equiv f_1+f_2+f_3.$$

Le funzioni f_1,f_2,f_3 sono continue fuori dall'origine e positivamente omogenee di grado, rispettivamente, $1,3,2$. Quindi tutte e tre tendono a zero per $(x,y)\to(0,0)$. Di conseguenza $f(x,y)\to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$, e f è continua in $(0,0)$.
b.

$$\begin{aligned} f(x,0)&=\frac{2x^3}{x^2}=2x,\ \text{quindi}\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=2\\ f(0,y)&=\frac{-y^3}{y^2}=-y,\ \text{quindi}\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1. \end{aligned}$$

Perciò f è derivabile, con $\nabla f(0,0)=(2,-1)$.
c. Sia

$$\begin{aligned} g(t)&=f(t\cos\theta,t\sin\theta)=f_1(t\cos\theta,t\sin\theta)+f_2(t\cos\theta,t\sin\theta)+f_3(t\cos\theta,t\sin\theta)\\ &=t\left(2\cos^3\theta-\cos^2\theta\sin\theta+2\cos\theta\sin^2\theta-\sin^3\theta\right)\\ &+t^3\left(\cos^4\theta\sin\theta\right)+t^2\left(-3\cos\theta\sin^3\theta\right). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} D_{\underline{v}}f(0,0)=g'(0)&=2\cos^3\theta-\cos^2\theta\sin\theta+2\cos\theta\sin^2\theta-\sin^3\theta\\ &=2\cos\theta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-\sin\theta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\\ &=2\cos\theta-\sin\theta. \end{aligned}$$

$$D_{\underline{v}}f(0,0)=2\cos\theta-\sin\theta.$$

D'altro canto

$$\nabla f(0,0)\cdot\underline{v}=(2,-1)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=2\cos\theta-\sin\theta\ \text{per ogni}\ \theta,$$

perciò *vale* la formula del gradiente.

4. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, limitandosi (data la periodicità) alla regione $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = x^2 + (2x+1)\cos(2y)$$

$$\begin{cases} f_x = 2x + 2\cos(2y) = 2(x + \cos(2y)) = 0 \\ f_y = -2(2x+1)\sin(2y) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione dà $x = -\frac{1}{2}$ o $\sin(2y) = 0, 2y = k\pi, y = k\frac{\pi}{2}$, cioè, nell'intervallo considerato, $y = 0, y = \pm\frac{\pi}{2}$.

Per $x = -\frac{1}{2}$ la prima equazione dà

$$\cos(2y) = \frac{1}{2}, 2y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, y = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,$$

che nell'intervallo considerato $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ significa:

$$y = \pm\frac{\pi}{6}$$

Per $y = 0$ la prima equazione dà $x = -1$.

Per $y = \pm\frac{\pi}{2}$ la prima equazione dà $x = 1$.

Quindi i punti stazionari sono:

$$(-1, 0), \left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\pi}{6}\right), \left(1, \pm\frac{\pi}{2}\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{cases} f_x = 2(x + \cos(2y)) \\ f_y = -2(2x+1)\sin(2y) \end{cases}$$

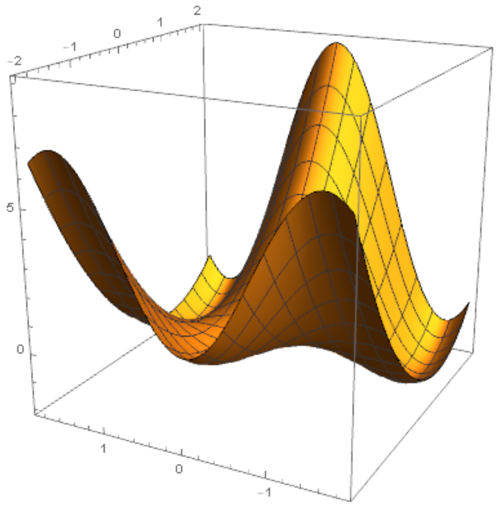
$$\begin{aligned} Hf(x, y) &= \begin{bmatrix} 2 & -4\sin(2y) \\ -4\sin(2y) & -4(2x+1)\cos(2y) \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} 1 & -2\sin(2y) \\ -2\sin(2y) & -2(2x+1)\cos(2y) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf(-1, 0) = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ definita positiva, punto di minimo relativo}$$

