Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine lineari
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \left(3 - \frac{1}{x}\right) y = x^2 e^{-x} \\ y(1) = \frac{1}{2e} \end{cases}$$

e determinare a priori l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + \frac{1}{2} y' = x^2 - 3.$$

3. Curve e integrali di linea
Si consideri l'arco di curva γ in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}(t) = \left(2\cos t - \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t), \sqrt{2}\sin t\right) \text{ per } t \in [0, 2\pi].$$

a. Calcolare l'elemento d'arco ds *e semplificare il più possibile* l'espressione trovata.

b. In base all'espressione trovata per ds, stabilire se l'arco di curva è regolare, o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari della curva. L'arco di curva è chiuso?

c. Calcolare la lunghezza di γ.

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(\sin x - 2y)^3}{x^2+y^2} e^{x-y} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 3(x-y)^2 + 12(y-x).$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{2y} \operatorname{cotg} x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' + 2y = 4\sin x.$$

3. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x|x|-y^3\right)}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

4. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = e^{-\frac{(y-2)^2}{3}} \left(x^2 + y^2\right).$$

5. Funzione implicita

Dimostrare che l'equazione

$$f(x, y) = e^{\arctan(xy)} + (3x + 2) \cos y = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h(y)$ in un intorno di $y_0 = 0$. Calcolare quindi $h'(0)$, semplificando l'espressione ottenuta.

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Tema n°3

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y \cdot \frac{2x+1}{x-3} = \frac{4}{(x-3)^7} \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

determinando, prima di risolvere il problema, l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y = 5e^{-2x} \cos 3x$$

semplificando l'espressione ottenuta. Per la ricerca di una soluzione particolare della completa, si richiede di utilizzare il metodo dell'esponenziale complesso.

3. Curve e integrali di linea
Si consideri la curva piana γ di equazione in forma polare

$$\rho = 2 + \cos\theta \text{ per } \theta \in [0, \pi].$$

a. Calcolare il suo elemento d'arco, semplificando l'espressione ottenuta, stabilire se la curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari sulla curva.
b. Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma y ds.$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin\left(x^2 - y^3\right)}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi vincolati
Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{y^4+1}$$

soggetta al vincolo

$$x^4 + y^2 = 16.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Tema n°4

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)_________________________________
codice persona (o n°di matricola)_________________________________
n°d'ordine (v. elenco)_________________________________

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y \log y}{2x+1} \\ y(-1) = e^2 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' - 15y = 7xe^{2x}.$$

3. Curve e integrali di linea
Sia γ un arco di curva materiale non omogeneo, rappresentato dalla curva (elica cilindrica)

$$\underline{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, Rt) \text{ per } t \in [0, 4\pi],$$

avente densità lineare

$$\delta(t) = \frac{\mu}{R}(1+t),$$

dove R, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e di una massa, rispettivamente.

Calcolare l'elemento d'arco ds, la massa totale e la coordinata z_c del baricentro. *Si richiede di riportare con cura impostazione e passaggi.*

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|\sin x+1-\cos y}{\sqrt[4]{x^4+y^2}} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.

c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}}f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\left(1+x^2-4y^2\right).$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	7
2	6
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine lineari
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \left(3 - \frac{1}{x}\right) y = x^2 e^{-x} \\ y(1) = \frac{1}{2e} \end{cases}$$

e determinare a priori l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui per $x \neq 0$, poiché la condizione iniziale è assegnata in $x = 1$ la soluzione del problema sarà definita in $(0, +\infty)$.
$a(x) = 3 - \frac{1}{x}$
$A(x) = \int \left(3 - \frac{1}{x}\right) dx = 3x - \log|x| = 3x - \log x$ in $(0, +\infty)$.
Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-3x+\log x} \left\{ c + \int e^{3x-\log x} x^2 e^{-x} dx \right\} \\ &= x e^{-3x} \left\{ c + \int x e^{2x} dx \right\}. \end{aligned}$$

$$\int x e^{2x} dx = (...) = e^{2x} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right).$$

$$\begin{aligned} y(x) &= x e^{-3x} \left\{ c + e^{2x} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) \right\} \\ &= c x e^{-3x} + e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} \right). \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(1) = \frac{1}{2e}$ e abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2e} &= \frac{c}{e^3} + \frac{1}{4e} \\ c &= \frac{e^2}{4} \\ y(x) &= \frac{x}{4} e^{2-3x} + e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} \right) \text{ per } x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + \frac{1}{2}y' = x^2 - 3.$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha = 0$$

$$\alpha = 0, \alpha = -\frac{1}{2}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 + c_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

Metodo di somiglianza, notando che a primo membro manca il termine in y, cerchiamo un polinomio con un grado in più del secondo membro, precisamente:

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= ax^3 + bx^2 + cx \\ \overline{y}'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ \overline{y}''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

$$(6ax + 2b) + \frac{1}{2}\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = x^2 - 3$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a = 1 \\ 6a + b = 0 \\ 2b + \frac{1}{2}c = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ 4 + b = 0, b = -4 \\ -8 + \frac{1}{2}c = -3, c = 10 \end{cases}$$

Soluzione particolare dell'equazione completa:

$$\overline{y}(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 10x.$$

Integrale generale dell'equazione completa:

$$y(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 10x + c_1 + c_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

3. Curve e integrali di linea
Si consideri l'arco di curva γ in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche:

$$\underline{r}(t) = \left(2\cos t - \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t), \sqrt{2}\sin t\right) \text{ per } t \in [0, 2\pi].$$

a. Calcolare l'elemento d'arco ds *e semplificare il più possibile* l'espressione trovata.

b. In base all'espressione trovata per ds, stabilire se l'arco di curva è regolare, o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari della curva. L'arco di curva è chiuso?

c. Calcolare la lunghezza di γ.

a.

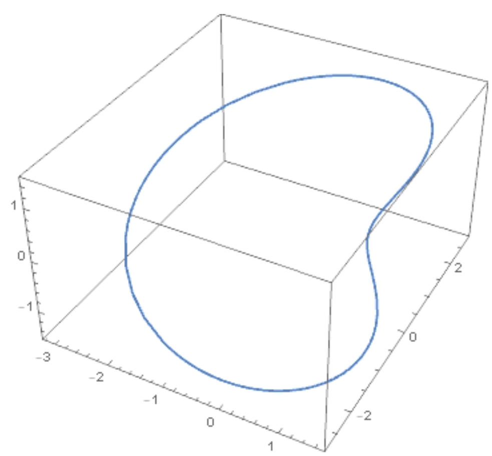
$$
\begin{aligned}
\underline{r}'(t) &= \left(-2\sin t + 2\sin(2t), 2\cos t - 2\cos(2t), \sqrt{2}\cos t\right) \\
|\underline{r}'(t)|^2 &= 4 + 4 - 8(\cos(2t)\cos t + \sin(2t)\sin t) + 2\cos^2 t \\
&= 8 - 8\cos t + 2\cos^2 t = 2\left(4 - 4\cos t + \cos^2 t\right) \\
&= 2(2-\cos t)^2 \\
ds &= \sqrt{2}(2-\cos t)\, dt.
\end{aligned}
$$

b. Poiché $\underline{r} \in C^1(0, 2\pi)$ e $|\underline{r}'(t)| = \sqrt{2}(2-\cos t) > 0$ per ogni $t\,[0, 2\pi]$, l'arco di curva è regolare. Poiché $\underline{r}(0) = \underline{r}(2\pi) = (1, 0, 0)$, l'arco di curva è chiuso.

Poiché ogni componente della curva è 2π periodica, $\underline{r}(2\pi) = \underline{r}(2\pi)$ e l'arco di curva è chiusa.

c. Lunghezza:

$$
l(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(2-\cos t)\, dt = \sqrt{2}\cdot(2\cdot 2\pi - 0) = 4\sqrt{2}\pi.
$$



4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$
f(x,y) = \begin{cases} \frac{(\sin x - 2y)^3}{x^2+y^2} e^{x-y} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}
$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Scriviamo:

$$|f(x,y)| \le \frac{e^{x-y}}{x^2+y^2}\left(|\sin x| + 2|y|\right)^3 \le e^{x-y} \cdot \frac{\left(|x| + 2|y|\right)^3}{x^2+y^2} \equiv f_1(x,y) \cdot f_2(x,y).$$

Poiché f_2 è positivamente omogenea di grado 1 e continua fuori dall'origine,

$$f_2(x,y) \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0)$$

inoltre f_1 è continua in tutto il piano perciò

$$f_1(x,y) \to f_1(0,0) = 1,$$

dunque $f_1 \cdot f_2 \to 0$ e per il teorema del confronto f tende a zero. Perciò f è continua.

b.

$$f(x,0) = \frac{(\sin x)^3}{x^2} e^x \sim x \text{ per } x \to 0, \text{ perciò}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$f(0,y) = \frac{(-2y)^3}{y^2} e^{-y} \sim -8y \text{ per } y \to 0, \text{ perciò}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -8.$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (1,-8)$.

c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$g(x,y) \equiv \frac{f(x,y) - x + 8y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Ma:

$$g(x,y) = \frac{\frac{(\sin x - 2y)^3}{x^2+y^2} e^{x-y} - x + 8y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(\sin x - 2y)^3 e^{x-y} + \left(x^2+y^2\right)(8y - x)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}.$$

