Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)_________________________________
codice persona (o n°di matricola)_________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \log^2 x \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Non è richiesto di determinare l'intervallo *più ampio* su cui è definita la soluzione, ma solo di giustificare che la soluzione esiste ed è unica in un opportuno intorno di $x_0 = 1$.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$2y'' + 5y' - 7y = 10e^{-2x} \sin x.$$

Per la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa *è richiesto il metodo dell'esponenziale complesso.*

3. Curve e integrali di linea
Sia γ la curva piana espressa in forma polare da:

$$\rho = 3 + \sin\theta \text{ per } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

a. Calcolare l'elemento d'arco ds e scrivere le equazioni parametriche della curva.
b. Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma x ds.$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x^2 y^3 + 2y^5}{x^2 + y^4} & \text{per } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x, y) = \left(x^2 - y^2 + 1\right) e^{x+2y}$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y\left(\dfrac{1-2x^2}{x}\right) = 3x^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

e determinare a priori l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2y'' + 3y' = 4x - 5 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -2, \end{cases}$$

dopo aver scritto l'integrale generale dell'equazione differenziale.

3. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 \sin^2 x + x^4 y^2 e^y}{x^4 + y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

4. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(3x^2 + y^2 - 2\right)(x - y).$$

5. Funzione implicita

Dimostrare che l'equazione

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2+1} - \frac{y}{4x^2+6} = 0$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g(x)$ in un intorno di $x_0 = 1$. Calcolare quindi $g'(1)$, semplificando l'espressione ottenuta.

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti
Tema n°3

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 3y\sin x = 5\sin(2x) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

determinando, prima di risolvere il problema, l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 5\cos(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

dopo aver scritto l'integrale generale dell'equazione differenziale.

3. Curve e integrali di linea
Si consideri la curva piana γ di equazione polare

$$\rho = R(1 + \sin\theta) \text{ per } \theta \in [0, 2\pi]$$

dove $R > 0$ è una costante fissata.

a. Calcolare il suo elemento d'arco, semplificando l'espressione ottenuta; scrivere le equazioni parametriche della curva; stabilire se la curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari sulla curva.

b. Calcolare la lunghezza di γ. [Suggerimento: una volta impostato l'integrale, per calcolare la primitiva è utile moltiplicare e dividere l'integranda per $\sqrt{1 - \sin\theta}$].

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3+3x^2\sin(xy)\,e^{-y}}{x^2\sqrt{|x|}+\sin^2 y} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi liberi
Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y)=e^{3x+y}\left(x^2-y^2-10\right).$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti
Tema n°4

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4\sqrt{y}\sin^2 x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 4e^{-3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

dopo aver scritto l'integrale generale dell'equazione differenziale.

3. Curve e integrali di linea
Sia γ l'arco di curva in $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$\underline{r}(t) = (R\operatorname{Ch} t, R\operatorname{Sh} t, Rt) \text{ per } t \in [-1,1],$$

dove $R > 0$ è una costante fissata. Dopo aver calcolato l'elemento d'arco ds, calcolare la lunghezza e il centroide della curva. Si raccomanda di sfruttare le simmetrie.

Si richiede di riportare con cura impostazione e passaggi e semplificare il risultato ottenuto.

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili

Si consideri la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3\cos y+y^2\sin^3 x}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.

c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?

Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

5. Massimi e minimi vincolati

Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y)=2x^4+y^4$$

soggetta al vincolo

$$x^2+y^4=1.$$

Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	7
2	7
3	6
4	7
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \log^2 x \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Non è richiesto di determinare l'intervallo *più ampio* su cui è definita la soluzione, ma solo di giustificare che la soluzione esiste ed è unica in un opportuno intorno di $x_0 = 1$.

Equazione a variabili separabili, il secondo membro è $a(x)\,b(y)$ con $a(x)$ continua per $x > 0$ e $b(y) \in C^1(\mathbb{R})$. La condizione iniziale è assegnata in $x_0 = 1$, quindi x deve variare al più nell'intervallo $(0, +\infty)$ (cioè: l'intervallo più ampio su cui sarà definita la soluzione sarà $(0, +\infty)$ *o contenuto in questo*).

Soluzione costante dell'equazione:

$$y = 0,$$

che però non soddisfa la condizione iniziale.

Risolviamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y^2} &= \int \log^2 x dx \\
-\frac{1}{y} &= \int \underbrace{\log^2 x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'} dx = x \log^2 x - \int 2\frac{\log x}{x} \cdot x dx \\
&= x \log^2 x - 2 \int \underbrace{\log x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'} dx \\
&= x \log^2 x - 2 \left\{ x \log x - \int \frac{1}{x} x dx \right\} = x \log^2 x - 2x \log x + 2x + c.
\end{aligned}$$

Dunque

$$-\frac{1}{y} = x \log^2 x - 2x \log x + 2x + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(1) = -1$:

$$\begin{aligned} 1 &= 2 + c \\ c &= -1 \end{aligned}$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$-\frac{1}{y} = x\log^2 x - 2x\log x + 2x - 1$$
$$y = \frac{1}{-x\log^2 x + 2x\log x - 2x + 1},$$

definita in un opportuno intorno di $x = 1$, contenuto in $(0, +\infty)$.