$$Hf\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\pi}{6}\right) = 2\begin{bmatrix} 1 & \mp\sqrt{3} \\ \mp\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punti di sella}$$

$$\left(1, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ definita positiva, punti di minimo relativo}$$



5. Funzione implicita

Dimostrare che l'equazione

$$f(x,y) = x\sqrt{4-y^2} + y\ \sqrt[3]{x+1} = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = -2$. Calcolare quindi $g'(-2)$, semplificando l'espressione ottenuta.

La funzione è $C^1(A)$ con $A = \{(x,y) : x \neq -1 \text{ e } -2 < y < 2\}$.

$$f(-2,y) = -2\sqrt{4-y^2} - y = 0 \text{ per}$$
$$-2\sqrt{4-y^2} = y$$

quindi $y \leq 0$ e

$$4\left(4-y^2\right) = y^2$$
$$5y^2 = 16$$
$$y = -\frac{4}{\sqrt{5}} \in (-2,2)$$

Quindi $y_0 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{2\sqrt{4-y^2}} + \ \sqrt[3]{x+1} = -\frac{xy}{\sqrt{4-y^2}} + \ \sqrt[3]{x+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(-2, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{\frac{8}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} - 1 = -5 \neq 0$$

Poiché $f \in C^1(A)$, $\left(-2,-\frac{4}{\sqrt{5}}\right) \in A$, $f\left(-2,-\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}\left(-2,-\frac{4}{\sqrt{5}}\right) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$, C^1, in un intorno di $x_0 = -2$. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{4-y^2} + \frac{y}{3(x+1)^{2/3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(-2,-\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{5}}$$

$$g'(-2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(-2,-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(-2,-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)} = -\frac{\frac{2}{3\sqrt{5}}}{-5} = \frac{2}{15\sqrt{5}}.$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°3

Es.	Punti
1	6
2	6
3	7
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{2+x} = \frac{1}{x^3} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

dopo aver determinato (a priori) l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui per $x \neq 0, x \neq -2$, poiché la condizione iniziale è assegnata in $x = -1$, la soluzione del problema sarà definita in $(-2, 0)$.
$a(x) = \frac{1}{2+x}$
$A(x) = \int a(x)\,dx = \log|2+x| = \log(2+x)$ (nell'intervallo considerato).
Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\log(2+x)} \left\{ c + \int e^{\log(2+x)} \frac{1}{x^3} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2+x} \left\{ c + \int \frac{2+x}{x^3} dx \right\} = \frac{1}{2+x} \left\{ c + \int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2+x} \left\{ c - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right\}. \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(-1) = 2$ e abbiamo

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \cdot \{c - 1 + 1\} \\ c &= 2 \\ y(x) &= \frac{1}{2+x} \left\{ 2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right\} \text{ per } x \in (-2, 0). \end{aligned}$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y' + 8y = 5 \sin 2x$$

semplificando l'espressione ottenuta.

$$\alpha^2 + 4\alpha + 8 = 0$$
$$\alpha = -2 \pm 2i$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Metodo di somiglianza. Notiamo che il termine noto *non è* soluzione dell'omogenea.
Cerchiamo una soluzione particolare del tipo:

$$\overline{y}(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$$
$$\overline{y}'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$
$$\overline{y}''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) + 4(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 8(A\cos 2x + B\sin 2x) = 5\sin 2x$$

$$\begin{cases} -4A + 8B + 8A = 0 \\ -4B - 8A + 8B = 5 \end{cases} \begin{cases} 4A + 8B = 0 \\ -8A + 4B = 5 \end{cases} \begin{cases} B = \frac{1}{4} \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Perciò una soluzione particolare dell'equazione completa è:

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x.$$

3. Curve e integrali di linea

Si consideri l'arco di curva materiale omogenea γ di massa m ed equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos(\pi t) \\ y = \sin(\pi t) \\ z = \sqrt{\frac{2}{3}}\pi t^{3/2} \end{cases} \quad t \in [0, 2]$$

Calcolare il suo elemento d'arco, la sua lunghezza, e l'integrale di linea

$$\int_\gamma z^{\frac{2}{3}}\, ds.$$

Si richiede di *semplificare le espressioni trovate.*

$$\underline{r}'(t) = \left(-\pi\sin(\pi t), \pi\cos(\pi t), \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\pi t^{1/2}\right)$$
$$|\underline{r}'(t)| = \pi\sqrt{1 + \frac{3}{2}t}$$
$$ds = \pi\sqrt{1 + \frac{3}{2}t}dt.$$

Lunghezza:

$$l(\gamma) = \int_0^2 \pi\sqrt{1+\frac{3}{2}t}dt = \pi\left[\frac{4}{9}\left(1+\frac{3}{2}t\right)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{28}{9}\pi.$$

Integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^{\frac{2}{3}} ds &= \int_0^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} \pi^{\frac{2}{3}} t \cdot \pi\sqrt{1+\frac{3}{2}tdt} \\
&\left[\sqrt{1+\frac{3}{2}t} = u; 1+\frac{3}{2}t = u^2; \frac{3}{2}dt = 2udu; t = \frac{2}{3}\left(u^2-1\right)\right] \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{5}{3}} \int_1^2 \frac{2}{3}\left(u^2-1\right)\cdot u \cdot \frac{2}{3}2udu \\
&= \frac{8}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{5}{3}} \int_1^2 \left(u^4-u^2\right) du \\
&= \frac{8}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{5}{3}} \left[\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right]_1^2 \\
&= \frac{8}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{5}{3}} \left(8\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{8}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{5}{3}} \left(8\cdot\frac{7}{15}+\frac{2}{15}\right) = \frac{464}{135}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{5}{3}}.
\end{aligned}$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{y\sin\left(3x-y^2\right)+x^{7/3}\cos y}{\sqrt[4]{x^4+y^2}} \text{ per } (x,y)\neq(0,0), \quad f(0,0)=0.$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$\begin{aligned}
|f(x,y)| &\leq \frac{|y|}{\sqrt[4]{x^4+y^2}} + \frac{|x|^{7/3}}{\sqrt[4]{x^4+y^2}} \\
&\leq \frac{|y|}{\sqrt[4]{y^2}} + \frac{|x|^{7/3}}{\sqrt[4]{x^4}} = |y|^{1/2} + |x|^{4/3} \equiv g(x,y).
\end{aligned}$$

Poiché g è una funzione continua, che vale 0 in $(0,0)$, quindi tende a 0 per $(x,y) \to (0,0)$, per il teorema del confronto

$$f(x,y) \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)$$

Perciò f è continua in $(0,0)$.

b.

$$f(x,0) = \frac{x^{7/3}}{|x|} = x^{4/3}\operatorname{sgn}(x), \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

$$f(0,y) = \frac{-y\sin\left(y^2\right)}{|y|^{1/2}} \sim -y\,|y|^{3/2}, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Perciò f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (0,0)$

c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$h(x,y) \equiv \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Si ha:

$$h(x,y) = \frac{y\sin\left(3x-y^2\right) + x^{7/3}\cos y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt[4]{x^4+y^2}}$$

