Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x \log x} = 2x \\ y\left(\sqrt{e}\right) = 1 \end{cases}$$

e determinare a priori l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$4y'' - 12y' + 9y = 13 \cos x.$$

3. Curve e integrali di linea
Sia γ la curva piana espressa in forma polare da:

$$\rho = R\, e^{\omega\theta} \text{ per } \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

con R, ω costanti positive.
a. Calcolare l'elemento d'arco ds e scrivere le equazioni parametriche della curva.
b. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva.
c. Calcolare il centroide di γ.
Riportare chiaramente impostazione e calcoli, e semplificare le espressioni trovate.

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\left(x^2 - y^3\right)^2}{x^2 + y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione **(limitandosi all'intervallo $y \in [0, 2\pi)$)**, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2 - 9\right) \cos y + 3x.$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\log x}{y} \\ y\left(e^2\right) = \sqrt{2}e \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$5y'' - 9y' - 2y = 4e^{2x}.$$

3. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\,|y|\left(x^2 - y^3\right)^2}{x^4\,|x| + y^4\,|y|} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

4. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione **(limitandosi all'intervallo $x \in (0, \pi)$)**, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = \left(y^2 - 4\right) \sin x + \frac{y^3}{6}.$$

5. Funzione implicita
Dimostrare che l'equazione

$$f(x, y) = \sin\left(xy^2\right) - 2e^{-(y-1)^2} x + 3 \log y = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h(y)$ in un intorno di $y_0 = 1$. Calcolare quindi $h'(1)$, semplificando l'espressione ottenuta.

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Tema n°3

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + (5x+2)\, y = 4xe^{-2x} \\ y(0) = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

determinando, prima di risolvere il problema, l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4y' + 20y = 10x^2 + 11x.$$

3. Curve e integrali di linea
Si consideri la curva piana γ di equazione

$$\underline{r}(t) = \left(R\cos^3 t, R\sin^3 t\right) \text{ per } t \in [0, \pi].$$

a. Calcolare il suo elemento d'arco, semplificando l'espressione ottenuta, stabilire se la curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari sulla curva.
b. Calcolare la lunghezza di γ e il suo centroide.

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xe^{-x}(1+y)\log^2\left(1+x^2+y^2\right)}{x^4+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.

c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione **(limitandosi all'intervallo** $x \in [0, 2\pi)$**)**, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = (y+4)\sin^2 x + \frac{y^2}{8}.$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Tema n°4

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y}\sin x \\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$2y'' + 3y' - 5y = 2e^{-x}\sin(2x).$$

Per la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa è richiesto il metodo dell'esponenziale complesso.

3. Curve e integrali di linea
Sia γ l'arco di curva in $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$\underline{r}(t) = (5\cos t, 4\sin t, 3t) \text{ per } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Calcolare l'elemento d'arco ds e l'integrale di linea

$$\int_\gamma x\,ds.$$

Si richiede di riportare con cura impostazione e passaggi e semplificare il risultato ottenuto.

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\left(x^2-y^4\right)(x+y)}{x^2+|y|^3} & \text{per } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi vincolati
Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y)=x^2y^3$$

soggetta al vincolo

$$x^4+y^4=9.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	6
2	6
3	7
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x \log x} = 2x \\ y\left(\sqrt{e}\right) = 1 \end{cases}$$

e determinare a priori l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui per $x > 0, x \neq 1$, poiché la condizione iniziale è assegnata in $x = \sqrt{e} > 1$ la soluzione del problema sarà definita in $(1, +\infty)$.

$a(x) = \frac{1}{x \log x}$

$A(x) = \int \frac{dx}{x \log x} = \log |\log x| = \log(\log x)$ in $(1, +\infty)$.

Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\log(\log x)} \left\{ c + \int e^{\log(\log x)} 2x dx \right\} \\ &= \frac{1}{\log x} \left\{ c + 2 \int x \log x dx \right\}. \end{aligned}$$

$$\int x \log x dx = (...) = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}.$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\log x} \left\{ c + 2\left(\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right) \right\} \\ &= \frac{c}{\log x} + x^2 \left(1 - \frac{1}{2 \log x} \right). \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y\left(\sqrt{e}\right) = 1$ e abbiamo

$$\begin{aligned} 1 &= 2c + 0 \\ c &= \frac{1}{2} \\ y(x) &= \frac{1}{2 \log x} + x^2 \left(1 - \frac{1}{2 \log x} \right) \text{ per } x \in (1, +\infty). \end{aligned}$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$4y'' - 12y' + 9y = 13\cos x.$$

$$4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 0$$
$$(2\alpha - 3)^2 = 0, \alpha = \frac{3}{2}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{\frac{3}{2}x}(c_1 x + c_2).$$

Metodo di somiglianza, cerchiamo:

$$\overline{y}(x) = a\cos x + b\sin x$$
$$\overline{y}'(x) = -a\sin x + b\cos x$$
$$\overline{y}''(x) = -a\cos x - b\sin x$$

$$4(-a\cos x - b\sin x) - 12(-a\sin x + b\cos x) + 9(a\cos x + b\sin x) = 13\cos x$$
$$\cos x(-4a - 12b + 9a) + \sin x(-4b + 12a + 9b) = 13\cos x$$

$$\begin{cases} 5a - 12b = 13 \\ 12a + 5b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{5}{13} \\ b = -\frac{12}{13} \end{cases}$$