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$2y'' + 5y' - 7y = 10e^{-2x}\sin x.$$

Per la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa *è richiesto il metodo dell'esponenziale complesso.*

$$2\alpha^2 + 5\alpha - 7 = 0$$
$$(\alpha - 1)(2\alpha + 7) = 0, \alpha = 1, \alpha = -\frac{7}{2}.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{7}{2}x}.$$

Per l'equazione completa, poiché

$$10e^{-2x}\sin x = \operatorname{Im}\left(10e^{x(-2+i)}\right),$$

cerchiamo prima una soluzione particolare dell'equazione

$$2w'' + 5w' - 7w = 10e^{x(-2+i)}.$$

Per il metodo di somiglianza, cerchiamo:

$$w(x) = Ae^{x(-2+i)}$$
$$w'(x) = A(-2+i)e^{x(-2+i)}$$
$$w(x) = A(-2+i)^2 e^{x(-2+i)}$$

$$Ae^{x(-2+i)}\left[2(-2+i)^2 + 5(-2+i) - 7\right] = 10e^{x(-2+i)}$$
$$A[2(3-4i) + 5(-2+i) - 7] = 10$$
$$A(-11-3i) = 10$$

$$A = \frac{10}{-11-3i} = \frac{10(-11+3i)}{130} = \frac{(-11+3i)}{13}$$
$$w(x) = \frac{(-11+3i)}{13}e^{x(-2+i)}$$

Soluzione particolare dell'equazione completa:

$$\overline{y}(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{(-11+3i)}{13}e^{x(-2+i)}\right) = \frac{e^{-2x}}{13}(3\cos x - 11\sin x)$$

Integrale generale dell'equazione completa:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{7}{2}x} + \frac{e^{-2x}}{13}(3\cos x - 11\sin x).$$

3. Curve e integrali di linea

Sia γ la curva piana espressa in forma polare da:

$$\rho = 3 + \sin\theta \text{ per } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

a. Calcolare l'elemento d'arco ds e scrivere le equazioni parametriche della curva.

b. Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma x ds.$$

a.

$$\begin{aligned}
\rho' &= \cos\theta \\
ds &= \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\theta = \sqrt{(3+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta}d\theta \\
&= \sqrt{10 + 6\sin\theta}d\theta
\end{aligned}$$

Equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = (3+\sin\theta)\cos\theta \\ y = (3+\sin\theta)\sin\theta \end{cases} \quad \text{per } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

b. Integrale di linea:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma x ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3+\sin\theta)\cos\theta\sqrt{10+6\sin\theta}d\theta \\
&[\sin\theta = u; \cos\theta d\theta = du; u \in [0,1]] \\
&= \int_0^1 (3+u)\sqrt{10+6u}du \\
&\left[\sqrt{10+6u} = t; 10+6u = t^2; u = \frac{1}{6}\left(t^2-10\right); du = \frac{t}{3}dt; t \in \left[\sqrt{10}, 4\right]\right] \\
&= \int_{\sqrt{10}}^4 \left(3 + \frac{1}{6}\left(t^2-10\right)\right) t \cdot \frac{t}{3}dt = \int_{\sqrt{10}}^4 \left(\frac{t^2}{6} + \frac{8}{6}\right)\frac{t^2}{3}dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{18}\int_{\sqrt{10}}^{4}\left(t^4+8t^2\right)dt = \frac{1}{18}\left[\frac{t^5}{5}+\frac{8}{3}t^3\right]_{\sqrt{10}}^{4} \\
&= \frac{1}{18}\left[\frac{4^5}{5}+\frac{8\cdot 4^3}{3}-\left(\frac{10}{5}+\frac{8}{3}\right)10\sqrt{10}\right] \\
&= \frac{1}{18}\left[4^4\cdot\frac{22}{15}-\frac{14}{3}\cdot 10\sqrt{10}\right] = \frac{2}{27}\left[\frac{64\cdot 22}{5}-35\sqrt{10}\right] \\
&= \frac{2}{27}\left(\frac{1408}{5}-35\sqrt{10}\right)
\end{aligned}
$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - x^2y^3 + 2y^5}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}
$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$
\begin{aligned}
|f(x,y)| &= \frac{\left|x^3y - x^2y^3 + 2y^5\right|}{x^2+y^4} \le \frac{\left|x^3y\right|}{x^2+y^4} + \frac{x^2|y|^3}{x^2+y^4} + \frac{2|y|^5}{x^2+y^4} \\
&\le \frac{\left|x^3y\right|}{x^2} + \frac{x^2|y|^3}{x^2} + \frac{2|y|^5}{y^4} = |xy| + |y|^3 + 2|y| \to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0)\,.
\end{aligned}
$$

Per il criterio del confronto, $f(x,y)\to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$, perciò f è continua in $(0,0)$.

b.

$$
f(x,0) = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.
$$
$$
f(0,y) = \frac{2y^5}{y^4} = 2y, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2.
$$

Perciò f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0) = (0,2)$.

c. Verifichiamo se f è differenziabile in $(0,0)$. Essendo $f(0,0) = 0$ e $\nabla f(0,0) = (0,2)$ questo è equivalente al fatto che

$$
\frac{f(x,y) - 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0)\,.
$$

$$
\frac{f(x,y)-2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3y - x^2y^3 + 2y^5 - 2x^2y - 2y^5}{\left(x^2+y^4\right)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3y - x^2y^3 - 2x^2y}{\left(x^2+y^4\right)\sqrt{x^2+y^2}} \equiv g(x,y)\,.
$$

Ora,

$$g(x,x)=\frac{x^4-x^5-2x^3}{\left(x^2+x^4\right)\sqrt{2}\,|x|}\sim\frac{-2x^3}{x^2\sqrt{2}\,|x|}=\frac{-\sqrt{2}x}{|x|}\to\mp\sqrt{2}\text{ per }x\to 0^{\pm}.$$

