Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)_________________________________
codice persona (o n°di matricola)_________________________________
n°d'ordine (v. elenco)_______________________________________

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_T xe^{-y}dxdy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,-1),(2,1),(-2,0)$. *Si raccomanda di fare una figura, scrivere la rappresentazione analitica di T e prestare cura nell'impostazione.*

2. Calcolare la massa totale dell'ellissoide non omogeneo espresso analiticamente da

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

avente densità

$$\delta(x,y,z) = \frac{\mu}{a^2b^2c}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

(dove con $a,b,c>0$ e $\mu>0$ sono costanti con le dimensioni di una lunghezza e di una massa, rispettivamente). *Si richiede* di usare le coordinate ellissoidali:

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\phi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\phi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\phi \end{cases}$$

3. Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \frac{(yz,xz,xy)}{x^2+y^2+z^2}.$$

a. Si calcoli il rotore di $\underline{F}$. *Riportare impostazione e calcoli, e semplificare il più possibile l'espressione trovata.*
b. Si calcoli il flusso di $\nabla\times\underline{F}$ attraverso la semisfera di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel semispazio $z\geq 0$, orientata verso l'alto.

4. Sia Σ la superficie conica di raggio R, altezza $2R$, vertice l'origine e asse z come asse di simmetria e supponiamo che sia una superficie materiale non omogenea avente densità

$$\delta(x,y,z) = \frac{x^2+z^2}{R^4}\mu$$

dove $\mu > 0$ ha le dimensioni di una massa.
a. Scrivere le equazioni parametriche di Σ e calcolare il suo elemento d'area (si consiglia di scriverla come superficie di rotazione di un opportuno segmento).
b. Calcolare il momento d'inerzia di Σ rispetto all'asse z. *Riportare impostazione e passaggi, e riscrivere il risultato ottenuto nella forma il più possibile semplificata.*

5. Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[0,2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ per } x \in [0,1] \\ 2-x \text{ per } x \in [1,2] \end{cases}$$

e riflessa pari in $[-2,0]$.
a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Detta Ω la lamina materiale omogenea di massa m contornata dalla curva del piano xy avente equazione polare:

$$\rho = R\sqrt{\sin\theta},\ \theta \in [0, \pi]$$

con $R > 0$ fissato, calcolare l'area della lamina Ω e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse x. Riportare impostazione e passaggi.

2. Calcolare la coordinata x del centroide del solido omogeneo Ω descritto analiticamente da

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : z \in \left[0, \frac{h}{2}\right], x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h^2}(h-z)^2, x \geq 0\right\}$$

con $R, h > 0$ costanti. (Per il calcolo del volume, cercare di riconoscere di che solido si tratta e non utilizzare integrali).

3. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x, y) = \left(2xe^{-y^2-z^2}, -2y\left(x^2+z^2\right)e^{-y^2-z^2}, 2ze^{-y^2-z^2}\left(1-x^2-z^2\right)\right).$$

a. Dopo aver verificato se è irrotazionale nel suo insieme di definizione, stabilire se è conservativo nel suo insieme di definizione e calcolare in tal caso un potenziale.
b. Quindi, calcolare il lavoro del campo lungo l'arco di curva γ:

$$\underline{r}(t) = (t, t\cos t, t\sin t),\ \text{per } t \in [0, 2\pi].$$

4. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazione

$$z = \sqrt{x} \text{ per } x \in [0, 2] .$$

Dopo aver scritto le equazioni parametriche di γ e di Σ, l'elemento d'area di Σ, e aver individuato gli eventuali punti singolari della superficie, calcolare l'integrale

$$\int\int_{\Sigma} \frac{|x|}{z} dS.$$

5. Si consideri la curva piana γ di equazioni parametriche

$$\underline{r}\,(t) = (5\cos t - \sin(4t)\,, 5\sin t - \cos(4t)) \text{ per } t \in [0, 2\pi] .$$

Dopo aver verificato analiticamente che si tratta di un arco di curva regolare e chiuso, utilizzando le formule di Gauss-Green calcolare l'area della regione piana contornata da γ.

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Tema n°3

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_T x\,|y|\,dxdy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,-1),(2,1),(-2,0)$. *Si raccomanda di fare una figura, scrivere la rappresentazione analitica di T e prestare cura nell'impostazione.*

2. Calcolare la coordinata z del baricentro del solido non omogeneo espresso analiticamente da

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0\right\}$$

avente densità

$$\delta(x,y,z) = \frac{\mu}{a^2b^2c}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

(dove con $a,b,c>0$ e $\mu>0$ sono costanti con le dimensioni di una lunghezza e di una massa, rispettivamente), sapendo che la massa totale è $m = \frac{2}{15}\pi\mu\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab}\right)$. *Si richiede* di usare le coordinate ellissoidali:

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\phi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\phi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\phi \end{cases}$$

3. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \frac{(-y,x,z)}{x^2+y^2+z^2}$$

lungo l'arco di curva γ di equazioni parametriche

$$\underline{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, 2at) \text{ per } t \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

con $a>0$ costante. Riportare impostazione e calcoli, e *semplificare il risultato ottenuto.*

4. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = Rt^2 \\ z = \frac{R}{3}t^3 \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

con $R > 0$ costante.
a. Scrivere le equazioni parametriche di Σ, l'elemento d'area di Σ, e determinare gli eventuali punti singolari di Σ.
b. Calcolare l'area di Σ. Riportare impostazione e passaggi.

5. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(x, y, z^2\right)$$

attraverso la superficie Σ grafico della funzione

$$z = e^{-x^2-y^2} \text{ per } x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0$$

orientata verso l'alto (cioè con la componente z del vettore normale positiva). *Riportare con cura impostazione e passaggi.*

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Tema n°4

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Detta Ω la lamina materiale omogenea di massa m contornata dalla curva del piano xy avente equazione polare:

$$\rho = R\sqrt{\sin\theta}, \ \theta \in [0, \pi]$$

con $R > 0$ fissato, calcolare l'area della lamina Ω e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse y. *Riportare impostazione e passaggi.*

2. Calcolare la coordinata z del centroide del solido omogeneo Ω descritto analiticamente da

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : z \in \left[0, \frac{h}{2}\right], x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h^2}(h - z)^2, x \geq 0 \right\}$$

con $R, h > 0$ costanti. (Per il calcolo del volume, cercare di riconoscere di che solido si tratta e non utilizzare integrali).

3. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F} = \frac{\left(y^2, \frac{xy}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

lungo l'arco di curva γ grafico della funzione

$$y = \frac{2}{x} \text{ per } x \in \left[\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{12}\right].$$

Riportare l'impostazione e i calcoli, e semplificare il risultato ottenuto.

4. Si consideri la superficie materiale omogenea, di massa m, *semisferica*, di equazioni parametriche

$$\Sigma : \begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \quad \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi] \\ z = R\cos\phi. \end{cases}$$

(con $R > 0$ costante). Calcolare il suo momento d'inerzia *rispetto all'asse* y [*attenzione:* NON *rispetto all'asse* z] e il suo centroide (sfruttando le simmetrie).

5. Si consideri la funzione 6-periodica definita in $[0, 3]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ per } x \in [0, 2] \\ 3 - x \text{ per } x \in [2, 3] \end{cases}$$

e riflessa dispari in $[-3, 0]$.
a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	6
2	7
3	7
4	6
5	7
Tot.	33

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_T xe^{-y}dxdy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,-1),(2,1),(-2,0)$. *Si raccomanda di fare una figura, scrivere la rappresentazione analitica di T e prestare cura nell'impostazione.*

$$T = \left\{(x,y) : x \in [-2,0], -\frac{x}{2} - 1 \leq y \leq \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{(x,y) : x \in [0,2], x - 1 \leq y \leq \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\int\int_T xe^{-y}dxdy &= \int_{-2}^{0} x\left(\int_{-\frac{x}{2}-1}^{\frac{x}{4}+\frac{1}{2}} e^{-y}dy\right)dx + \int_0^2 x\left(\int_{x-1}^{\frac{x}{4}+\frac{1}{2}} e^{-y}dy\right)dx \\
&= \int_{-2}^{0} x\left(-e^{-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}} + e^{\frac{x}{2}+1}\right)dx + \int_0^2 x\left(-e^{-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}} + e^{-x+1}\right)dx \\
&= -e^{-1/2}\int_{-2}^{0} xe^{-\frac{x}{4}}dx + e\int_{-2}^{0} xe^{\frac{x}{2}}dx - e^{-1/2}\int_0^2 xe^{-\frac{x}{4}}dx + e\int_0^2 xe^{-x}dx \\
&= -e^{-1/2}\int_{-2}^{2} xe^{-\frac{x}{4}}dx + e\int_{-2}^{0} xe^{\frac{x}{2}}dx + e\int_0^2 xe^{-x}dx
\end{aligned}$$

Per fare un unico calcolo di primitiva, calcoliamo per $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int xe^{\alpha x}dx = x\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \int \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}dx = x\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(x - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Applicando questa formula successivamente per $\alpha = -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
I &= -e^{-1/2}\left[-4e^{-\frac{x}{4}}(x+4)\right]_{-2}^{2} + e\left[2e^{\frac{x}{2}}(x-2)\right]_{-2}^{0} + e\left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^2 \\
&= 4e^{-1/2}\left[6e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{\frac{1}{2}}\right] + 2e\left[-2 + 4e^{-1}\right] - e\left[3e^{-2} - 1\right] \\
&= 24e^{-1} - 8 - 4e + 8 - 3e^{-1} + e \\
&= \frac{21}{e} - 3e.
\end{aligned}$$