Poiché $|\sin t| \leq |t|$ si ha:

$$\begin{aligned}
|h(x,y)| &\leq \frac{|y|\left(3|x|+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt[4]{x^4+y^2}} + \frac{|x|^{7/3}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt[4]{x^4+y^2}} \\
&\leq \frac{|y|\left(3|x|+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\,|y|^{1/2}} + \frac{|x|^{7/3}}{\sqrt{x^2+y^2}\,|x|} \\
&\leq |y|^{1/2}\left(\frac{3|x|}{|x|} + \frac{y^2}{|y|}\right) + \frac{|x|^{4/3}}{|x|} \\
&= |y|^{1/2}(3+|y|) + |x|^{1/3} \equiv m(x,y).
\end{aligned}$$

perché $m(x,y)$ è continua e nell'origine vale zero, per il teorema del confronto

$$h(x,y) \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)$$

perciò f è differenziabile in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione (nel dominio della funzione stessa, da determinare), studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = y\log y\left(4x-x^2\right).$$

La funzione è definita per $y > 0$.

$$\begin{cases} f_x = (4-2x)\, y \log y = 0 \\ f_y = (\log y + 1)\left(4x - x^2\right) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà $x = 2$ o $y = 1$ ($y = 0$ non è accettabile).

La seconda equazione per $x = 2$ dà

$$\log y + 1 = 0, \text{ quindi } y = \frac{1}{e};$$

per $y = 1$ dà

$$x^2 - 4x = 0, \text{ quindi } x = 0, x = 4.$$

I punti stazionari sono:

$$\left(2, \frac{1}{e}\right), (0,1), (4,1).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -2y\log y & (\log y + 1)(4-2x) \\ (\log y + 1)(4-2x) & \frac{4x - x^2}{y} \end{bmatrix}.$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf\left(2, \frac{1}{e}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & 4e \end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$

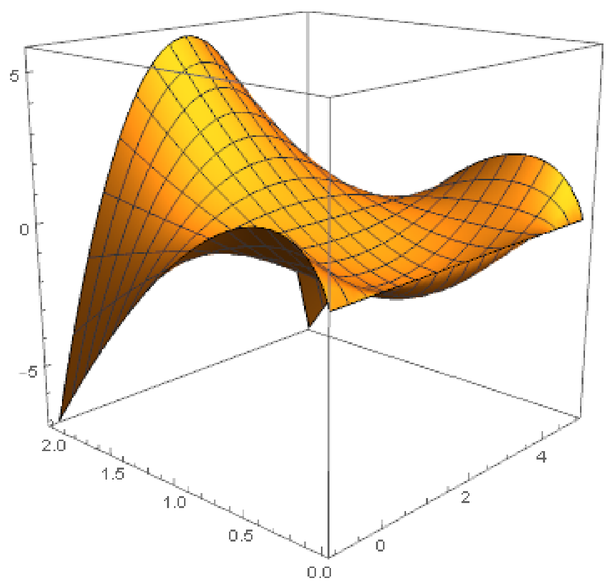
$$\left(2, \frac{1}{e}\right) \text{ è punto di minimo relativo.}$$

$$Hf(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$(0,1) \text{ è punto di sella.}$$

$$Hf(4,1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$(4,1) \text{ è punto di sella.}$$


5
0
-5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
2
4

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°4

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine lineari
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{xy}{x+1} = e^{2x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

dopo aver determinato (a priori) l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui per $x \neq -1$, poiché la condizione iniziale è assegnata in $x = 1$ la soluzione del problema sarà definita in $(-1, +\infty)$.
$a(x) = -\frac{x}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}$
$A(x) = \int a(x)\,dx = -x + \log|x+1| = -x + \log(x+1)$ in $(-1, +\infty)$.
Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{x-\log(x+1)} \left\{ c + \int e^{-x+\log(x+1)} e^{2x} dx \right\} \\ &= \frac{e^x}{x+1} \left\{ c + \int e^x (x+1)\, dx \right\} \\ &= \frac{e^x}{x+1} \{ c + xe^x \}. \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(1) = 0$ e abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{e}{2} \{ c + e \} \\ c &= -e \\ y(x) &= \frac{e^x}{x+1} \{ xe^x - e \} \text{ per } x \in (-1, +\infty). \end{aligned}$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$9y'' + 4y = 10e^{-x} \cos x.$$