Soluzione particolare dell'equazione completa:

$$\overline{y}(x) = \frac{5}{13}\cos x - \frac{12}{13}\sin x.$$

Integrale generale dell'equazione completa:

$$y(x) = e^{\frac{3}{2}x}(c_1 x + c_2) + \frac{1}{13}(5\cos x - 12\sin x).$$

3. Curve e integrali di linea
Sia γ la curva piana espressa in forma polare da:

$$\rho = R\, e^{\omega\theta} \text{ per } \theta \in [0, 2\pi],$$

con R, ω costanti positive.

a. Calcolare l'elemento d'arco ds e scrivere le equazioni parametriche della curva.

b. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva.

c. Calcolare il centroide di γ.

a.

$$\rho' = R\,\omega e^{\omega\theta}$$

$$ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\theta = R\,e^{\omega\theta}\sqrt{1+\omega^2}d\theta.$$

Equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R\,e^{\omega\theta}\cos\theta \\ y = R\,e^{\omega\theta}\sin\theta \end{cases} \quad \text{per } \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

b. Lunghezza:

$$l(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_0^{2\pi} R\,e^{\omega\theta}\sqrt{1+\omega^2}d\theta = R\sqrt{1+\omega^2}\int_0^{2\pi} e^{\omega\theta}d\theta$$

$$= R\sqrt{1+\omega^2}\left[\frac{e^{\omega\theta}}{\omega}\right]_0^{2\pi} = R\sqrt{1+\omega^2}\left(\frac{e^{2\omega\pi}-1}{\omega}\right).$$

c. Centroide:

$$x_C = \frac{1}{l(\gamma)}\int_\gamma x ds = \frac{\omega}{R\sqrt{1+\omega^2}\,(e^{2\omega\pi}-1)}\int_0^{2\pi} R\,e^{\omega\theta}\cos\theta R\,e^{\omega\theta}\sqrt{1+\omega^2}d\theta$$

$$= \frac{R\omega}{(e^{2\omega\pi}-1)}\int_0^{2\pi} e^{2\omega\theta}\cos\theta d\theta.$$

$$y_C = \frac{1}{l(\gamma)}\int_\gamma y ds = \frac{\omega}{R\sqrt{1+\omega^2}\,(e^{2\omega\pi}-1)}\int_0^{2\pi} R\,e^{\omega\theta}\sin\theta R\,e^{\omega\theta}\sqrt{1+\omega^2}d\theta$$

$$= \frac{R\omega}{(e^{2\omega\pi}-1)}\int_0^{2\pi} e^{2\omega\theta}\sin\theta d\theta.$$

Per calcolare entrambi gli integrali, calcoliamo

$$\int_0^{2\pi} e^{2\omega\theta}e^{i\theta}d\theta = \left[\frac{e^{\theta(2\omega+i)}}{(2\omega+i)}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{4\pi\omega}-1}{(2\omega+i)}$$

$$= \left(e^{4\pi\omega}-1\right)\cdot\frac{2\omega-i}{4\omega^2+1}.$$

Quindi

$$x_C = \frac{R\omega}{(e^{2\omega\pi}-1)}\cdot \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} e^{2\omega\theta}e^{i\theta}d\theta\right)$$

$$= \frac{R\omega}{(e^{2\omega\pi}-1)}\left(e^{4\pi\omega}-1\right)\frac{2\omega}{4\omega^2+1} = \frac{2\omega^2}{4\omega^2+1}\left(e^{2\omega\pi}+1\right)R.$$

$$y_C = \frac{R\omega}{(e^{2\omega\pi}-1)}\cdot \mathrm{Im}\left(\int_0^{2\pi} e^{2\omega\theta}e^{i\theta}d\theta\right)$$

$$= \frac{R\omega}{(e^{2\omega\pi}-1)}\left(e^{4\pi\omega}-1\right)\frac{(-1)}{4\omega^2+1} = -\frac{\omega}{4\omega^2+1}\left(e^{2\omega\pi}+1\right)R.$$

Centroide:

$$\left(\frac{2\omega^2}{4\omega^2+1}\left(e^{2\omega\pi}+1\right)R, -\frac{\omega}{4\omega^2+1}\left(e^{2\omega\pi}+1\right)R\right).$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(x^2-y^3\right)^2}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &= \frac{\left|x^4-2x^2y^3+y^6\right|}{x^2+y^4}\leq\frac{x^4}{x^2+y^4}+\frac{2x^2|y|^3}{x^2+y^4}+\frac{y^6}{x^2+y^4}\\ &\leq\frac{x^4}{x^2}+\frac{2x^2|y|^3}{x^2}+\frac{y^6}{y^4}=x^2+2|y|^3+y^2\to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0).\end{aligned}$$

Per il criterio del confronto, $f(x,y)\to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$, perciò f è continua in $(0,0)$.

b.

$$f(x,0)=\frac{\left(x^2\right)^2}{x^2}=x^2, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0.$$
$$f(0,y)=\frac{\left(-y^3\right)^2}{y^4}=y^2, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Perciò f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

c. Verifichiamo se f è differenziabile in $(0,0)$. Essendo $f(0,0)=0$ e $\nabla f(0,0)=(0,0)$ questo è equivalente al fatto che