In particolare,

$$g(x,x) = \frac{(\sin x - 2x)^3 + 14x^3}{\left(2x^2\right)^{3/2}} \sim \frac{13x^3}{2^{3/2}|x|^3} \to \pm\frac{13}{2\sqrt{2}} \text{ per } x \to 0^{\pm}.$$

Poiché $g(x,x)$ non tende a zero, f non è differenziabile in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 3(x-y)^2 + 12(y-x).$$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 6(x-y) - 12 = 0 \\ f_y = -3y^2 - 6(x-y) + 12 = 0 \end{cases} \text{ e sommando membro a membro}$$

$$\begin{cases} 3\left(x^2 - y^2\right) = 0 \Longrightarrow y = \pm x \\ 3x^2 + 6(x-y) - 12 = 0 \end{cases}$$

Se $y = x$,

$$3x^2 - 12 = 0, x = \pm 2.$$

Se $y = -x$,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 12x - 12 &= 0 \\ x^2 + 4x - 4 &= 0 \\ x &= -2 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

e i punti stazionari sono:

$$(2,2), (-2,-2), \left(-2+2\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2}\right), \left(-2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x + 6 \\ f_{xy} &= -6 \\ f_{yy} &= -6y + 6 \end{aligned}$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+6 & -6 \\ -6 & -6y+6 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} x+1 & -1 \\ -1 & -y+1 \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf(2,2) = 6\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella.}$$

$$Hf(-2,-2) = 6\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella.}$$

$$Hf\left(-2+2\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2}\right) = 6\begin{bmatrix} -1+2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ definita positiva, punto di minimo}$$

$$Hf\left(-2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}\right) = 6\begin{bmatrix} -1-2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1-2\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ definita negativa, punto di massimo}$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	7
2	6
3	7
4	7
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{2y} \operatorname{cotg} x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

Equazione a variabili separabili, il secondo membro ha senso per $x \neq k\pi$, la condizione iniziale è assegnata in $\frac{\pi}{2}$, quindi x deve variare al più nell'intervallo $(0, \pi)$ (cioè: l'intervallo più ampio su cui sarà definita la soluzione sarà $(0, \pi)$ o contenuto in questo).

Non ci sono soluzioni costanti dell'equazione. Risolviamo:

$$\begin{aligned} \int e^{-2y} dy &= \int (\operatorname{cotg} x)\, dx \\ -\frac{1}{2} e^{-2y} &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log|\sin x| + c = \log(\sin x) + c, \end{aligned}$$

sfruttando il fatto che $x \in (0, \pi)$.

Imponiamo la condizione iniziale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$:

$$-\frac{1}{2} = c$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} e^{-2y} &= \log(\sin x) - \frac{1}{2} \\ e^{-2y} &= 1 - 2\log(\sin x) \end{aligned}$$

Per $x \in (0, \pi)$ si ha $\sin x \in (0, 1)$, $\log(\sin x) < 0$, $1 - 2\log(\sin x) > 0$, perciò possiamo risolvere:

$$\begin{aligned} -2y &= \log(1 - 2\log(\sin x)) \\ y &= -\frac{1}{2} \log(1 - 2\log(\sin x)) \end{aligned}$$

che risulta ben definita per $x \in (0, \pi)$. Questo è l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine

Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y' + 2y = 4 \sin x.$$

$$\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$$

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{7} i}{2}.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) \right).$$

Soluzione particolare dell'equazione completa. Osservo che il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea. Perciò in base al metodo di somiglianza, cerco

$$\begin{aligned}
\overline{y}(x) &= A \cos x + B \sin x \\
\overline{y}'(x) &= -A \sin x + B \cos x \\
\overline{y}''(x) &= -A \cos x - B \sin x
\end{aligned}$$

$$(-A \cos x - B \sin x) + (-A \sin x + B \cos x) + 2 (A \cos x + B \sin x) = 4 \sin x$$

$$\begin{cases} -A + B + 2A = 0 \\ -B - A + 2B = 4 \end{cases} \begin{cases} A = -B \\ 2B = 4 \end{cases} \begin{cases} B = 2 \\ A = -2 \end{cases}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa è allora

$$\overline{y}(x) = -2 \cos x + 2 \sin x$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = -2 \cos x + 2 \sin x + e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) \right).$$

3. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x|x| - y^3\right)}{\sqrt{x^2 + y^4}} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.

c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$|f(x,y)| = \frac{\left|\sin\left(x|x| - y^3\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^4}} \leq \frac{\left|x|x| - y^3\right|}{\sqrt{x^2+y^4}} \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^4}} + \frac{|y|^3}{\sqrt{x^2+y^4}}$$
$$\leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} + \frac{|y|^3}{\sqrt{y^4}} = |x| + |y| \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0),$$

quindi per il teorema del confronto $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, e f è continua in $(0,0)$.

b.