2. Calcolare la massa totale dell'ellissoide non omogeneo espresso analiticamente da

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

avente densità
$$\delta(x,y,z)=\frac{\mu}{a^2b^2c}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$
(dove con $a,b,c>0$ e $\mu>0$ sono costanti con le dimensioni di una lunghezza e di una massa, rispettivamente). *Si richiede* di usare le coordinate ellissoidali:
$$\begin{cases} x=a\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=b\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=c\rho\cos\phi \end{cases}$$

$$m=\int\int\int_{\Omega}\delta(x,y,z)\,dxdydz.$$
Ponendo
$$\begin{cases} x=a\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=b\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=c\rho\cos\phi \end{cases} \text{è noto che } dxdydz=abc\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta,\ \text{e si ha:}$$
$$\Omega'=\{(\rho,\phi,\theta):\rho\in[0,1],\phi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi]\}.$$

Dunque:
$$\begin{aligned}
m &= \int_0^1\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\mu}{a^2b^2c}\left(a^2\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta+b^2\rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta+c^2\rho^2\cos^2\phi\right)d\theta\right)\sin\phi d\phi\right)abc\rho^2 d\rho \\
&= \frac{\mu}{a^2b^2c}abc\left(\int_0^1\rho^4 d\rho\right)\left(\int_0^{\pi}\left(a^2\sin^2\phi\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta+b^2\sin^2\phi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta+2\pi c^2\cos^2\phi\right)\sin\phi d\phi\right) \\
&= \frac{\mu}{ab}\frac{1}{5}\int_0^{\pi}\left(\pi a^2\sin^2\phi+\pi b^2\sin^2\phi+2\pi c^2\cos^2\phi\right)\sin\phi d\phi \\
&= \frac{\mu}{ab}\frac{\pi}{5}\int_0^{\pi}\left[\left(a^2+b^2\right)\left(1-\cos^2\phi\right)+2c^2\cos^2\phi\right]\sin\phi d\phi
\end{aligned}$$
$\cos\phi=t;-\sin\phi d\phi=dt;t\in[1,-1]$
$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu}{ab}\frac{\pi}{5}\int_{-1}^{1}\left[\left(a^2+b^2\right)\left(1-t^2\right)+2c^2t^2\right]dt \\
&= \frac{\mu}{ab}\frac{\pi}{5}2\int_0^1\left[\left(a^2+b^2\right)+t^2\left(2c^2-a^2-b^2\right)\right]dt \\
&= \frac{\mu}{ab}\frac{\pi}{5}2\left\{\left(a^2+b^2\right)+\frac{1}{3}\left(2c^2-a^2-b^2\right)\right\} \\
&= \frac{4}{15}\pi\mu\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab}\right).
\end{aligned}$$

3. Si consideri il campo vettoriale
$$\underline{F}(x,y,z)=\frac{(yz,xz,xy)}{x^2+y^2+z^2}.$$

a. Si calcoli il rotore di $\underline{F}$. *Riportare impostazione e calcoli, e semplificare il più possibile l'espressione trovata.*
b. Si calcoli il flusso di $\nabla\times\underline{F}$ attraverso la semisfera di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel semispazio $z\geq 0$, orientata verso l'alto.

a. Ponendo $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ calcoliamo:

$$\begin{aligned}\nabla\times\underline{F} &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{yz}{\rho^2} & \frac{xz}{\rho^2} & \frac{xy}{\rho^2} \end{vmatrix} \\ &= \left(x\left(\partial_y\left(\frac{y}{\rho^2}\right)-\partial_z\left(\frac{z}{\rho^2}\right)\right), y\left(\partial_z\left(\frac{z}{\rho^2}\right)-\partial_x\left(\frac{x}{\rho^2}\right)\right), z\left(\partial_x\left(\frac{x}{\rho^2}\right)-\partial_y\left(\frac{y}{\rho^2}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

Poiché

$$\partial_{x_i}\left(\frac{x_i}{\rho^2}\right)=\frac{1}{\rho^2}-\frac{2x_i^2}{\rho^4}$$

$$\partial_y\left(\frac{y}{\rho^2}\right)-\partial_z\left(\frac{z}{\rho^2}\right)=\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{2y^2}{\rho^4}\right)-\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{2z^2}{\rho^4}\right)=\frac{2}{\rho^4}\left(z^2-y^2\right)$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\underline{F} &= \left(x\left(\frac{2}{\rho^4}\left(z^2-y^2\right)\right), y\frac{2}{\rho^4}\left(x^2-z^2\right), z\frac{2}{\rho^4}\left(y^2-x^2\right)\right) \\ &= \frac{2}{\rho^4}\left(x\left(z^2-y^2\right), y\left(x^2-z^2\right), z\left(y^2-x^2\right)\right)\end{aligned}$$