Perciò $g(x,y)$ non tende a zero per $(x,y)\to(0,0)$, quindi f non è differenziabile in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y)=\left(x^2-y^2+1\right)e^{x+2y}$$

$$\begin{cases} f_x=e^{x+2y}\left(x^2-y^2+1+2x\right)=0\\ f_y=e^{x+2y}\left(2x^2-2y^2+2-2y\right)=2e^{x+2y}\left(x^2-y^2+1-y\right)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=-1-2x\\ x^2-y^2=y-1\end{cases}\quad\begin{cases} y=-2x\\ x^2-4x^2=-2x-1\end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)=0\\ y=-2x\end{cases}\quad x=1,x=-\frac{1}{3}$$

Quindi si trovano i punti stazionari:

$$(1,-2),\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$f_{xx}=e^{x+2y}\left(x^2-y^2+1+2x+2x+2\right)=e^{x+2y}\left(x^2-y^2+4x+3\right)$$
$$f_{xy}=e^{x+2y}\left(2x^2-2y^2+2+4x-2y\right)=2e^{x+2y}\left(x^2-y^2+1+2x-y\right)$$
$$f_{yy}=2e^{x+2y}\left(2x^2-2y^2+2-2y-2y-1\right)=2e^{x+2y}\left(2x^2-2y^2-4y+1\right)$$
$$Hf(x,y)=e^{x+2y}\begin{bmatrix}\left(x^2-y^2+4x+3\right) & 2\left(x^2-y^2+1+2x-y\right)\\ 2\left(x^2-y^2+1+2x-y\right) & 2\left(2x^2-2y^2-4y+1\right)\end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$\begin{aligned}Hf(1,-2)&=e^{-3}\begin{bmatrix}1-4+4+3 & 2(1-4+1+2+2)\\ 2(1-4+1+2+2) & 2(2-8+8+1)\end{bmatrix}\\ &=e^{-3}\begin{bmatrix}4&4\\4&6\end{bmatrix}\text{ definita positiva, punto di minimo.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Hf\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)&=e\begin{bmatrix}\left(\frac19-\frac49-\frac43+3\right) & 2\left(\frac19-\frac49+1-\frac23-\frac23\right)\\ 2\left(\frac19-\frac49+1-\frac23-\frac23\right) & 2\left(\frac29-\frac89-\frac83+1\right)\end{bmatrix}\\ &=e\begin{bmatrix}\frac43 & -\frac23\\ -\frac23 & -\frac{14}{3}\end{bmatrix}=\frac{2}{3}e\begin{bmatrix}2&-1\\-1&-7\end{bmatrix}\text{ indefinita, punto di sella.}\end{aligned}$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	6
2	7
3	7
4	7
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y\left(\dfrac{1-2x^2}{x}\right) = 3x^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

e determinare a priori l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui per $x \neq 0$; poiché la condizione iniziale è assegnata in $x = 1$, la soluzione del problema sarà definita in $(0, +\infty)$.

$a(x) = \frac{1-2x^2}{x}$

$A(x) = \int \frac{1-2x^2}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - 2x\right) dx = \log|x| - x^2 = \log x - x^2$ in $(0, +\infty)$.

Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\left(\log x - x^2\right)} \left\{ c + \int e^{\log x - x^2} 3x^2 dx \right\} \\ &= \frac{e^{x^2}}{x} \left\{ c + \int \frac{x}{e^{x^2}} 3x^2 dx \right\}. \end{aligned}$$

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = (...) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\left(1+x^2\right).$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{e^{x^2}}{x} \left\{ c - \frac{3}{2} e^{-x^2}\left(1+x^2\right) \right\} \\ &= c\frac{e^{x^2}}{x} - \frac{3}{2}\left(\frac{1+x^2}{x}\right). \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(1) = 0$ e abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= ce - 3 \\ c &= \frac{3}{e} \\ y(x) &= \frac{3e^{x^2}}{xe} - \frac{3}{2}\left(\frac{1+x^2}{x}\right) \text{ per } x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2y'' + 3y' = 4x - 5 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -2, \end{cases}$$

dopo aver scritto l'integrale generale dell'equazione differenziale.

Equazione omogenea.

$$2\alpha^2 + 3\alpha = 0; \alpha = 0, \alpha = -\frac{3}{2}.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}.$$

Soluzione particolare dell'equazione completa.

In base al metodo di somiglianza, poiché il termine noto è un polinomio di 1° grado e a primo membro manca il termine in y, cerchiamo

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= ax^2 + bx \\ \overline{y}'(x) &= 2ax + b \\ \overline{y}''(x) &= 2a \end{aligned}$$

$$2(2a) + 3(2ax + b) = 4x - 5$$

$$\begin{cases} 6a = 4 \\ 4a + 3b = -5 \end{cases} \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ 3b = -5 - \frac{8}{3} = -\frac{23}{3}; b = -\frac{23}{9}. \end{cases}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa è allora

$$\overline{y}(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{23}{9}x$$

e l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{23}{9}x + c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}.$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Poiché

$$y'(x) = \frac{4}{3}x - \frac{23}{9} - \frac{3}{2}c_2 e^{-\frac{3}{2}x},$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ -2 = -\frac{23}{9} - \frac{3}{2}c_2 \end{cases} \begin{cases} c_2 = -\frac{10}{27} \\ c_1 = \frac{10}{27} \end{cases}$$

e la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{23}{9}x + \frac{10}{27}\left(1 - e^{-\frac{3}{2}x}\right).$$

3. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 \sin^2 x + x^4 y^2 e^y}{x^4 + y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}} f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \frac{\left|y^3 \sin^2 x + x^4 y^2 e^y\right|}{x^4 + y^4} \leq \frac{|y|^3 \sin^2 x + x^4 y^2 e^y}{x^4 + y^4} \\ &\leq \frac{|y|^3 x^2}{x^4 + y^4} + \frac{x^4 y^2}{x^4 + y^4} e^y \equiv f_1(x,y) + e^y f_2(x,y) \end{aligned}$$

(perché $|\sin x| \leq |x|$). Le funzioni f_1, f_2 sono continue fuori dall'origine e positivamente omogenee di grado, rispettivamente, $1, 2$, perciò tendono a zero per $(x,y) \to (0,0)$. Quindi per il teorema del confronto $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, e f è continua in $(0,0)$.
b.

$$\begin{aligned} f(x,0) &= 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ f(0,y) &= 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Perciò f è derivabile, con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
c. Sia

$$\begin{aligned} g(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) &= \frac{(t\sin\theta)^3 \sin^2(t\cos\theta) + (t\cos\theta)^4 (t\sin\theta)^2 e^{t\sin\theta}}{(t\cos\theta)^4 + (t\sin\theta)^4} \\ &= \frac{(t\sin\theta)^3 \sin^2(t\cos\theta) + (t\cos\theta)^4 (t\sin\theta)^2 e^{t\sin\theta}}{(t\cos\theta)^4 + (t\sin\theta)^4}. \end{aligned}$$

Per θ fissato con $\cos\theta \neq 0$ e $\sin\theta \neq 0$, per $t \to 0$ è:

$$g(t) \sim \frac{t^5 \left(\sin^3\theta\right)\left(\cos^2\theta\right)}{t^4 \left(\cos^4\theta + \sin^4\theta\right)} = t\frac{\left(\sin^3\theta\right)\left(\cos^2\theta\right)}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$$

quindi

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = \frac{\left(\sin^3\theta\right)\left(\cos^2\theta\right)}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}.$$

Se poi $\cos\theta = 0$ o $\sin\theta = 0$, le derivate direzionali sono le derivate parziali, che sappiamo già essere zero. In definitiva,

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = \frac{\sin^3\theta \cos^2\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} \text{ per ogni } \theta.$$

D'altro canto

$$\nabla f(0,0) \cdot \underline{v} = (0,0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = 0 \text{ per ogni } \theta,$$

perciò *non vale* la formula del gradiente. (In particolare, certamente f non è differenziabile in $(0,0)$).

4. Massimi e minimi liberi per funzioni di due variabili

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(3x^2 + y^2 - 2\right)(x-y).$$

$$\begin{cases} f_x = 6x(x-y) + \left(3x^2 + y^2 - 2\right) = 9x^2 - 6xy + y^2 - 2 = 0 \\ f_y = 2y(x-y) - \left(3x^2 + y^2 - 2\right) = -3x^2 + 2xy - 3y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro si trova

$$\begin{aligned} &6x^2 - 4xy - 2y^2 = 2\left(3x^2 - 2xy - y^2\right) = 2(x-y)(3x+y) = 0, \\ &\qquad y = x \text{ o } y = -3x. \end{aligned}$$

Per $y = x$ la prima equazione dà

$$4x^2 - 2 = 0, x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ quindi } y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Per $y = -3x$ la prima equazione dà

$$x^2(9 + 18 + 9) - 2 = 0, x = \pm\frac{1}{\sqrt{18}} = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}, \text{ quindi } y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi si trovano i punti stazionari:

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \pm\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{cases} f_x = 9x^2 - 6xy + y^2 - 2 \\ f_y = -3x^2 + 2xy - 3y^2 + 2 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= 18x - 6y \\
f_{xy} &= -6x + 2y \\
f_{yy} &= 2x - 6y
\end{aligned}
$$

$$
Hf\,(x,y) = \begin{bmatrix} 18x-6y & -6x+2y \\ -6x+2y & 2x-6y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 9x-3y & -3x+y \\ -3x+y & x-3y \end{bmatrix}
$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$
Hf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella.}
$$

$$
Hf\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\begin{bmatrix} -\frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella.}
$$

$$
\begin{aligned}
Hf\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 2\begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= 2\sqrt{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ definita positiva, punto di minimo} \\
Hf\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 2\begin{bmatrix} -\frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= 2\sqrt{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ definita negativa, punto di massimo.}
\end{aligned}
$$

5. Funzione implicita

Dimostrare che l'equazione

$$
f\,(x,y) = \frac{x}{y^2+1} - \frac{y}{4x^2+6} = 0
$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = g\,(x)$ in un intorno di $x_0 = 1$. Calcolare quindi $g'\,(1)$, semplificando l'espressione ottenuta.