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0).$$

$$\begin{aligned}\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{\left|x^4-2x^2y^3+y^6\right|}{\left(x^2+y^4\right)\sqrt{x^2+y^2}}\\ &\leq\frac{x^4}{\left(x^2+y^4\right)\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{2x^2|y|^3}{\left(x^2+y^4\right)\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^6}{\left(x^2+y^4\right)\sqrt{x^2+y^2}}\\ &\leq\frac{x^4}{x^2\sqrt{x^2}}+\frac{2x^2|y|^3}{x^2\sqrt{y^2}}+\frac{y^6}{y^4\sqrt{y^2}}=|x|+2y^2+|y|\to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0).\end{aligned}$$

Per il criterio del confronto, $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, perciò f è differenziabile in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione **(limitandosi all'intervallo** $y \in [0, 2\pi)$**)**, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2 - 9\right)\cos y + 3x.$$

$$\begin{cases} f_x = 2x\cos y + 3 = 0 \\ f_y = -\left(x^2-9\right)\sin y = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione dà (per $y \in [0, 2\pi)$)

$$x = \pm 3 \text{ oppure } y = 0, y = \pi.$$

Se $x = \pm 3$ la prima equazione dà

$$\begin{aligned} \pm 6\cos y + 3 &= 0 \\ \cos y &= \mp\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi si trovano i punti stazionari:

$$\left(3, \frac{2}{3}\pi\right), \left(3, \frac{4}{3}\pi\right), \left(-3, \frac{\pi}{3}\right), \left(-3, \frac{5}{3}\pi\right).$$

Se invece $y = 0$ la prima equazione dà

$$2x + 3 = 0, x = -\frac{3}{2}$$

Se $y = \pi$ la prima equazione dà

$$-2x + 3 = 0, x = \frac{3}{2}.$$

Quindi si trovano gli ulteriori punti stazionari

$$\left(-\frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, \pi\right).$$

In definitiva i punti stazionari di cui è richiesto lo studio (in quanto $y \in [0, 2\pi)$) sono:

$$\left(3, \frac{2}{3}\pi\right), \left(3, \frac{4}{3}\pi\right), \left(-3, \frac{\pi}{3}\right), \left(-3, \frac{5}{3}\pi\right), \left(-\frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, \pi\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\cos y \\ f_{xy} &= -2x\sin y \\ f_{yy} &= -\left(x^2-9\right)\cos y \end{aligned}$$

$$Hf\left(x,y\right)=\begin{bmatrix} 2\cos y & -2x\sin y \\ -2x\sin y & -\left(x^2-9\right)\cos y \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf\left(3,\frac{2}{3}\pi\right)=\begin{bmatrix} -1 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella.}$$
$$Hf\left(3,\frac{4}{3}\pi\right)=\begin{bmatrix} -1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella.}$$

$$Hf\left(-3,\frac{\pi}{3}\right)=\begin{bmatrix} 1 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella.}$$
$$Hf\left(-3,\frac{5}{3}\pi\right)=\begin{bmatrix} 1 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella.}$$

$$Hf\left(-\frac{3}{2},0\right)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9-\frac{9}{4} \end{bmatrix} \text{ definita positiva, punto di minimo}$$
$$Hf\left(\frac{3}{2},\pi\right)=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{9}{4}-9 \end{bmatrix} \text{ definita negativa, punto di massimo}$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	7
2	6
3	7
4	7
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\log x}{y} \\ y\left(e^2\right) = \sqrt{2}e \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

Equazione a variabili separabili, il secondo membro ha senso per $x > 0$ (e $y \neq 0$) la condizione iniziale è assegnata in e^2, quindi x deve variare al più nell'intervallo $(0, +\infty)$ (cioè: l'intervallo più ampio su cui sarà definita la soluzione sarà $(0, +\infty)$ o contenuto in questo).

Non ci sono soluzioni costanti dell'equazione. Risolviamo:

$$\int y dy = \int \log x dx$$
$$\frac{y^2}{2} = x(\log x - 1) + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y\left(e^2\right) = \sqrt{2}e$:

$$e^2 = e^2 + c,$$
$$c = 0$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$\frac{y^2}{2} = x(\log x - 1)$$
$$y = \pm\sqrt{2x(\log x - 1)}$$

Ma poiché $y\left(e^2\right) = e$ dobbiamo scegliere il segno positivo,

$$y = \sqrt{2x(\log x - 1)}$$

che risulta ben definita e continua per $x \geq e$, ma derivabile per $x > e$. Questo è l'intervallo massimale su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$5y'' - 9y' - 2y = 4e^{2x}.$$

$$\begin{aligned} & 5\alpha^2 - 9\alpha - 2 = 0 \\ & \alpha = \frac{9 \pm \sqrt{81+40}}{10} = \frac{9 \pm 11}{10} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{x}{5}}.$$

Soluzione particolare dell'equazione completa. Osservo che il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea. Perciò in base al metodo di somiglianza, cerco

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= ae^{2x}x \\ \overline{y}'(x) &= ae^{2x}(2x+1) \\ \overline{y}''(x) &= ae^{2x}(4x+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ae^{2x}\{5(4x+4) - 9(2x+1) - 2x\} = 4e^{2x} \\ & 11a = 4, a = \frac{4}{11}. \end{aligned}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa è allora

$$\overline{y}(x) = \frac{4}{11}e^{2x}x$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = \frac{4}{11}e^{2x}x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{x}{5}}.$$

3. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y|y|\left(x^2 - y^3\right)^2}{x^4|x| + y^4|y|} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.

c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}}f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$
\begin{aligned}
|f(x,y)| &= \frac{y^2\left(x^2-y^3\right)^2}{x^4|x|+y^4|y|} \leq \frac{y^2\left(x^4+2x^2|y|^3+y^6\right)}{x^4|x|+y^4|y|} \\
&= \frac{x^4y^2}{x^4|x|+y^4|y|}+\frac{2x^2|y|^5}{x^4|x|+y^4|y|}+\frac{y^8}{x^4|x|+y^4|y|} \equiv f_1+f_2+f_3.
\end{aligned}
$$

Le funzioni f_1, f_2, f_3 sono continue fuori dall'origine e positivamente omogenee di grado, rispettivamente, $1,2,3$, perciò tendono a zero per $(x,y)\to(0,0)$. Quindi per il teorema del confronto $f(x,y)\to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$, e f è continua in $(0,0)$.

b.

$$
\begin{aligned}
f(x,0) &= 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0 \\
f(0,y) &= \frac{y^7|y|}{y^4|y|}=y^3, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.
\end{aligned}
$$

Perciò f è derivabile, con $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

c. Sia

$$
\begin{aligned}
g(t) = f(t\cos\theta,t\sin\theta) &= \frac{t|t|\sin\theta|\sin\theta|\left(t^2\cos^2\theta-t^3\sin^3\theta\right)^2}{t^4|t|\left(\cos^4\theta|\cos\theta|+\sin^4\theta|\sin\theta|\right)} \\
&= \frac{\sin\theta|\sin\theta|\left(t^2\cos^2\theta-t^3\sin^3\theta\right)^2}{t^3\left(\cos^4\theta|\cos\theta|+\sin^4\theta|\sin\theta|\right)}.
\end{aligned}
$$

Per $t\to 0$,

$$
\left(t^2\cos^2\theta-t^3\sin^3\theta\right)\sim t^2\cos^2\theta \text{ purché } \cos\theta\neq 0.
$$

In questo caso ($\cos\theta\neq 0$),

$$
g(t)=\frac{\sin\theta|\sin\theta|\left(t^2\cos^2\theta\right)^2}{t^3\left(\cos^4\theta|\cos\theta|+\sin^4\theta|\sin\theta|\right)}=t\frac{\sin\theta|\sin\theta|\cos^4\theta}{\cos^4\theta|\cos\theta|+\sin^4\theta|\sin\theta|}
$$

quindi

$$
D_{\underline{v}}f(0,0)=g'(0)=\frac{\sin\theta|\sin\theta|\cos^4\theta}{\cos^4\theta|\cos\theta|+\sin^4\theta|\sin\theta|}.
$$

Se $\cos\theta=0$, per $t\to 0$

$$
g(t)=\frac{t^6\sin^7\theta|\sin\theta|}{t^3\left(\sin^4\theta|\sin\theta|\right)}=t^3\sin^3\theta.
$$

quindi

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = 0.$$

D'altro canto

$$\nabla f(0,0) \cdot \underline{v} = (0,0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = 0 \text{ per ogni } \theta,$$

perciò *non vale* la formula del gradiente. (In particolare, certamente f non è differenziabile in $(0,0)$).

4. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione **(limitandosi all'intervallo $x \in (0,\pi)$)**, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(y^2 - 4\right)\sin x + \frac{y^3}{6}.$$

$$\begin{cases} f_x = \left(y^2 - 4\right)\cos x = 0 \\ f_y = 2y\sin x + \frac{y^2}{2} = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà (per $x \in [0, 2\pi)$)

$$y = \pm 2 \text{ oppure } x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi.$$

Se $y = \pm 2$ la seconda equazione dà

$$\pm 4\sin x + 2 = 0$$
$$\sin x = \mp\frac{1}{2}.$$

Quindi si trovano i punti stazionari:

$$\left(\frac{7}{6}\pi, 2\right), \left(\frac{11}{6}\pi, 2\right), \left(\frac{\pi}{6}, -2\right), \left(\frac{5}{6}\pi, -2\right).$$

Se invece $x = \frac{\pi}{2}$ la seconda equazione dà

$$2y + \frac{y^2}{2} = 0, y = 0 \text{ o } y = -4$$

Se $x = \frac{3}{2}\pi$ la seconda equazione dà

$$-2y + \frac{y^2}{2} = 0, y = 0 \text{ o } y = 4.$$

Quindi si trovano gli ulteriori punti stazionari

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, -4\right) \left(\frac{3}{2}\pi, 0\right), \left(\frac{3}{2}\pi, 4\right)$$

In definitiva i punti stazionari di cui è richiesto lo studio (in quanto $x \in (0, \pi)$) sono:

$$\left(\frac{\pi}{6}, -2\right), \left(\frac{5}{6}\pi, -2\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, -4\right)$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -\left(y^2 - 4\right) \sin x \\ f_{xy} &= 2y \cos x \\ f_{yy} &= 2 \sin x + y \end{aligned}$$

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} -\left(y^2 - 4\right) \sin x & 2y \cos x \\ 2y \cos x & 2 \sin x + y \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf\left(\frac{\pi}{6}, -2\right) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella.}$$

$$Hf\left(\frac{5}{6}\pi, -2\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella.}$$

$$Hf\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ definita positiva, punto di minimo}$$

$$Hf\left(\frac{\pi}{2}, -4\right) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ definita negativa, punto di massimo}$$

5. Funzione implicita

Dimostrare che l'equazione

$$f(x, y) = \sin\left(xy^2\right) - 2e^{-(y-1)^2} x + 3 \log y = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h(y)$ in un intorno di $y_0 = 1$. Calcolare quindi $h'(1)$, semplificando l'espressione ottenuta.