b. Sulla superficie della sfera unitaria è $\rho=1$,

$$\nabla\times\underline{F}=2\left(x\left(z^2-y^2\right), y\left(x^2-z^2\right), z\left(y^2-x^2\right)\right)$$

e il versore normale verso l'alto è semplicemente

$$\underline{n}=(x,y,z)$$

perciò

$$\begin{aligned}\nabla\times\underline{F}\cdot\underline{n} &= 2\left(x\left(z^2-y^2\right), y\left(x^2-z^2\right), z\left(y^2-x^2\right)\right)\cdot(x,y,z) \\ &= 2\left(x^2\left(z^2-y^2\right)+y^2\left(x^2-z^2\right)+z^2\left(y^2-x^2\right)\right) \\ &= 2\left(x^2z^2-x^2y^2+y^2x^2-y^2z^2+z^2y^2-z^2x^2\right)=0\end{aligned}$$

perciò il flusso è nullo.

4. Sia Σ la superficie conica di raggio R, altezza $2R$, vertice l'origine e asse z come asse di simmetria e supponiamo che sia una superficie materiale non omogenea avente densità

$$\delta(x,y,z)=\frac{x^2+z^2}{R^4}\mu$$

dove $\mu>0$ ha le dimensioni di una massa.

a. Scrivere le equazioni parametriche di Σ e calcolare il suo elemento d'area (si consiglia di scriverla come superficie di rotazione di un opportuno segmento).
b. Calcolare il momento d'inerzia di Σ rispetto all'asse z. *Riportare impostazione e passaggi, e riscrivere il risultato ottenuto nella forma il più possibile semplificata.*

a. La superficie Σ è generata dalla rotazione attorno all'asse z del segmento

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = t \\ z = b(t) = 2t \end{cases} \quad t \in [0, R]$$

perciò ha equazioni parametriche

$$\Sigma : \begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \quad t \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi] \\ z = 2t \end{cases}$$

e elemento d'area

$$dS = a(t)\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}\,dtd\theta = t\sqrt{5}dtd\theta.$$

b. Il momento d'inerzia è:

$$\begin{aligned} I &= \int\int_{\Sigma} \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\,dS \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R t^2 \cdot \frac{t^2\cos^2\theta + 4t^2}{R^4}\mu \cdot t\sqrt{5}dt\right)d\theta \\ &= \frac{\mu}{R^4}\sqrt{5}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta + 4\right)d\theta\left(\int_0^R t^5 dt\right) \\ &= \frac{\mu}{R^4}\sqrt{5}\left(\pi + 8\pi\right)\frac{R^6}{6} \\ &= \frac{3\pi}{2}\sqrt{5}\mu R^2 \end{aligned}$$

5. Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[0, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ per } x \in [0,1] \\ 2 - x \text{ per } x \in [1,2] \end{cases}$$

e riflessa pari in $[-2, 0]$.
a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

$a.$ La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[-2, 2]$. I coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{k}\right)$.
$b.$ La funzione è pari, perciò $b_k = 0$ per ogni k. Per calcolare gli a_k, poiché $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \int_0^2 f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx \\
&= \int_0^1 \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 (2-x)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx
\end{aligned}$$

per $k \geq 1$

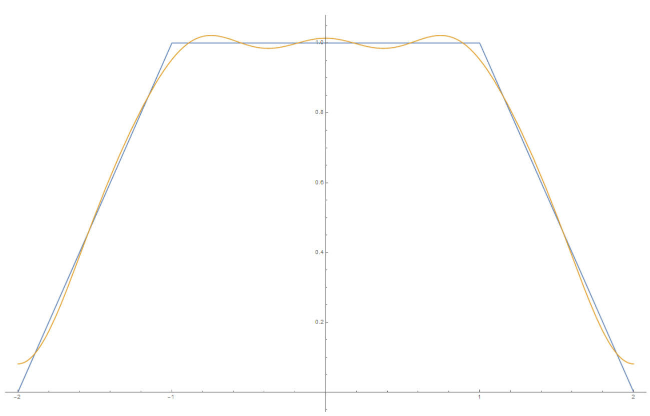
$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 + \left\{\left[(2-x)\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx\right\} \\
&= \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi}\left[-\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^2 \\
&= -\frac{4}{k^2\pi^2}\left[\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \cos(k\pi)\right] \\
&= \frac{4}{k^2\pi^2}\left[\cos(k\pi) - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

$$a_0 = \int_0^1 dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{3}{2}.$$

La serie di Fourier di f è

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \\
&= \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left[\cos(k\pi) - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right]\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right).
\end{aligned}$$

Grafico di $f(x)$ insieme alla sua somma parziale di Fourier fino a $n = 5$:



Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	6
2	7
3	7
4	7
5	6
Tot.	33

1. Detta Ω la lamina materiale omogenea di massa m contornata dalla curva del piano xy avente equazione polare:

$$\rho = R\sqrt{\sin\theta},\ \ \theta \in [0,\pi]$$

con $R > 0$ fissato, calcolare l'area della lamina Ω e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse x. Riportare impostazione e passaggi.