La funzione f è $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

$$
f\,(1,y) = \frac{1}{y^2+1} - \frac{y}{10} = 0 \text{ per } y^3 + y = 10.
$$

Si osserva facilmente che $y_0 = 2$ risolve l'equazione, e si controlla che questa è l'unica soluzione perché la cubica $h\,(y) = y^3 + y - 10$ taglia in un solo punto l'asse reale, in quanto

$$
h'\,(y) = 3y^2 + 1 > 0 \text{ per ogni } y,
$$

perciò h è strettamente crescente.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2xy}{\left(y^2+1\right)^2} - \frac{1}{4x^2+6}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -\frac{4}{25} - \frac{1}{10} = -\frac{13}{50} \neq 0.$$

Poiché $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right), f(1,2) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = h(x)$, C^1, in un intorno di $x_0 = 1$. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y^2+1} + \frac{8xy}{\left(4x^2+6\right)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{1}{5} + \frac{16}{100} = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} = \frac{9}{25}$$
$$g'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)} = -\frac{\frac{9}{25}}{-\frac{13}{50}} = \frac{18}{13}.$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°3

Es.	Punti
1	6
2	7
3	7
4	7
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 3y \sin x = 5 \sin(2x) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

determinando, prima di risolvere il problema, l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione.

Equazione lineare del prim'ordine a coefficienti continui in tutto $\mathbb{R}$, perciò la soluzione del problema sarà definita in tutto $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a(x) &= 3\sin x \\ A(x) &= \int 3\sin x dx = -3\cos x. \end{aligned}$$

Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-A(x)} \left\{ c + \int e^{A(x)} 5 \sin(2x)\, dx \right\} \\ &= e^{3\cos x} \left\{ c + 10 \int e^{-3\cos x} \sin x \cos x dx \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^{-3\cos x} \sin x \cos x dx &= [\cos x = t; -\sin x dx = dt] \\ &= \int -te^{-3t} dt = (...) = e^{-3t}\left(\frac{1}{9} + \frac{t}{3}\right) \\ &= e^{-3\cos x}\left(\frac{1}{9} + \frac{\cos x}{3}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{3\cos x}\left\{ c + 10 e^{-3\cos x}\left(\frac{1}{9} + \frac{\cos x}{3}\right)\right\} \\ &= ce^{3\cos x} + 10\left(\frac{1}{9} + \frac{\cos x}{3}\right). \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{9}$ e abbiamo

$$\frac{1}{9} = c + \frac{10}{9}; c = -1$$
$$y(x) = \frac{10}{3}\left(\frac{1}{3} + \cos x\right) - e^{3\cos x} \text{ per } x \in \mathbb{R}.$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 5\cos(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

dopo aver scritto l'integrale generale dell'equazione differenziale.

Integrale generale dell'omogenea (equazione dell'oscillatore armonico, $z'' + \omega^2 z = 0$ con $\omega = 2$):

$$z(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x).$$

Equazione completa, metodo di somiglianza. Poiché il termine noto risolve l'equazione, cerchiamo una soluzione del tipo

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x) \\ \overline{y}'(x) &= A(\cos 2x - 2x\sin 2x) + B(\sin 2x + 2x\cos 2x) \\ \overline{y}''(x) &= A(-4\sin 2x - 4x\cos 2x) + B(4\cos 2x - 4x\sin 2x) \end{aligned}$$

$$A(-4\sin 2x - 4x\cos 2x) + B(4\cos 2x - 4x\sin 2x) + 4Ax\cos(2x) + 4Bx\sin(2x) = 5\cos(2x)$$

$$A(-4\sin 2x) + B(4\cos 2x) = 5\cos(2x)$$
$$A = 0; 4B = 5, B = \frac{5}{4}$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione completa è:

$$\overline{y}(x) = \frac{5}{4}x\sin(2x)$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$y(x) = \frac{5}{4}x\sin(2x) + c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x).$$

Imponiamo le condizioni iniziali.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{5}{4}\sin(2x) + \frac{5}{2}x\cos(2x) - 2c_1\sin(2x) + 2c_2\cos(2x). \\ y(0) &= 0 \Rightarrow 0 = c_1 \\ y'(0) &= 0 \Rightarrow 0 = 2c_2 \end{aligned}$$

e la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{5}{4} x \sin(2x).$$

3. Curve e integrali di linea

Si consideri la curva piana γ di equazione polare

$$\rho = R(1 + \sin\theta) \text{ per } \theta \in [0, 2\pi]$$

dove $R > 0$ è una costante fissata.

a. Calcolare il suo elemento d'arco, semplificando l'espressione ottenuta; scrivere le equazioni parametriche della curva; stabilire se la curva è regolare o regolare a tratti, determinando gli eventuali punti singolari sulla curva.

b. Calcolare la lunghezza di γ. [Suggerimento: una volta impostato l'integrale, per calcolare la primitiva è utile moltiplicare e dividere l'integranda per $\sqrt{1-\sin\theta}$].

a.

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= R(1 + \sin\theta) \\
f'(\theta) &= R\cos\theta \\
f(\theta)^2 + f'(\theta)^2 &= R^2(2 + 2\sin\theta) \\
ds &= \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta = R\sqrt{2}\sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta
\end{aligned}$$

La curva è regolare purché $\sin\theta \neq -1$, quindi per $\theta \neq \frac{3}{2}\pi$. Le equazioni parametriche della curva sono:

$$\begin{cases} x = R(1+\sin\theta)\cos\theta \\ y = R(1+\sin\theta)\sin\theta \end{cases} \text{ per } \theta \in [0, 2\pi].$$

Il punto singolare della curva è:

$$(0, 0).$$

b.