La funzione è $C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$.

$$f(0, 1) = \sin x - 2x = 0 \text{ per } x = 0.$$

Quindi $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y^2 \cos\left(xy^2\right) - 2e^{-(y-1)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) &= 1 - 2 = -1 \neq 0. \end{aligned}$$

Poiché $f \in C^1(\mathbb{R} \times (0,+\infty))$, $f(0,1) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $x = h(y)$, C^1, in un intorno di $y_0 = 1$. Si ha:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2yx\cos\left(xy^2\right) + 4(y-1)e^{-(y-1)^2}x + \frac{3}{y} \\
&\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 3 \\
&\quad h'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)} = -\frac{3}{-1} = 3.
\end{aligned}
$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°3

Es.	Punti
1	7
2	6
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + (5x+2)\,y = 4xe^{-2x} \\ y(0) = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

determinando, prima di risolvere il problema, l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui in tutto $\mathbb{R}$, perciò la soluzione del problema sarà definita in tutto $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a(x) &= 5x+2 \\ A(x) &= \int (5x+2)\,dx = \frac{5}{2}x^2 + 2x. \end{aligned}$$

Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-A(x)}\left\{c + \int e^{A(x)} 4xe^{-2x} dx\right\} \\ &= e^{-\left(\frac{5}{2}x^2+2x\right)}\left\{c + \int e^{\frac{5}{2}x^2+2x} 4xe^{-2x} dx\right\} \\ &= e^{-\left(\frac{5}{2}x^2+2x\right)}\left\{c + 4\int e^{\frac{5}{2}x^2} x dx\right\} \\ &= e^{-\left(\frac{5}{2}x^2+2x\right)}\left\{c + \frac{4}{5}e^{\frac{5}{2}x^2}\right\} = ce^{-\left(\frac{5}{2}x^2+2x\right)} + \frac{4}{5}e^{-2x}. \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = -\frac{6}{5}$ e abbiamo

$$\begin{aligned} -\frac{6}{5} &= c + \frac{4}{5} \\ c &= -2 \\ y(x) &= -2e^{-\left(\frac{5}{2}x^2+2x\right)} + \frac{4}{5}e^{-2x} \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4y' + 20y = 10x^2 + 11x.$$

$$\begin{aligned} &\alpha^2 - 4\alpha + 20 = 0 \\ &\alpha = 2 \pm 4i. \end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{2x}\left(c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)\right).$$

Metodo di somiglianza. Cerchiamo una soluzione particolare del tipo:

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= ax^2 + bx + c, \\ \overline{y}'(x) &= 2ax + b \\ \overline{y}''(x) &= 2a. \end{aligned}$$

$$2a - 4(2ax + b) + 20\left(ax^2 + bx + c\right) = 10x^2 + 11x.$$

$$\begin{cases} 20a = 10 \\ -8a + 20b = 11 \\ 2a - 4b + 20c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ 20b = 15, b = \frac{3}{4} \\ 1 - 3 + 20c = 0, c = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Quindi una soluzione particolare dell'eqauzione completa è:

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{10}$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{10} + e^{2x}\left(c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)\right).$$

3. Curve e integrali di linea
Si consideri la curva piana γ di equazione

$$\underline{r}(t) = \left(R\cos^3 t, R\sin^3 t\right) \text{ per } t \in [0, \pi].$$

a. Calcolare il suo elemento d'arco, semplificando l'espressione ottenuta, stabilire se la curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari sulla curva.
b. Calcolare la lunghezza di γ e il suo centroide.

a.

$$\begin{aligned} \underline{r}'(t) &= \left(-3R\cos^2 t \sin t, 3R\sin^2 t \cos t\right) = 3R \sin t \cos t\,(-\cos t, \sin t). \\ |\underline{r}'(t)| &= 3R\,|\sin t \cos t| = 3R \sin t\,|\cos t| \text{ per } t \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

La curva è regolare purché $\sin t \cos t \neq 0$, quindi per $t \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$. I punti singolari della curva sono:

$$(R,0),(0,R),(-R,0).$$

b.

$$l(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_0^\pi 3R \sin t |\cos t| \, dt = 6R \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = 6R \left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 3R.$$

Il centroide ha coordinate

$$x_C = \frac{1}{l(\gamma)} \int_\gamma x ds = \frac{1}{l(\gamma)} \int_0^\pi R \cos^3 t 3R \sin t |\cos t| \, dt = 0 \text{ per simmetria.}$$

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{1}{l(\gamma)} \int_\gamma y ds = \frac{1}{3R} \int_0^\pi R \sin^3 t 3R \sin t |\cos t| \, dt \\ &= 2R \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt = 2R \left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{5} R. \end{aligned}$$

Il centroide è $C \equiv \left(0, \frac{2}{5}R\right)$.