$$f(x,0) = \frac{\sin(x|x|)}{\sqrt{x^2}} \sim \frac{x|x|}{|x|} = x, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$
$$f(0,y) = \frac{\sin\left(-y^3\right)}{\sqrt{y^4}} \sim \frac{-y^3}{y^2} = -y, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1.$$

Perciò f è derivabile, con $\nabla f(0,0) = (1,-1)$.

c. Sia

$$g(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) = \frac{\sin\left(t\cos\theta\,|t\cos\theta| - t^3\sin^3\theta\right)}{\sqrt{t^2\cos^2\theta + t^4\sin^4\theta}}.$$

Ora se $\cos\theta \neq 0$, per $t \to 0$

$$g(t) \sim \frac{\sin(t\cos\theta\,|t\cos\theta|)}{\sqrt{t^2\cos^2\theta}} \sim \frac{t\cos\theta\,|t\cos\theta|}{|t\cos\theta|} = t\cos\theta$$

quindi
$$D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = \cos\theta.$$

Se $\cos\theta = 0$, per $t \to 0$

$$g(t) = \frac{\sin\left(-t^3\sin^3\theta\right)}{\sqrt{t^4\sin^4\theta}} \sim \frac{-t^3\sin^3\theta}{t^2\sin^2\theta} = -t\sin\theta$$

quindi
$$D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = -\sin\theta.$$

D'altro canto

$$\nabla f(0,0) \cdot \underline{v} = (1,-1) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta - \sin\theta \text{ per ogni } \theta,$$

perciò *non vale* la formula del gradiente. (In particolare, certamente f non è differenziabile in $(0,0)$).

4. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = e^{-\frac{(y-2)^2}{3}} \left(x^2+y^2\right).$$

$$\begin{cases} f_x = e^{-\frac{(y-2)^2}{3}} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y = e^{-\frac{(y-2)^2}{3}} \left(-\frac{2}{3}(y-2)\left(x^2+y^2\right)+2y\right) = 0 \end{cases}$$

quindi la seconda equazione dà

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}(y-2)\,y^2 + 2y &= 0 \\ y\left(y^2-2y-3\right) &= 0 \\ y(y+1)(y-3) &= 0 \\ y = 0, y = -1, y = 3 \end{aligned}$$

e i punti stazionari sono:

$$(0,0), (0,-1), (0,3).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= e^{-\frac{(y-2)^2}{3}} 2 \\ f_{xy} &= e^{-\frac{(y-2)^2}{3}} 2x \left(-\frac{2(y-2)}{3}\right) \\ f_{yy} &= e^{-\frac{(y-2)^2}{3}} \left[\frac{4(y-2)^2}{9}\left(x^2+y^2\right) - \frac{4}{3}y(y-2) + \right. \\ &\left. -\frac{2}{3}\left(x^2+y^2+2y(y-2)\right)+2\right]. \end{aligned}$$

Poiché in tutti e tre i punti da studiare è $x=0$, tanto vale scrivere

$$\begin{aligned} f_{yy}(0,y) &= e^{-\frac{(y-2)^2}{3}} \left[\frac{4(y-2)^2}{9}y^2 - \frac{4}{3}y(y-2) - \frac{2}{3}\left(y^2+2y(y-2)\right)+2\right] \\ &= e^{-\frac{(y-2)^2}{3}} \left[\frac{4}{3}y(y-2)\left(\frac{1}{3}y(y-2)-1\right) - \frac{2}{3}\left(3y^2-4y\right)+2\right] \end{aligned}$$

$$Hf(0,y) = e^{-\frac{(y-2)^2}{3}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}y(y-2)\left(\frac{1}{3}y(y-2)-1\right) - \frac{2}{3}\left(3y^2-4y\right)+2 \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf\,(0,0) = e^{-\frac{4}{3}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$

$$(0,0) \text{ è punto di minimo relativo.}$$

$$Hf\,(0,-1) = e^{-3} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$(0,-1) \text{ è punto di sella.}$$

$$Hf\,(0,3) = e^{-\frac{(y-2)^2}{3}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$(0,3) \text{ è punto di sella.}$$

5. Funzione implicita

Dimostrare che l'equazione

$$f\,(x,y) = e^{\arctan(xy)} + (3x+2)\cos y = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h\,(y)$ in un intorno di $y_0 = 0$. Calcolare quindi $h'\,(0)$, semplificando l'espressione ottenuta.