$$\begin{aligned}
l(\gamma) &= \int_\gamma ds = R\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{|\cos\theta|}{\sqrt{1-\sin\theta}} d\theta = R\sqrt{2}\left\{\int_0^{\pi} \frac{|\cos\theta|}{\sqrt{1-\sin\theta}} d\theta + \int_\pi^{2\pi} \frac{|\cos\theta|}{\sqrt{1-\sin\theta}} d\theta\right\} \\
&= 2R\sqrt{2}\left\{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}} d\theta + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}} d\theta\right\} \\
&[\sin\theta = t; \cos\theta d\theta = dt] \\
&= 2R\sqrt{2}\left\{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} + \int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}\right\} \\
&= 2R\sqrt{2}\left\{\left[-2(1-t)^{1/2}\right]_0^1 + \left[-2(1-t)^{1/2}\right]_{-1}^0\right\} \\
&= 2R\sqrt{2}\left(2 - 2 + 2\sqrt{2}\right) = 8R.
\end{aligned}$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3 + 3x^2 \sin(xy)\, e^{-y}}{x^2\sqrt{|x|} + \sin^2 y} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a. Poiché $0 < e^{-y} < 1$ *e* $|\sin(xy)| \leq |xy|$, si ha:

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \frac{|xy^3| + 3x^2 |\sin(xy)|\, e^{-y}}{x^2\sqrt{|x|} + \sin^2 y} \leq \frac{|xy^3|}{\sin^2 y} + \frac{3x^2 |\sin(xy)|}{x^2\sqrt{|x|}} \\ &= |xy| \left(\frac{y}{\sin y}\right)^2 + \frac{3|xy|}{\sqrt{|x|}} \leq |xy| \left(\frac{y}{\sin y}\right)^2 + 3|y|\sqrt{|x|} \to 0 \end{aligned}$$

per $(x,y) \to (0,0)$ perché $\left(\frac{y}{\sin y}\right)^2$ è una funzione di una variabile limitata in un intorno di $y = 0$ perché tende a 1 per $y \to 0$, $|xy|$ e $3|y|\sqrt{|x|}$ sono funzioni continue in tutto il piano che valgono 0 nell'origine. Quindi per il teorema del confronto $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, e f è continua.

b.

$$\begin{aligned} f(x,0) = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ f(0,y) = 0, \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Perciò f è derivabile, con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

c. Verifichiamo se f è differenziabile in $(0,0)$. Essendo $f(0,0) = 0$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$ questo è equivalente al fatto che

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Poiché $0 < e^{-y} < 1$ *e* $|\sin(xy)| \leq |xy|$, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{|xy^3 + 3x^2 \sin(xy)\, e^{-y}|}{\left(x^2\sqrt{|x|} + \sin^2 y\right)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \frac{|xy^3|}{\sin^2 y\sqrt{x^2}} + \frac{3x^2|xy|}{x^2\sqrt{|x|}\sqrt{y^2}} = |y| \cdot \left(\frac{y}{\sin y}\right)^2 + 3\sqrt{|x|} \to 0 \end{aligned}$$

per $(x,y)\to(0,0)$ perché $\left(\frac{y}{\sin y}\right)^2$ è una funzione di una variabile limitata in un intorno di $y=0$ perché tende a 1 per $y\to 0$, $|y|$ e $3\sqrt{|x|}$ sono funzioni continue in tutto il piano che valgono 0 nell'origine. Quindi per il teorema del confronto $\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$, e f è differenziabile in $(0,0)$.

5. Massimi e minimi liberi

Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y)=e^{3x+y}\left(x^2-y^2-10\right)$$

$$\begin{cases} f_x=e^{3x+y}\left(3x^2-3y^2-30+2x\right)=0 \\ f_y=e^{3x+y}\left(x^2-y^2-10-2y\right)=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3\left(x^2-y^2\right)-30+2x=0 \\ x^2-y^2=10+2y \end{cases}$$

$$\begin{gathered} 3(10+2y)-30+2x=0; 6y+2x=0; x=-3y \\ 8y^2=10+2y \\ 4y^2-y-5=(y+1)(4y-5)=0 \\ y=-1\Rightarrow x=3 \\ y=\frac{5}{4}\Rightarrow x=-\frac{15}{4}. \end{gathered}$$

Quindi si trovano i punti stazionari:

$$(3,-1),\left(-\frac{15}{4},\frac{5}{4}\right).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$\begin{aligned} f_{xx}&=e^{3x+y}\left(9x^2-9y^2-90+6x+6x+2\right)=e^{3x+y}\left(9x^2-9y^2-88+12x\right) \\ f_{xy}&=e^{3x+y}\left(3x^2-3y^2-30+2x-6y\right) \\ f_{yy}&=e^{3x+y}\left(x^2-y^2-10-2y-2y-2\right)=e^{3x+y}\left(x^2-y^2-12-4y\right) \end{aligned}$$

$$Hf(x,y)=e^{3x+y}\begin{bmatrix} 9\left(x^2-y^2\right)-88+12x & 3\left(x^2-y^2\right)-30+2x-6y \\ 3\left(x^2-y^2\right)-30+2x-6y & x^2-y^2-12-4y \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

$$
\begin{aligned}
Hf\,(3,-1) &= e^8 \begin{bmatrix} 72-88+36 & 24-30+6-6 \\ 24-30+6-6 & 8-12+4 \end{bmatrix} \\
&= e^8 \begin{bmatrix} 20 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \text{ indefinita, punto di sella.} \\
Hf\left(-\frac{15}{4},\frac{5}{4}\right) &= e^{-10} \begin{bmatrix} 9\cdot\frac{25}{2}-88-45 & 3\cdot\frac{25}{2}-30-\frac{15}{2}-\frac{15}{2} \\ 3\cdot\frac{25}{2}-30+2x-6y & \frac{25}{2}-12-5 \end{bmatrix} \\
&= e^{-10} \begin{bmatrix} -\frac{41}{2} & -\frac{15}{2} \\ -\frac{15}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} = \frac{e^{-10}}{2} \begin{bmatrix} -41 & -15 \\ -15 & -9 \end{bmatrix} \text{ definita negativa, punto di massimo.}
\end{aligned}
$$

Prima prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°4

Es.	Punti
1	6
2	7
3	7
4	7
5	6
Tot.	33

1. Equazioni differenziali del prim'ordine
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4\sqrt{y}\sin^2 x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \end{cases}$$

e determinare l'intervallo più ampio su cui è definita la soluzione, giustificando l'affermazione.