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x e^{-x} (1+y) \log^2 \left(1+x^2+y^2\right)}{x^4+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.

c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Notiamo che, dal grafico di $\log(1+t)$ per $t \geq 0$ leggiamo:

$$0 < \log\left(1+x^2+y^2\right) \leq x^2+y^2$$

quindi

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x| e^{-x} (1+|y|) \left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^4} = e^{-x} (1+|y|) \cdot \frac{|x| \left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^4}$$

dove:

$$g(x,y) = \frac{|x| \left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^4}$$

è positivamente omogenea di grado 1 e continua fuori dall'origine, quindi $g(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, mentre $e^{-x}(1+|y|)$ è una funzione continua. Perciò per il teorema del confronto

$$f(x,y) \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0),$$

ed f è continua.

b.

$$\begin{aligned} f(x,0) &= \frac{xe^{-x}\log^2\left(1+x^2\right)}{x^4} \sim \frac{x^5}{x^4} = x, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \\ f(0,y) &= 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Perciò f è derivabile, con $\nabla f(0,0) = (1,0)$.

c. Sia

$$\begin{aligned} g(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) &= \frac{t\cos\theta e^{-t\cos\theta}(1+t\sin\theta)\log^2\left(1+t^2\right)}{t^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)} \\ &\sim \frac{t\cos\theta\cdot t^4}{t^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)} = t\cdot\frac{\cos\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta} \end{aligned}$$

(per $\cos\theta \neq 0$). Quindi

$$D_{\underline{v}}f(0,0) = g'(0) = \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta} \text{ se } \cos\theta \neq 0.$$

Se poi $\cos\theta = 0$ si ha

$$g(t) = 0$$

quindi

$$D_{\underline{v}}f(0,0) = g'(0) = 0$$

Perciò in ogni caso è vero che

$$D_{\underline{v}}f(0,0) = \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}.$$

D'altro canto

$$\nabla f(0,0)\cdot\underline{v} = (1,0)\cdot(\cos\theta,\sin\theta) = \cos\theta \neq D_{\underline{v}}f(0,0)$$

(le due espressioni non sono identicamente uguali) perciò *non vale* la formula del gradiente. (In particolare, certamente f non è differenziabile in $(0,0)$).

5. Massimi e minimi liberi

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione **(limitandosi all'intervallo $x \in [0,2\pi)$)**, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = (y+4)\sin^2 x + \frac{y^2}{8}.$$

$$\begin{cases} f_x = (y+4)\, 2\sin x \cos x = (y+4)\sin 2x = 0 \\ f_y = \sin^2 x + \frac{y}{4} = 0 \end{cases}$$

La prima equazione dà (per $x \in [0, 2\pi)$)

$$y = -4 \text{ oppure } x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi.$$

Se $y = -4$ la seconda equazione dà

$$\sin^2 x = 1$$
$$x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi.$$

Quindi si trovano i punti stazionari:

$$\left(\frac{\pi}{2}, -4\right), \left(\frac{3}{2}\pi, -4\right).$$

Se $x = 0, x = \pi$ la seconda equazione dà

$$y = 0.$$

Quindi si trovano gli ulteriori punti stazionari

$$(0,0), (\pi, 0).$$

Se $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi$ la seconda equazione dà

$$1 + \frac{y}{4} = 0, \ y = -4$$

(che dà due punti già trovati).

In definitiva i punti stazionari di cui è richiesto lo studio (in quanto $x \in [0, 2\pi)$) sono:

$$\left(\frac{\pi}{2}, -4\right), \left(\frac{3}{2}\pi, -4\right), (0,0), (\pi, 0).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{cases} f_x = (y+4)\, 2\sin x \cos x = (y+4)\sin 2x = 0 \\ f_y = \sin^2 x + \frac{y}{4} = 0 \end{cases}$$

$$f_{xx} = 2(\cos 2x)(y+4)$$
$$f_{xy} = \sin 2x$$
$$f_{yy} = 2\sin x \cos x + \frac{1}{4} = \sin 2x + \frac{1}{4}$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2(\cos 2x)(y+4) & \sin 2x \\ \sin 2x & \sin 2x + \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$Hf\left(\frac{\pi}{2},-4\right)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix} \text{ caso dubbio.}$$
$$Hf\left(\frac{3}{2}\pi,-4\right)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix} \text{ caso dubbio.}$$

$$Hf\left(0,0\right)=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix} \text{ definita positiva, punto di minimo}$$
$$Hf\left(\pi,0\right)=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix} \text{ definita positiva, punto di minimo}$$

Studiamo i casi dubbi.

$$f\left(x,y\right)=\left(y+4\right)\sin^2 x+\frac{y^2}{8}.$$
$$f\left(\frac{\pi}{2},-4\right)=2$$
$$f\left(\frac{\pi}{2},-4+h\right)=h+\frac{\left(-4+h\right)^2}{8}$$

cambia segno per h in un intorno di 0, punto di sella.

$$f\left(\frac{3}{2}\pi,-4\right)=2$$
$$f\left(\frac{3}{2}\pi,-4+h\right)=h+\frac{\left(-4+h\right)^2}{8},$$

stesso comportamento, punto di sella.