La funzione è $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

$$f\,(x,0) = 1 + 3x + 2 = 0 \text{ per } x = -1.$$

Quindi $x_0 = -1$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) = \frac{y e^{\arctan(xy)}}{1+x^2y^2} + 3\cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(-1,0) = 3.$$

Poiché $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right), f\,(-1,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}\,(-1,0) \neq 0$, l'equazione $f\,(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h\,(y)\,,\, C^1$, in un intorno di $y_0 = 0$. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) = \frac{x e^{\arctan(xy)}}{1+x^2y^2} - (3x+2)\sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(-1,0) = -1$$

$$h'\,(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\,(-1,0)}{\frac{\partial f}{\partial x}\,(-1,0)} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°3

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y \cdot \frac{2x+1}{x-3} = \frac{4}{(x-3)^7} \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

determinando, prima di risolvere il problema, l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui per $x \neq 3$. Poiché la condizione iniziale è assegnata in $x = 2$ la soluzione del problema sarà definita in $(-\infty, 3)$.

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{2x+1}{x-3} \\ A(x) &= \int \frac{2x+1}{x-3} dx = \int \frac{2(x-3)+7}{x-3} dx = \int \left(2 + \frac{7}{x-3}\right) dx \\ &= 2x + 7\log|x-3| = 2x + 7\log(3-x) \end{aligned}$$

perché $x < 3$ nell'insieme di definizione della soluzione.
Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-A(x)} \left\{ c + \int e^{A(x)} \frac{4}{(x-3)^7} dx \right\} \\ &= e^{-(2x+7\log(3-x))} \left\{ c + \int e^{2x+7\log(3-x)} \frac{4}{(x-3)^7} dx \right\} \\ &= \frac{e^{-2x}}{(3-x)^7} \left\{ c - \int 4e^{2x} dx \right\} \\ &= \frac{e^{-2x}}{(3-x)^7} \left\{ c - 2e^{2x} \right\} = \frac{1}{(3-x)^7} \left\{ ce^{-2x} - 2 \right\}. \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(2) = 3$ e abbiamo

$$\begin{aligned} 3 &= \left\{ ce^{-4} - 2 \right\} \\ c &= 5e^4 \\ y(x) &= \frac{5e^{4-2x} - 2}{(3-x)^7} \text{ per } x \in (-\infty, 3). \end{aligned}$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 4y = 5e^{-2x}\cos 3x$$

semplificando l'espressione ottenuta. Per la ricerca di una soluzione particolare della completa, si richiede di utilizzare il metodo dell'esponenziale complesso.

L'equazione omogenea è un'equazione dell'oscillatore armonico con $\omega = 2$, integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x).$$

Metodo di somiglianza. Notiamo che il termine noto *non è* soluzione dell'omogenea. Poiché

$$5e^{-2x}\cos 3x = \mathrm{Re}\left(5e^{x(-2+3i)}\right),$$

cerchiamo prima una soluzione particolare dell'equazione

$$w'' + 4w = 5e^{x(-2+3i)},$$

del tipo

$$\begin{aligned}\overline{w}(x) &= Ae^{x(-2+3i)} \\ \overline{w}'(x) &= A(-2+3i)e^{x(-2+3i)} \\ \overline{w}''(x) &= A(-2+3i)^2 e^{x(-2+3i)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Ae^{x(-2+3i)}\left\{(-2+3i)^2+4\right\} &= 5e^{x(-2+3i)} \\ A\{4-9-12i+4\} &= 5 \\ A\{-1-12i\} &= 5 \\ A = -\frac{5}{1+12i} = -\frac{5(1-12i)}{145} &= \frac{1}{29}(-1+12i)\end{aligned}$$

$$\overline{w}(x) = \frac{1}{29}(-1+12i)e^{-2x}(\cos 3x + i\sin 3x)$$

Perciò una soluzione particolare dell'equazione completa di partenza è:

$$\begin{aligned}\overline{y}(x) &= \mathrm{Re}\,\overline{w}(x) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{29}(-1+12i)e^{-2x}(\cos 3x + i\sin 3x)\right] \\ &= \frac{1}{29}e^{-2x}(-\cos 3x - 12\sin 3x)\end{aligned}$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - \frac{1}{29}e^{-2x}(\cos 3x + 12\sin 3x).$$

3. Curve e integrali di linea
Si consideri la curva piana γ di equazione in forma polare

$$\rho = 2 + \cos\theta \text{ per } \theta \in [0, \pi].$$

a. Calcolare il suo elemento d'arco, semplificando l'espressione ottenuta, stabilire se la curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari sulla curva.
b. Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma y ds.$$

a. Detto $f(\theta) = 2 + \cos\theta$ si ha $f'(\theta) = -\sin\theta$,

$$ds = \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}d\theta = \sqrt{5 + 4\cos\theta}d\theta.$$