Per le formule di Gauss-Green si ha:

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(R\sqrt{\sin\theta}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}R^2\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}R^2 2 = R^2.$$

Il momento d'inerzia è:

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega y^2 dxdy$$

In coordinate polari,

$$\Omega' = \left\{(\rho,\theta) : \theta \in [0,\pi], \rho \in \left[0, R\sqrt{\sin\theta}\right]\right\}, y = \rho\sin\theta, dxdy = \rho d\rho d\theta,$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{m}{R^2}\int_0^\pi \left(\int_0^{R\sqrt{\sin\theta}} \rho^2 \sin^2\theta \rho d\rho\right) d\theta \\
&= \frac{m}{R^2}\int_0^\pi \sin^2\theta \frac{\left(R\sqrt{\sin\theta}\right)^4}{4} d\theta \\
&= \frac{mR^2}{4}\int_0^\pi \sin^4\theta d\theta = \frac{mR^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{mR^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta \\
&= \frac{mR^2}{8}\left[\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{mR^2}{8}\cdot\frac{3}{4}\pi \\
&= \frac{3}{32}\pi m R^2.
\end{aligned}$$

2. Calcolare la coordinata x del centroide del solido omogeneo Ω descritto analiticamente da

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : z \in \left[0, \frac{h}{2}\right], x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h^2}(h-z)^2, x \geq 0\right\}$$

con $R, h > 0$ costanti. (Per il calcolo del volume, cercare di riconoscere di che solido si tratta e non utilizzare integrali).

Ω è la metà (nel semispazio $x \geq 0$) del tronco di cono che si ottiene dal cono di raggio R e altezza h prendendo la metà inferiore.
Il tronco di cono ha volume (calcolato per differenza tra il volume del cono di raggio R e altezza h e quello di raggio $R/2$ e altezza $h/2$):

$$\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi R^2 h \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{24}\pi R^2 h$$

perciò

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{24}\pi R^2 h = \frac{7}{48}\pi R^2 h.$$

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{1}{|\Omega|} \int\int\int_{\Omega} x dx dy dz \\
&= \frac{48}{7\pi R^2 h} \int_0^{\frac{h}{2}} \left(\int\int_{x^2+y^2 \leq \frac{R^2}{h^2}(h-z)^2, x \geq 0} x dx dy \right) dz
\end{aligned}$$

Utilizziamo nell'integrale interno le coordinate polari:

$$\begin{aligned}
&= \frac{48}{7\pi R^2 h} \int_0^{\frac{h}{2}} \left(\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \cos\theta d\theta \right) \rho d\rho \right) dz \\
&= \frac{48}{7\pi R^2 h} \int_0^{\frac{h}{2}} \left(2 \int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} \rho^2 d\rho \right) dz \\
&= \frac{48}{7\pi R^2 h} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{2}{3} \frac{R^3}{h^3} (h-z)^3 dz \\
&= \frac{32R}{7\pi h^4} \int_0^{\frac{h}{2}} (h-z)^3 dz = \frac{32R}{7\pi h^4} \left[-\frac{1}{4} (h-z)^4 \right]_0^{\frac{h}{2}} \\
&= \frac{8R}{7\pi h^4} \left[h^4 - \left(\frac{h}{2}\right)^4 \right] = \frac{8R}{7\pi} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{14\pi} R.
\end{aligned}$$

3. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F}(x,y) = \left(2xe^{-y^2-z^2}, -2y\left(x^2+z^2\right)e^{-y^2-z^2}, 2ze^{-y^2-z^2}\left(1-x^2-z^2\right) \right).$$

a. Dopo aver verificato se è irrotazionale nel suo insieme di definizione, stabilire se è conservativo nel suo insieme di definizione e calcolare in tal caso un potenziale.
b. Quindi, calcolare il lavoro del campo lungo l'arco di curva γ:

$$\underline{r}(t) = (t, t\cos t, t\sin t), \text{ per } t \in [0, 2\pi].$$

Si ha $\underline{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Verifichiamo se è irrotazionale in $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\partial_x F_2 &= -4xye^{-y^2-z^2} = \partial_y F_1 \\
\partial_x F_3 &= -4xze^{-y^2-z^2} = \partial_z F_1 \\
\partial_y F_3 &= -4yz\left(1-x^2-z^2\right)e^{-y^2-z^2} = \partial_z F_2
\end{aligned}$$