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°4

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y}\sin x \\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

Equazione a variabili separabili. Soluzione costante dell'equazione è $y = 0$, che non risolve il problema. Il secondo membro dell'equazione ha senso per ogni x (e ogni y).

Risolviamo:

$$\int \frac{dy}{3\sqrt[3]{y}} = \int \sin x dx$$
$$\frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}} = -\cos x + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$:

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + c, c = 1$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$\frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}} = 1 - \cos x$$

e tenendo conto che in un intorno di $x = \frac{\pi}{3}$ la $y(x)$ dev'essere negativa, si ha:

$$y = -\left[2\left(1-\cos x\right)\right]^{\frac{3}{2}}$$

per $x \in \mathbb{R}$ (l'esponente $3/2 > 1$ rende derivabile la funzione anche quando $(1 - \cos x) = 0$).

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$2y'' + 3y' - 5y = 2e^{-x} \sin (2x) .$$

Per la ricerca di una soluzione particolare della completa è richiesto il metodo dell'esponenziale complesso.

$$\begin{aligned}
&2\alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0 \\
&(a-1)(2\alpha+5) = 0 \\
&\alpha = 1, \alpha = -\frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{5}{2}x}.$$

Osservando che

$$2e^{-x} \sin (2x) = \mathrm{Im}\left(2e^{x(-1+2i)}\right),$$

cerco prima una soluzione particolare dell'equazione

$$2w'' + 3w' - 5w = 2e^{x(-1+2i)},$$

col metodo di somiglianza:

$$\begin{aligned}
\overline{w}(x) &= Ae^{x(-1+2i)} \\
\overline{w}'(x) &= A(-1+2i)\, e^{x(-1+2i)} \\
\overline{w}''(x) &= A(-1+2i)^2\, e^{x(-1+2i)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ae^{x(-1+2i)}\left\{2(-1+2i)^2 + 3(-1+2i) - 5\right\} &= 2e^{x(-1+2i)} \\
A\{2(-3-4i) - 3 + 6i - 5\} &= 2 \\
A(-14-2i) &= 2 \\
A &= \frac{1}{-7-i} = \frac{-7+i}{50}
\end{aligned}$$

$$\overline{w}(x) = \frac{-7+i}{50} e^{x(-1+2i)} = \frac{e^{-x}}{50}(-7+i)(\cos 2x + i \sin 2x).$$

Una soluzione particolare dell'equazione di partenza è allora

$$\overline{y}(x) = \mathrm{Im}(\overline{w}(x)) = \frac{e^{-x}}{50}(-7\sin 2x + \cos 2x).$$

Integrale generale della completa:

$$y(x) = \frac{e^{-x}}{50}(-7\sin 2x + \cos 2x) + c_1 e^{x} + c_2 e^{-\frac{5}{2}x}.$$

3. Curve e integrali di linea
Sia γ l'arco di curva in $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$\underline{r}(t) = (5\cos t, 4\sin t, 3t) \text{ per } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Calcolare l'elemento d'arco ds e l'integrale di linea

$$\int_\gamma x ds.$$

Si richiede di riportare con cura impostazione e passaggi e semplificare il risultato ottenuto.

$$\begin{aligned}
\underline{r}'(t) &= (-5\sin t, 4\cos t, 3) \\
|\underline{r}'(t)| &= \sqrt{25\sin^2 t + 16\cos^2 t + 9}. \\
ds &= \sqrt{25\sin^2 t + 16\cos^2 t + 9}dt.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma x ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos t\sqrt{25\sin^2 t + 16\left(1-\sin^2 t\right) + 9}dt \\
&= 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sqrt{9\sin^2 t + 25}dt \\
\sin t = u & \\
&= 5\int_0^1 \sqrt{9u^2 + 25}dt = 15\int_0^1 \sqrt{u^2 + \frac{25}{9}}dt \\
&\left[u = \frac{5}{3}\operatorname{Sh} v; du = \frac{5}{3}\operatorname{Ch} v dv\right] \\
&= 15\int_0^{\operatorname{SettSh}\frac{3}{5}} \frac{5}{3}\operatorname{Ch} v \frac{5}{3}\operatorname{Ch} v dv = 15\cdot\frac{25}{9}\int_0^{\operatorname{SettSh}\frac{3}{5}} (\operatorname{Ch} v)^2 dv \\
&= \frac{125}{3}\left[\frac{v + \operatorname{Sh} v\operatorname{Ch} v}{2}\right]_0^{\operatorname{SettSh}\frac{3}{5}} = \frac{125}{6}\left(\operatorname{SettSh}\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\sqrt{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) \\
&= \frac{125}{6}\left(\operatorname{SettSh}\frac{3}{5} + \frac{3}{25}\sqrt{34}\right) = \frac{125}{6}\operatorname{SettSh}\frac{3}{5} + \frac{5}{2}\sqrt{34}.
\end{aligned}$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\left(x^2-y^4\right)(x+y)}{x^2+|y|^3} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2+y^4}{x^2+|y|^3}(|x|+|y|) = \left\{\frac{x^2}{x^2+|y|^3} + \frac{y^4}{x^2+|y|^3}\right\}(|x|+|y|)$$
$$\leq \left\{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^4}{|y|^3}\right\}(|x|+|y|) = (1+|y|)(|x|+|y|) \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Per il teorema del confronto, $f \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, quindi f è continua in $(0,0)$.