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa, si richiede di usare il metodo dell'esponenziale complesso.

$$
\begin{aligned}
9\alpha^2 + 4 &= 0 \\
\alpha &= \pm \frac{2}{3} i.
\end{aligned}
$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{2}{3}x\right).$$

Cerco una soluzione particolare dell'equazione completa col metodo di somiglianza. Poiché

$$10e^{-x}\cos x = \operatorname{Re}\left(10e^{x(-1+i)}\right)$$

risolviamo prima l'equazione

$$9w'' + 4w = 10e^{x(-1+i)}$$

cercando una soluzione particolare del tipo

$$
\begin{aligned}
w(x) &= Ae^{x(-1+i)} \\
w'(x) &= Ae^{x(-1+i)}(-1+i) \\
w''(x) &= Ae^{x(-1+i)}(-1+i)^2 = Ae^{x(-1+i)}(-2i)
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
Ae^{x(-1+i)}\{9(-2i)+4\} &= 10e^{x(-1+i)} \\
A &= \frac{5}{2-9i} = \frac{5}{85}(2+9i) = \frac{1}{17}(2+9i)
\end{aligned}
$$

$$w(x) = \frac{1}{17}(2+9i)\,e^{-x}(\cos x + i\sin x)$$

$$
\begin{aligned}
\overline{y}(x) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{17}(2+9i)\,e^{-x}(\cos x + i\sin x)\right) \\
&= \frac{1}{17}e^{-x}(2\cos x - 9\sin x).
\end{aligned}
$$

Integrale generale della completa:

$$y(x) = c_1 \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \frac{1}{17}e^{-x}(2\cos x - 9\sin x).$$

3. Curve e integrali di linea

Si consideri l'arco di curva materiale omogenea γ di massa m ed equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \quad t \in [-2\pi, 2\pi] \\ z = ht \end{cases}$$

con r, h costanti positive. Calcolare il suo elemento d'arco, la sua lunghezza, il suo momento d'inerzia rispetto all'asse x. [Attenzione: NON rispetto all'asse z]. Semplificare l'espressione trovata.

$$\begin{aligned} \underline{r}'(t) &= (-r\sin t, r\cos t, h) \\ |\underline{r}'(t)| &= \sqrt{r^2+h^2} \\ ds &= \sqrt{r^2+h^2}dt. \end{aligned}$$

Lunghezza:

$$l(\gamma) = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{r^2+h^2}dt = 4\pi\sqrt{r^2+h^2}.$$

Momento d'inerzia:

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{l(\gamma)}\int_\gamma \left(y^2+z^2\right) ds = \frac{m}{4\pi\sqrt{r^2+h^2}}\int_{-2\pi}^{2\pi}\left(r^2\sin^2 t + h^2t^2\right)\sqrt{r^2+h^2}dt \\ &= \frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(r^2\sin^2 t + h^2t^2\right)dt = \frac{m}{2\pi}\left(r^2\pi + h^2\frac{(2\pi)^3}{3}\right) \\ &= m\left(\frac{r^2}{2}+\frac{4}{3}\pi^2h^2\right). \end{aligned}$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \frac{y^2\operatorname{Sh} x - x^3\operatorname{Ch} y\sin^2 x}{x^4+y^2} \text{ per } (x,y)\neq(0,0), \quad f(0,0)=0.$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.

c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}}f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Poiché $\sin^2 x \le x^2$ si ha:

$$|f(x,y)| \le \frac{y^2|\operatorname{Sh} x|}{x^4+y^2}+\frac{|x|^5\operatorname{Ch} y}{x^4+y^2} \le \frac{y^2|\operatorname{Sh} x|}{y^2}+\frac{|x|^5\operatorname{Ch} y}{x^4} = |\operatorname{Sh} x|+|x|\operatorname{Ch} y \to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0),$$

quindi per il teorema del confronto anche $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, e f è continua in $(0,0)$.