La curva è regolare perché $5 + 4\cos\theta > 0$ per ogni θ.
b. Poiché $y = f(\theta)\sin\theta$, si ha:

$$\begin{aligned}\int_\gamma y ds &= \int_0^\pi (2+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{5+4\cos\theta}d\theta \\ &[\cos\theta = t; -\sin\theta d\theta = dt; t \in [1,-1]] \\ &= \int_{-1}^1 \underbrace{(2+t)}_{f}\underbrace{\sqrt{5+4t}}_{g'}dt = \text{(per parti)} \\ &= \left[(2+t)\frac{1}{6}(5+4t)^{3/2}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{6}(5+4t)^{3/2}dt \\ &= \frac{1}{6}\left(3(9)^{3/2} - 1\right) - \frac{1}{6}\left[\frac{2}{5\cdot 4}(5+4t)^{5/2}\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{6}\left(80 - \frac{1}{10}\left(3^5 - 1\right)\right) = \frac{1}{6}\left(80 - \frac{242}{10}\right) = \frac{93}{10}.\end{aligned}$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin\left(x^2-y^3\right)}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &\le \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^4}}\left|\sin\left(x^2-y^3\right)\right| \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2}}\left|\sin\left(x^2-y^3\right)\right| \\ &= \left|\sin\left(x^2-y^3\right)\right| \to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0)\end{aligned}$$

perciò per il teorema del confronto

$$|f(x,y)| \to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0)$$

e f è continua in $(0,0)$.

b.

$$\begin{aligned}&f(x,0) = \frac{x\sin\left(x^2\right)}{\sqrt{x^2}} \sim \frac{x^3}{|x|} = x|x|, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.\\ &f(0,y) = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.\end{aligned}$$

Perciò f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (0,0)$

c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$h(x,y) \equiv \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x\sin\left(x^2-y^3\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^4}} \to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0).$$

Si ha:

$$\begin{aligned}|h(x,y)| &\le \frac{|x|\left|\sin\left(x^2-y^3\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^4}} \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^4}}\cdot\frac{\left|\sin\left(x^2-y^3\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &\le \frac{\left|\sin\left(x^2-y^3\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\left|x^2-y^3\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|y|^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &\le \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} + \frac{|y|^3}{\sqrt{y^2}} = |x| + y^2 \to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0).\end{aligned}$$

Quindi per il teorema del confronto,

$$h(x,y) \to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0)$$

perciò f è differenziabile in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi vincolati

Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{y^4+1}$$

soggetta al vincolo

$$x^4 + y^2 = 16.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Sia $g(x,y) = x^4 + y^2 - 16$, poiché g è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$\nabla g(x,y) = \left(4x^3, 2y\right) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

e $g(0,0) \neq 0$, il vincolo non ha punti critici. Definiamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{y^4+1} - \lambda\left(x^4 + y^2 - 16\right)$$

e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} - 4\lambda x^3 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{8y^3}{(y^4+1)^2} - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\left(x^4 + y^2 - 16\right) = 0 \end{cases}$$

La 1^a equazione dà:

$$-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} - 4\lambda x^3 = -2x\left[\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} + 2\lambda x^2\right] = 0 \text{ per } \begin{cases} x = 0 \text{ oppure} \\ \frac{1}{(x^2+1)^2} + 2\lambda x^2 = 0 \end{cases}$$

Se $x = 0$ la terza equazione dà $y = \pm 4$ (e la seconda dà un certo valore di λ). Se invece $x \neq 0$ e quindi $\lambda = -\frac{1}{2x^2(x^2+1)^2}$, la seconda equazione dà

$$\begin{aligned} \frac{8y^3}{\left(y^4+1\right)^2} - 2\lambda y &= 2y\left[\frac{4y^2}{\left(y^4+1\right)^2} - \lambda\right] \\ &= 2y\left[\frac{4y^2}{\left(y^4+1\right)^2} + \frac{1}{2x^2\left(x^2+1\right)^2}\right] = 0 \text{ se e solo se } y = 0 \end{aligned}$$

(la quantità entro quadre è sempre positiva). Perciò $x \neq 0 \Rightarrow y = 0$, che dalla terza equazione dà $x = \pm 2$.

Perciò i punti stazionari della lagrangiana sono

$$(\pm 2, 0), (0, \pm 4).$$

Poiché il vincolo rappresenta un insieme chiuso e limitato del piano, per il teorema di Weierstrass massimo e minimo assoluto vincolato di f esistono certamente, basta perciò confrontare i valori di f in questi 4 punti. Si ha:

$$\begin{aligned} f(\pm 2, 0) &= \frac{1}{5} - 2 = -\frac{9}{5} \\ f(0, \pm 4) &= 1 - \frac{2}{17} = \frac{15}{17} \end{aligned}$$

pertanto:

$(\pm 2, 0)$ sono punti di minimo assoluti vincolati
$(0, \pm 4)$ sono punti di massimo assoluti vincolati.