b.

$$f(x,0) = \frac{x^3}{x^2} = x, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1.$$
$$f(0,y) = \frac{-y^5}{|y|^3} = -y\,|y|, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Perciò f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (1,0)$

c. Per definizione f è differenziabile nell'origine se e solo se:

$$h(x,y) \equiv \frac{f(x,y) - x}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Si ha:

$$h(x,y) = \frac{\frac{\left(x^2-y^4\right)(x+y)}{x^2+|y|^3} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\left(x^2-y^4\right)(x+y) - x\left(x^2+|y|^3\right)}{\left(x^2+|y|^3\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \frac{x^3 - xy^4 + x^2y - y^5 - x^3 - x|y|^3}{\left(x^2+|y|^3\right)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-xy^4 + x^2y - y^5 - x|y|^3}{\left(x^2+|y|^3\right)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$h(x,x) = \frac{-2x^5 + x^3 - x|x|^3}{\left(x^2+|x|^3\right)\sqrt{2x^2}} \sim \frac{x^3}{x^2|x|\sqrt{2}} \to \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ per } x \to 0^{\pm}.$$

Pertanto $h(x,y)$ non tende a zero per $(x,y) \to (0,0)$, perciò f non è differenziabile in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi vincolati

Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 y^3$$

soggetta al vincolo

$$x^4 + y^4 = 9.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Sia $g(x,y) = x^4 + y^4 - 9$, poiché g è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$\nabla g(x,y) = \left(4x^3, 4y^3\right) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

e $g(0,0) \neq 0$, il vincolo non ha punti critici. Definiamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2y^3 - \lambda\left(x^4 + y^4 - 9\right)$$

e risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2xy^3 - 4\lambda x^3 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4\lambda y^3 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\left(x^4 + y^4 - 9\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\left(y^3 - 2\lambda x^2\right) = 0 \\ y^2\left(3x^2 - 4\lambda y\right) = 0 \\ x^4 + y^4 = 9 \end{cases}$$

Se dalla 1^a equazione $x = 0$, la 3^a dà $y^4 = 9, y = \pm\sqrt{3}$.
Se dalla 2^a equazione $y = 0$, la 3^a dà $x^4 = 9, x = \pm\sqrt{3}$.
Se $xy \neq 0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} y^3 = 2\lambda x^2 \\ 3x^2 = 4\lambda y \\ x^4 + y^4 = 9 \end{cases}$$

e dividendo la seconda per la prima ($\lambda \neq 0$ altrimenti si ritrova $x = y = 0$) si ha

$$\frac{2y}{x^2} = \frac{3x^2}{y^3}, 2y^4 = 3x^4, y^4 = \frac{3}{2}x^4,$$

che sostituita nella 3^a equazione dà

$$x^4 + \frac{3}{2}x^4 = 9, x^4 = \frac{18}{5}, x = \pm\sqrt[4]{\frac{18}{5}}$$
$$y^4 = \frac{3}{2}x^4 = \frac{3}{2}\frac{18}{5} = \frac{27}{5}, y = \pm\sqrt[4]{\frac{27}{5}}.$$

Perciò i punti stazionari della lagrangiana sono

$$\left(\pm\sqrt{3}, 0\right), \left(0, \pm\sqrt{3}\right), \pm\left(\sqrt[4]{\frac{18}{5}}, \sqrt[4]{\frac{27}{5}}\right), \pm\left(\sqrt[4]{\frac{18}{5}}, -\sqrt[4]{\frac{27}{5}}\right)$$

Poiché il vincolo rappresenta un insieme chiuso e limitato del piano, per il teorema di Weierstrass massimo e minimo assoluto vincolato di f esistono certamente, basta perciò confrontare i valori di f in questi 4 punti. Si ha:

$$f(x,y) = x^2 y^3$$

$$\begin{aligned}
f\left(\pm\sqrt{3},0\right) &= 0 \\
f\left(0,\pm\sqrt{3}\right) &= 0 \\
f\left(\pm\left(\sqrt[4]{\frac{18}{5}},\sqrt[4]{\frac{27}{5}}\right)\right) &= \pm\sqrt{\frac{18}{5}}\left(\frac{27}{5}\right)^{3/4} \\
f\left(\pm\left(\sqrt[4]{\frac{18}{5}},-\sqrt[4]{\frac{27}{5}}\right)\right) &= \mp\sqrt{\frac{18}{5}}\left(\frac{27}{5}\right)^{3/4}.
\end{aligned}$$

pertanto:

$\left(\sqrt[4]{\frac{18}{5}},\sqrt[4]{\frac{27}{5}}\right),\left(-\sqrt[4]{\frac{18}{5}},\sqrt[4]{\frac{27}{5}}\right)$ sono punti di massimo assoluti vincolati

$\left(\sqrt[4]{\frac{18}{5}},-\sqrt[4]{\frac{27}{5}}\right),\left(-\sqrt[4]{\frac{18}{5}},-\sqrt[4]{\frac{27}{5}}\right)$ sono punti di minimo assoluti vincolati.