b.

$$\begin{aligned} f(x,0) &= \frac{-x^3 \sin^2 x}{x^4} \sim -x, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1 \\ f(0,y) &= 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Perciò f è derivabile, con $\nabla f(0,0) = (-1,0)$.

c. Sia

$$g(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) = \frac{t^2 \sin^2\theta \operatorname{Sh}(t\cos\theta) - t^3\cos^3\theta \operatorname{Ch}(t\sin\theta)\sin^2(t\cos\theta)}{t^4\cos^4\theta + t^2\sin^2\theta}.$$

Se $\sin\theta\cos\theta \neq 0$, per $t \to 0$ è

$$\begin{aligned} t^2\sin^2\theta \operatorname{Sh}(t\cos\theta) &\sim t^3\sin^2\theta\cos\theta \\ -t^3\cos^3\theta \operatorname{Ch}(t\sin\theta)\sin^2(t\cos\theta) &\sim -t^2\cos^5\theta \end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned} g(t) &\sim \frac{t^3\sin^2\theta\cos\theta}{t^2\sin^2\theta} = t\cos\theta, \text{ quindi} \\ D_{\underline{v}} f(0,0) &= g'(0) = \cos\theta. \end{aligned}$$

Se poi $\sin\theta\cos\theta = 0$, le derivate direzionali sono le derivate parziali già calcolate.

D'altro canto

$$\nabla f(0,0) \cdot \underline{v} = (-1,0)\cdot(\cos\theta,\sin\theta) = -\cos\theta \text{ per } \sin\theta\cos\theta \neq 0,$$

perciò *non vale* la formula del gradiente. (In particolare, certamente f non è differenziabile in $(0,0)$).

5. Massimi e minimi vincolati

Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^3 - y^3$$

soggetta al vincolo

$$2x^2 + y^2 = 1.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Sia $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1$, poiché g è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$\nabla g(x,y) = (4x, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

e $g(0,0) \neq 0$, il vincolo non ha punti critici. Definiamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^3 - y^3 - \lambda\left(2x^2 + y^2 - 1\right)$$

e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 3x^2 - 4\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -3y^2 - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\left(2x^2 + y^2 - 1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(3x - 4\lambda) = 0 \\ -y(3y + 2\lambda) = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

La prima equazione dà $x = 0$ o $3x - 4\lambda = 0$, la seconda dà $y = 0$ o $3y + 2\lambda$.

Se $x = 0$ la terza equazione dà $y = \pm 1$. Se $y = 0$ la terza equazione dà $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se $xy \neq 0$ le prime due danno il sistema

$$\begin{cases} 3x = 4\lambda \\ 3y = -2\lambda \end{cases}$$

e dividendo membro a membro si trova $\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$, cioè $y = -\frac{1}{2}x$ che sostituita nella terza dà

$$2x^2 + \frac{x^2}{4} = 1$$

$$\frac{9}{4}x^2 = 1, x = \pm\frac{2}{3}$$

e quindi

$$y = -\frac{1}{2}x = \mp\frac{1}{3}.$$

I punti stazionari liberi della Lagrangiana sono quindi:

$$(0, \pm 1), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \pm\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Poiché il vincolo rappresenta un insieme chiuso e limitato del piano (ellisse), per il teorema di Weierstrass massimo e minimo assoluto vincolato di f esistono certamente, basta perciò confrontare i valori di f in questi punti. Si ha:

$$f(x,y) = x^3 - y^3$$

$$f(0, \pm 1) = \mp 1;$$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$$f\left(\pm\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right) = \pm\frac{5}{27}.$$

pertanto:

$(0,-1)$ è punto di massimo assoluto vincolato

$(0,1)$ è punto di minimo assoluto vincolato.