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°4

Es.	Punti
1	7
2	6
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y \log y}{2x+1} \\ y(-1) = e^2 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

Equazione a variabili separabili. Soluzione costante dell'equazione è $y = 1$, che non risolve il problema. L'equazione impone $y > 0$ e $x \neq -1/2$. Poiché la condizione iniziale è assegnata in $x = -1$, l'intervallo massimale di soluzione sarà contenuto in $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

Risolviamo:

$$\int \frac{dy}{y \log y} = \int \frac{dx}{2x+1}$$
$$\log |\log y| = \frac{1}{2} \log |2x+1| + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(-1) = e^2$:

$$\log 2 = c$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$\log |\log y| = \frac{1}{2} \log |2x+1| + \log 2$$
$$\log |\log y| = \log \left(2 \cdot |2x+1|^{1/2}\right)$$

che dà

$$|\log y| = 2 \cdot |2x+1|^{1/2} = 2\sqrt{-(2x+1)},$$

avendo già sfruttato la condizione $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

Si avrebbero due soluzioni

$$\pm \log y = 2\sqrt{-(2x+1)}$$
$$y = e^{\pm 2\sqrt{-(2x+1)}}$$

ma solo quella col segno + assume la condizione iniziale, perciò:

$$y = e^{2\sqrt{-(2x+1)}}$$

nell'intervallo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' - 15y = 7xe^{2x}.$$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 15 = 0$$
$$\alpha = 3, \alpha = -5.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-5x}.$$

Cerco una soluzione particolare dell'equazione completa col metodo di somiglianza. Occorre cercare:

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= e^{2x}(Ax + B) \\ \overline{y}'(x) &= e^{2x}(2Ax + 2B + A) \\ \overline{y}''(x) &= e^{2x}(4Ax + 4B + 2A + 2A) \end{aligned}$$

$$e^{2x}\{(4Ax + 4B + 4A) + 2(2Ax + 2B + A) - 15(Ax + B)\} = 7xe^{2x}$$

$$\begin{cases} 4A + 4A - 15A = 7 \\ 4B + 4A + 4B + 2A - 15B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ -7B - 6 = 0, B = -\frac{6}{7} \end{cases}$$

$$\overline{y}(x) = e^{2x}\left(-x - \frac{6}{7}\right)$$

Integrale generale della completa:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-5x} + e^{2x}\left(-x - \frac{6}{7}\right).$$

3. Curve e integrali di linea
Sia γ un arco di curva materiale non omogeneo, rappresentato dalla curva (elica cilindrica)

$$\underline{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, Rt) \text{ per } t \in [0, 4\pi],$$

avente densità lineare

$$\delta(t) = \frac{\mu}{R}(1 + t),$$

dove R, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e di una massa, rispettivamente.

Calcolare l'elemento d'arco ds, la massa totale e la coordinata z_c del baricentro. *Si richiede di riportare con cura impostazione e passaggi.*

$$\begin{aligned}\underline{r}'(t) &= (-R\sin t, R\cos t, R)\\ |\underline{r}'(t)| &= \sqrt{R^2+R^2} = R\sqrt{2}.\\ ds &= R\sqrt{2}dt.\end{aligned}$$

$$m = \int_\gamma \delta(x,y,z)\,ds = \int_0^{4\pi} \frac{\mu}{R}(1+t)\,R\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\mu \int_0^{4\pi} (1+t)\,dt = \sqrt{2}\mu\left(4\pi + 8\pi^2\right).$$

$$\begin{aligned}z_c &= \frac{1}{m}\int_\gamma z\delta(x,y,z)\,ds = \frac{1}{m}\int_0^{4\pi} Rt\frac{\mu}{R}(1+t)\,R\sqrt{2}dt = \frac{1}{m}\sqrt{2}\mu R\int_0^{4\pi}\left(t^2+t\right)dt\\ &= \frac{1}{m}\sqrt{2}\mu R\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_0^{4\pi} = \frac{1}{m}\sqrt{2}\mu R\left(\frac{64}{3}\pi^3 + 8\pi^2\right).\\ z_c &= \frac{\sqrt{2}\mu R\left(\frac{64}{3}\pi^3+8\pi^2\right)}{\sqrt{2}\mu\left(4\pi+8\pi^2\right)} = \frac{\pi R\left(\frac{16}{3}\pi+2\right)}{(2\pi+1)}.\end{aligned}$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|\sin x + 1 - \cos y}{\sqrt[4]{x^4+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0).\end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.

c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &\leq \frac{|x\sin x|}{\sqrt[4]{x^4+y^2}} + \frac{|1-\cos y|}{\sqrt[4]{x^4+y^2}}\\ &\leq \frac{|x\sin x|}{\sqrt[4]{x^4}} + \frac{|1-\cos y|}{\sqrt[4]{y^2}} = |\sin x| + \frac{|1-\cos y|}{\sqrt{|y|}}.\end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned}|\sin x| &\to 0 \text{ per } x \to 0;\\ \frac{|1-\cos y|}{\sqrt{|y|}} &\sim \frac{1}{2}\frac{y^2}{\sqrt{|y|}} = \frac{1}{2}|y|^{3/2} \to 0 \text{ per } y \to 0;\end{aligned}$$

quindi per il teorema del confronto $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, è continua in $(0,0)$.