Poiché il campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^3$ è anche conservativo in $\mathbb{R}^3$ (che è semplicemente connesso).
Calcoliamone un potenziale. Cerchiamo $U(x,y,z)$ tale che:

$$\begin{aligned}
U_x &= F_1 = 2xe^{-y^2-z^2} \\
U(x,y,z) &= \int 2xe^{-y^2-z^2}dx = x^2e^{-y^2-z^2} + f(y,z). \\
U_y &= -2yx^2e^{-y^2-z^2} + \partial_y f(y,z) \\
&= F_2 = -2y\left(x^2+z^2\right)e^{-y^2-z^2} \Rightarrow \partial_y f(y,z) = -2yz^2e^{-y^2-z^2}, \\
f(y,z) &= \int -2yz^2e^{-y^2-z^2}dy = z^2e^{-y^2-z^2} + g(z) \\
U(x,y,z) &= x^2e^{-y^2-z^2} + z^2e^{-y^2-z^2} + g(z) \\
U_z(x,y,z) &= -2zx^2e^{-y^2-z^2} + \left(2z-2z^3\right)e^{-y^2-z^2} + g'(z) \\
&= F_3 = 2ze^{-y^2-z^2}\left(1-x^2-z^2\right) \Rightarrow g'(z) = 0, g = c,
\end{aligned}$$

perciò un potenziale è:

$$U(x,y,z) = \left(x^2+z^2\right)e^{-y^2-z^2}.$$

Calcoliamo il lavoro. Utilizzando il potenziale, si ha:$(t, t\cos t, t\sin t)$

$$\begin{aligned}
L &= \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = U(\underline{r}(2\pi)) - U(\underline{r}(0)) = U(2\pi,2\pi,0) - U(0,0,0) \\
&= 4\pi^2e^{-4\pi^2}.
\end{aligned}$$

4. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazione

$$z = \sqrt{x} \text{ per } x \in [0,2].$$

Dopo aver scritto le equazioni parametriche di γ e di Σ, l'elemento d'area di Σ, e aver individuato gli eventuali punti singolari della superficie, calcolare l'integrale

$$\int\int_\Sigma \frac{|x|}{z}dS.$$

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = t \\ z = b(t) = \sqrt{t} \end{cases} \quad t \in [0,2].$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \quad t \in [0,2], \theta \in [0,2\pi]. \\ z = \sqrt{t} \end{cases}$$

$$a'(t) = 1, b'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\begin{aligned} dS &= |a(t)| \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} dt d\theta \\ &= t\sqrt{1 + \frac{1}{4t}} dt d\theta \end{aligned}$$

Si ha un punto singolare per $t = 0$, corrispondente a $(0,0,0)$.

$$\begin{aligned} \int\int_\Sigma \frac{|x|}{z} dS &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \frac{|t\cos\theta|}{\sqrt{t}} t\sqrt{\frac{4t+1}{4t}} dt \right) d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} |\cos\theta| \, d\theta \right) \left(\frac{1}{2} \int_0^2 t\sqrt{4t+1} dt \right). \end{aligned}$$

Ora:

$$\int_0^{2\pi} |\cos\theta| \, d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = 4.$$

$$\frac{1}{2} \int_0^2 t\sqrt{4t+1} dt =$$

$$\sqrt{4t+1} = u; 4t+1 = u^2; 4dt = 2udu; dt = \frac{1}{2} udu; t = \frac{u^2-1}{4}; u \in [1,3]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_1^3 \left(\frac{u^2-1}{4} \right) u \frac{1}{2} udu = \frac{1}{16} \int_1^3 \left(u^4 - u^2 \right) du \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right]_1^3 = \frac{1}{16} \left[\frac{3^5}{5} - \frac{3^3}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{16} \left[3^3 \left(\frac{9}{5} - \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{15} \right] = \frac{1}{16} \left[3^3 \frac{22}{15} + \frac{2}{15} \right] \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{27 \cdot 22 + 2}{15} \right] = \frac{1}{8} \left[\frac{27 \cdot 11 + 1}{15} \right]. \end{aligned}$$

Perciò

$$\int\int_\Sigma \frac{|x|}{z} dS = 4 \cdot \frac{1}{8} \left[\frac{27 \cdot 11 + 1}{15} \right] = \frac{27 \cdot 11 + 1}{30} = \frac{298}{30} = \frac{149}{15}.$$

5. Si consideri la curva piana γ di equazioni parametriche

$$\underline{r}(t) = (5\cos t - \sin(4t), 5\sin t - \cos(4t)) \text{ per } t \in [0,2\pi].$$

Dopo aver verificato analiticamente che si tratta di un arco di curva regolare e chiuso, utilizzando le formule di Gauss-Green calcolare l'area della regione piana contornata da γ.