Equazione a variabili separabili. Il secondo membro è $a(x)\,b(y)$ con $a(x)$ continua in $\mathbb{R}$ e $b(y) \in C^1(0,+\infty)$. Poiché $\frac{\pi^2}{4} > 0$, la soluzione esiste ed è unica in un intorno del punto $\frac{\pi}{2}$.

Soluzione costante dell'equazione è $y = 0$, che non risolve il problema. Per $y \neq 0$,

Risolviamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{4\sqrt{y}} &= \int \sin^2 x dx \\ \frac{1}{2}\sqrt{y} &= \frac{x - \sin x\cos x + c}{2} \\ \sqrt{y} &= x - \sin x \cos x + c \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + c, c = 0$$

e la soluzione del problema è definita implicitamente dall'equazione

$$\sqrt{y} = x - \sin x \cos x = x - \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Osservando che dev'essere $x - \frac{1}{2}\sin(2x) > 0$ il che risulta $x > 0$ si ottiene:

$$y(x) = \left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2 \text{ per } x > 0.$$

2. Equazioni differenziali del second'ordine
Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 4e^{-3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

dopo aver scritto l'integrale generale dell'equazione differenziale.

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0$$
$$(\alpha - 3)^2 = 0$$
$$\alpha = 3.$$

Integrale generale dell'omogenea:

$$z(x) = e^{3x}(c_1 + c_2 x).$$

Equazione completa. In base al metodo di somiglianza, cerchiamo

$$\overline{y}(x) = Ae^{-3x}$$
$$\overline{y}'(x) = -3Ae^{-3x}$$
$$\overline{y}''(x) = 9Ae^{-3x}$$

$$Ae^{-3x}(9 - 6 \cdot (-3) + 9) = 4e^{-3x}$$
$$36A = 4; A = \frac{1}{9}.$$

Una soluzione particolare dell'equazione di partenza è allora

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{9}e^{-3x}$$

e l'ntegrale generale dell'equazione completa è:

$$y(x) = \frac{1}{9}e^{-3x} + e^{3x}(c_1 + c_2 x).$$

Imponiamo le condizioni di Cauchy

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Poiché

$$y'(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + e^{3x}(3c_1 + c_2 + 3c_2 x)$$

si ha:

$$\begin{cases} 0 = y(0) = \frac{1}{9} + c_1 \\ \frac{1}{3} = y'(0) = -\frac{1}{3} + 3c_1 + c_2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + c_2 = \frac{1}{3}; c_2 = 1 \end{cases}$$

e la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{1}{9}e^{-3x} + e^{3x}\left(-\frac{1}{9} + x\right).$$

3. Curve e integrali di linea

Sia γ l'arco di curva in $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$\underline{r}(t) = (R \operatorname{Ch} t, R \operatorname{Sh} t, Rt) \text{ per } t \in [-1, 1],$$

dove $R > 0$ è una costante fissata. Dopo aver calcolato l'elemento d'arco ds, calcolare la lunghezza e il centroide della curva. Si raccomanda di sfruttare le simmetrie.

Si richiede di riportare con cura impostazione e passaggi e semplificare il risultato ottenuto.

$$\begin{aligned} \underline{r}'(t) &= (R \operatorname{Sh} t, R \operatorname{Ch} t, R) \\ |\underline{r}'(t)| &= R\sqrt{(\operatorname{Sh} t)^2 + (\operatorname{Ch} t)^2 + 1} = R\sqrt{2(\operatorname{Ch} t)^2} = R\sqrt{2} \operatorname{Ch} t \\ ds &= R\sqrt{2} \operatorname{Ch} t dt. \end{aligned}$$

$$l(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_{-1}^1 R\sqrt{2} \operatorname{Ch} t dt = 2R\sqrt{2} \int_0^1 \operatorname{Ch} t dt = 2R\sqrt{2} [\operatorname{Sh} t]_0^1 = 2R\sqrt{2} \operatorname{Sh} 1.$$

Il centroide $C = (x_C, y_C, z_C)$ ha coordinate:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{l(\gamma)} \int_\gamma x ds = \frac{1}{l(\gamma)} \int_{-1}^1 R\sqrt{2} \operatorname{Ch} t \cdot R \operatorname{Ch} t dt \\ &= \frac{1}{2R\sqrt{2} \operatorname{Sh} 1} 2R^2\sqrt{2} \int_0^1 (\operatorname{Ch} t)^2 dt = \frac{R}{\operatorname{Sh} 1} \left[\frac{\operatorname{Sh} t \operatorname{Ch} t + t}{2}\right]_0^1 \\ &= R\left(\frac{\operatorname{Sh} 1 \operatorname{Ch} 1 + 1}{2 \operatorname{Sh} 1}\right). \end{aligned}$$

$$y_C = \frac{1}{l(\gamma)} \int_\gamma y ds = \frac{1}{l(\gamma)} \int_{-1}^1 R\sqrt{2} \operatorname{Ch} t \cdot R \operatorname{Sh} t dt = 0 \text{ (funzione dispari su } (-1, 1)$$

$$z_C = \frac{1}{l(\gamma)} \int_\gamma z ds = \frac{1}{l(\gamma)} \int_{-1}^1 R\sqrt{2} \operatorname{Ch} t \cdot R t dt = 0 \text{ (funzione dispari su } (-1, 1).$$