b.

$$f(x,0) = \frac{|x| \sin x}{\sqrt[4]{x^4}} = \sin x \sim x, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$
$$f(0,y) = \frac{1-\cos y}{\sqrt[4]{y^2}} \sim \frac{1}{2}|y|^{3/2}, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Perciò f è derivabile, con $\nabla f(0,0) = (1,0)$.

c. Sia

$$g(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) = \frac{|t\cos\theta| \sin(t\cos\theta) + 1 - \cos(t\sin\theta)}{\sqrt[4]{t^4\cos^4\theta + t^2\sin^2\theta}}.$$

Se $\sin\theta \neq 0$, per $t \to 0$ è

$$\begin{aligned} g(t) &\sim \frac{|t\cos\theta| \sin(t\cos\theta) + 1 - \cos(t\sin\theta)}{\sqrt[4]{t^2\sin^2\theta}} \\ &= \frac{|t\cos\theta| \sin(t\cos\theta)}{\sqrt[4]{t^2\sin^2\theta}} + \frac{1-\cos(t\sin\theta)}{\sqrt[4]{t^2\sin^2\theta}} \equiv g_1(t) + g_2(t). \end{aligned}$$

Ora,

$$g_1(t) \sim \frac{|t\cos\theta|\, t\cos\theta}{\sqrt{|t\sin\theta|}} = t\sqrt{|t|}\frac{\cos\theta\,|\cos\theta|}{\sqrt{|\sin\theta|}}, g_1'(0) = 0;$$
$$g_2(t) \sim \frac{1}{2}\frac{t^2\sin^2\theta}{\sqrt{|t\sin\theta|}} = \frac{1}{2}|t\sin\theta|^{3/2}, g_1'(0) = 0$$

perciò

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = 0.$$

Se poi $\sin\theta = 0$ si ha

$$g(t) = \frac{|t\cos\theta| \sin(t\cos\theta)}{\sqrt[4]{t^4\cos^4\theta}} = \sin(t\cos\theta) \sim t\cos\theta$$

quindi

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = \cos\theta.$$

Perciò

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = \begin{cases} 0 \text{ se } \sin\theta \neq 0 \\ \cos\theta \text{ se } \sin\theta = 0 \end{cases}.$$

D'altro canto

$$\nabla f(0,0) \cdot \underline{v} = (1,0)\cdot(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \neq D_{\underline{v}} f(0,0) \text{ per } \sin\theta\cos\theta \neq 0,$$

perciò *non vale* la formula del gradiente. (In particolare, certamente f non è differenziabile in $(0,0)$).

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\left(1+x^2-4y^2\right).$$

$$\begin{cases} f_x = 2x\left(1+x^2-4y^2\right)+2x\left(x^2+y^2\right) = 2x\left(1+2x^2-3y^2\right) = 0 \\ f_y = 2y\left(1+x^2-4y^2\right)-8y\left(x^2+y^2\right) = 2y\left(1-3x^2-8y^2\right) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà $x=0$ o $x^2 = \frac{3y^2-1}{2}$.

Se $x=0$ la seconda equazione dà $2y\left(1-8y^2\right)=0$, quindi $y=0$ o $y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Se $x^2 = \frac{3y^2-1}{2}$ la seconda equazione dà

$$\begin{aligned} 2y\left(1-3\left(\frac{3y^2-1}{2}\right)-8y^2\right) &= 0 \\ 2y\left(\frac{5}{2}-\frac{25y^2}{2}\right) &= 0 \\ y=0 \text{ o } y &= \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

che sostituiti nella $x^2 = \frac{3y^2-1}{2}$ danno rispettivamente $x^2 = -\frac{1}{2}$, impossibile, e $x^2 = \frac{\frac{3}{5}-1}{2}$, impossibile.

Punti stazionari:

$$(0,0), \left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{cases} f_x = 2\left(x+2x^3-3xy^2\right) \\ f_y = 2\left(y-3x^2y-8y^3\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\left(1+6x^2-3y^2\right) \\ f_{xy} &= 2\left(-6xy\right) \\ f_{yy} &= 2\left(1-3x^2-24y^2\right) \end{aligned}$$

$$Hf(x,y) = 2\begin{bmatrix} 1+6x^2-3y^2 & -6xy \\ -6xy & 1-3x^2-24y^2 \end{bmatrix}.$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf(0,0) = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ definita positiva,}$$

$$(0,0) \text{ è punto di minimo relativo.}$$

$$Hf\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 2\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ indefinita,}$$

$$\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \text{ punti di sella.}$$