Quindi il centroide è il punto:

$$\left(R\left(\frac{\operatorname{Sh}1\operatorname{Ch}1+1}{2\operatorname{Sh}1}\right),0,0\right).$$

4. Continuità e differenziabilità per funzioni di due variabili
Si consideri la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3\cos y+y^2\sin^3 x}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Stabilire se f è derivabile in $(0,0)$, calcolando in caso affermativo $\nabla f(0,0)$.
c. Calcolare in base alla definizione le derivate direzionali $D_{\underline{v}}f(0,0)$ per un generico versore $\underline{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$. Vale la formula del gradiente?
Tutte le affermazioni vanno opportunamente giustificate.

a.

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &\leq \frac{\left|x^3\cos y+y^2\sin^3 x\right|}{x^2+y^4}\leq\frac{|x|^3|\cos y|}{x^2+y^4}+\frac{y^2|\sin x|^3}{x^2+y^4}\\ &\leq\frac{|x|^3}{x^2}+\frac{y^2|x|^3}{x^2}=|x|\left(1+y^2\right)\to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0).\end{aligned}$$

Per il teorema del confronto, $f\to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$, quindi f è continua in $(0,0)$.
b.

$$f(x,0)=\frac{x^3}{x^2}=x,\ \text{quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1.$$
$$f(0,y)=0,\ \text{quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Perciò f è derivabile in $(0,0)$, con $\nabla f(0,0)=(1,0)$.
c. Sia

$$\begin{aligned}g(t)=f(t\cos\theta,t\sin\theta)&=\frac{t^3\cos^3\theta\cos(t\sin\theta)+t^2\left(\sin^2\theta\right)\sin\left(t^3\cos^3\theta\right)}{t^2\cos^2\theta+t^4\sin^4\theta}\\ &=\frac{t\cos^3\theta\cos(t\sin\theta)+\left(\sin^2\theta\right)\sin\left(t^3\cos^3\theta\right)}{\cos^2\theta+t^2\sin^4\theta}.\end{aligned}$$

Se $\cos\theta\neq0$, per $t\to0$,

$$g(t)\sim\frac{t\cos^3\theta}{\cos^2\theta}=t\cos\theta$$

quindi

$$D_{\underline{v}}f(0,0)=g'(0)=\cos\theta.$$

Se $\cos\theta = 0$,
$$g(t) = 0$$
quindi
$$D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = 0.$$

D'altro canto
$$\nabla f(0,0) \cdot \underline{v} = (1,0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \text{ per ogni } \theta,$$
perciò *vale la formula del gradiente*. (Notiamo che questo di per sé non implica che f sia differenziabile in $(0,0)$).

5. Massimi e minimi vincolati

Determinare massimi e minimi assoluti della funzione
$$f(x,y) = 2x^4 + y^4$$
soggetta al vincolo
$$x^2 + y^4 = 1.$$
Si richiede di usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange e non altri metodi.

Sia $g(x,y) = x^2 + y^4 - 1$, poiché g è $C^1(\mathbb{R}^2)$ e
$$\nabla g(x,y) = \left(2x, 4y^3\right) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$
e $g(0,0) \neq 0$, il vincolo non ha punti critici. Definiamo la lagrangiana
$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = 2x^4 + y^4 - \lambda\left(x^2 + y^4 - 1\right)$$
e risolviamo il sistema
$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 8x^3 - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 4y^3 - 4\lambda y^3 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\left(x^2 + y^4 - 1\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x\left(4x^2 - \lambda\right) = 0 \\ 4y^3(1-\lambda) = 0 \\ x^2 + y^4 = 1 \end{cases}$$

La 2^a equazione dà $y = 0$ o $\lambda = 1$.

Se $y = 0$ il vincolo dà $x = \pm 1$.

Se $\lambda = 1$ la prima equazione dà $x = 0$ o $x = \pm\frac{1}{2}$. Se $x = 0$ il vincolo dà $y = \pm 1$; se $x = \pm\frac{1}{2}$ il vincolo dà $y = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$.

Perciò i punti stazionari della lagrangiana sono
$$(\pm 1, 0), (0, \pm 1), \left(\pm\frac{1}{2}, \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right), \left(\pm\frac{1}{2}, -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right).$$

Poiché il vincolo rappresenta un insieme chiuso e limitato del piano (è contenuto nel quadrato $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$), per il teorema di Weierstrass massimo e minimo assoluto vincolato di f esistono certamente, basta perciò confrontare i valori di f in questi punti. Si ha:

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4$$

$$\begin{aligned} f(\pm 1, 0) &= 2 \\ f(0, \pm 1) &= 1 \\ f\left(\pm\frac{1}{2}, \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right) = f\left(\pm\frac{1}{2}, -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right) &= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Perciò

$(\pm 1, 0)$ sono punti di massimo assoluti vincolati

$\left(\pm\frac{1}{2}, \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right), \left(\pm\frac{1}{2}, -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$ sono punti di minimo assoluti vincolati.