Si ha $\underline{r}(0) = \underline{r}(2\pi) = (5, -1)$ perciò la curva è chiusa, inoltre è C^1 e

$$\begin{aligned}
\underline{r}'(t) &= (-5\sin t - 4\cos(4t), 5\cos t + 4\sin(4t)) \\
|\underline{r}'(t)|^2 &= 25 + 16 + 40(\cos 4t \sin t + \cos t \sin 4t) \\
&= 41 + 40\sin 5t \geq 41 - 40 = 1,
\end{aligned}$$

dunque $|\underline{r}'(t)| \neq 0$ per ogni t, e la curva è regolare.
Detta Ω la regione di contorno γ, per le formule di Gauss-Green si ha:

$$\begin{aligned}
|\Omega| &= \frac{1}{2}\int_\gamma (xdy - ydx) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{(5\cos t - \sin(4t))(5\cos t + 4\sin(4t)) - (5\sin t - \cos(4t))(-5\sin t - 4\cos(4t))\}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{25 - 4 + 15\cos t \sin 4t + 15\sin t \cos 4t\}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{21 + 15\sin 5t\}\, dt = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \cdot 21 = 21\pi.
\end{aligned}$$

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°3

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_T x\,|y|\,dxdy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,-1),(2,1),(-2,0)$. *Si raccomanda di fare una figura, scrivere la rappresentazione analitica di T e prestare cura nell'impostazione.*

$$T=\{(x,y):y\in[-1,0],-2y-2\leq x\leq y+1\}\cup\{(x,y):y\in[0,1],4y-2\leq x\leq y+1\}$$

$$\begin{aligned}\int\int_T x\,|y|\,dxdy &= \int_{-1}^{0}-y\left(\int_{-2y-2}^{y+1}xdx\right)dy+\int_0^1 y\left(\int_{4y-2}^{y+1}xdx\right)dy\\ &=\int_{-1}^{0}-\frac{y}{2}\left[(y+1)^2-(-2y-2)^2\right]dy+\int_0^1\frac{y}{2}\left[(y+1)^2-(4y-2)^2\right]dy\\ &=\int_{-1}^{0}-\frac{y}{2}\left[-3(y+1)^2\right]dy+\int_0^1\frac{y}{2}\left[-15y^2+18y-3\right]dy\\ &=\frac{3}{2}\left\{\int_{-1}^{0}\left(y^3+2y^2+y\right)dy+\int_0^1\left(-5y^3+6y^2-y\right)dy\right\}\\ &=\frac{3}{2}\left\{\left[\frac{y^4}{4}+\frac{2}{3}y^3+\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{5}{4}y^4+2y^3-\frac{y^2}{2}\right]_0^1\right\}\\ &=\frac{3}{2}\left\{-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}+2-\frac{1}{2}\right\}\\ &=\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{6}\right\}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2. Calcolare la coordinata z del baricentro del solido non omogeneo espresso analiticamente da

$$\Omega=\left\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1, z\geq 0\right\}$$

avente densità

$$\delta(x,y,z)=\frac{\mu}{a^2b^2c}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

(dove con $a, b, c > 0$ e $\mu > 0$ sono costanti con le dimensioni di una lunghezza e di una massa, rispettivamente), sapendo che la massa totale è $m = \frac{2}{15}\pi\mu\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab}\right)$. *Si richiede* di usare le coordinate ellissoidali:

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\phi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\phi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\phi \end{cases}$$

$$z_c = \frac{1}{m}\int\int\int_\Omega z\delta(x,y,z)\,dxdydz.$$

Ponendo

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\phi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\phi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\phi \end{cases} \text{è noto che } dxdydz = abc\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta, \text{ e si ha:}$$

$$\Omega' = \left\{(\rho,\phi,\theta) : \rho \in [0,1], \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_\Omega z\delta(x,y,z)\,dxdydz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} c\rho\cos\phi\frac{\mu}{a^2b^2c}\left(a^2\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + b^2\rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + c^2\rho^2\cos^2\phi\right)d\theta\right)\sin\phi d\phi\right) abc\rho^2 d\rho \\
&= \frac{\mu}{a^2b^2c}abc^2\left(\int_0^1 \rho^5 d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^2\sin^2\phi\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta + b^2\sin^2\phi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta + 2\pi c^2\cos^2\phi\right)\sin\phi\cos\phi d\phi\right) \\
&= \frac{\mu c}{ab}\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\pi a^2\sin^2\phi + \pi b^2\sin^2\phi + 2\pi c^2\cos^2\phi\right)\sin\phi\cos\phi d\phi \\
&= \frac{\mu c}{ab}\frac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(a^2+b^2\right)\sin^3\phi\cos\phi + 2c^2\cos^3\phi\sin\phi\right]d\phi \\
&= \frac{\mu c}{ab}\frac{\pi}{6}\left[\left(a^2+b^2\right)\frac{\sin^4\phi}{4} - 2c^2\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\mu c}{ab}\frac{\pi}{24}\left(a^2+b^2+2c^2\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_c &= \frac{1}{m}\frac{\mu c}{ab}\frac{\pi}{24}\left(a^2+b^2+2c^2\right) \\
&= \frac{15ab}{2\pi\mu\left(a^2+b^2+c^2\right)}\frac{\mu c}{ab}\frac{\pi}{24}\left(a^2+b^2+2c^2\right) \\
&= \frac{5}{16}c\left(\frac{a^2+b^2+2c^2}{a^2+b^2+c^2}\right).
\end{aligned}$$

3. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \frac{(-y,x,z)}{x^2+y^2+z^2}$$

lungo l'arco di curva γ di equazioni parametriche

$$\underline{r}\,(t) = (a\cos t, a\sin t, 2at) \;\text{ per } t \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

con $a > 0$ costante. Riportare impostazione e calcoli, e *semplificare il risultato ottenuto.*

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \underline{F}\,(r\,(t)) \cdot \underline{r}'\,(t)\,dt$$

$$\begin{aligned}
\underline{F}\,(r\,(t)) &= \frac{(-a\sin t, a\cos t, 2at)}{a^2 + 4a^2t^2} = \frac{(-\sin t, \cos t, 2t)}{a\,(1+4t^2)} \\
\underline{r}'\,(t) &= (-a\sin t, a\cos t, 2a) \\
\underline{F}\,(r\,(t)) \cdot \underline{r}'\,(t) &= \frac{(-\sin t, \cos t, 2t)}{a\,(1+4t^2)} \cdot (-a\sin t, a\cos t, 2a) \\
&= \frac{a + 4at}{a\,(1+4t^2)} = \frac{1+4t}{1+4t^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L = \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1+4t}{1+4t^2} dt \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1+4t^2} + \frac{4t}{1+4t^2} \right) dt \\
&= \left[\frac{1}{2} \arctan\,(2t) + \frac{1}{2}\log\left(1+4t^2\right) \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\log\,(4) \\
&= \frac{\pi}{6} + \log 2.
\end{aligned}$$

4. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = Rt^2 \\ z = \frac{R}{3}t^3 \end{cases} \; t \in [-1, 1]$$

con $R > 0$ costante.
a. Scrivere le equazioni parametriche di Σ, l'elemento d'area di Σ, e determinare gli eventuali punti singolari di Σ.
b. Calcolare l'area di Σ. Riportare impostazione e passaggi.

a. La superficie Σ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = Rt^2\cos\theta \\ y = Rt^2\sin\theta \quad t \in [-1,1]\,, \theta \in [0, 2\pi]\,. \\ z = \frac{R}{3}t^3 \end{cases}$$

Posto $a(t) = Rt^2, b(t) = \frac{R}{3}t^3$, calcoliamo:

$$a'(t) = 2Rt; b'(t) = Rt^2,$$

l'elemento d'area è:

$$\begin{aligned} dS &= |a(t)| \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} dt d\theta \\ &= Rt^2 \sqrt{4R^2t^2 + R^2t^4} dt d\theta \\ &= R^2 t^2 |t| \sqrt{4 + t^2} dt d\theta. \end{aligned}$$

La superficie è singolare per $t = 0$, cioè: $(0,0,0)$ è punto singolare.
b. Calcoliamo

$$\begin{aligned} |\Sigma| &= \int \int_\Sigma dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^1 R^2t^2 |t| \sqrt{4+t^2} dt \right) d\theta \\ &= 4\pi R^2 \int_0^1 t^3 \sqrt{4+t^2} dt \\ &\left[\sqrt{4+t^2} = u; 4 + t^2 = u^2; tdt = udu; t^2 = u^2 - 4 \right] \\ &= 4\pi R^2 \int_2^{\sqrt{5}} \left(u^2 - 4\right) \cdot u \cdot udu \\ &= 4\pi R^2 \left[\frac{u^5}{5} - \frac{4}{3}u^3 \right]_2^{\sqrt{5}} \\ &= 4\pi R^2 \left[5\sqrt{5} - \frac{4}{3}5\sqrt{5} - \frac{32}{5} + \frac{4}{3} \cdot 8 \right] \\ &= 4\pi R^2 \left(\frac{64}{15} - \frac{5}{3}\sqrt{5} \right). \end{aligned}$$

5. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(x, y, z^2\right)$$

attraverso la superficie Σ grafico della funzione

$$z = e^{-x^2-y^2} \text{ per } x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0$$

orientata verso l'alto (cioè con la componente z del vettore normale positiva). *Riportare con cura impostazione e passaggi.*

Posto $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ si ha:

$$\begin{aligned} \underline{n} dS &= (-f_x, -f_y, 1) \, dxdy \\ &= \left(2xe^{-x^2-y^2}, 2ye^{-x^2-y^2}, 1\right) dxdy \end{aligned}$$

$$\underline{F}(x, y, f(x,y)) = \left(x, y, e^{-2\left(x^2+y^2\right)}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(\underline{F},\Sigma\right) &= \int\int_{\Sigma} \underline{F}\cdot\underline{n}dS \\
&= \int\int_{\{(x,y):x^2+y^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0\}} \left(2x^2e^{-x^2-y^2}+2y^2e^{-x^2-y^2}+e^{-2\left(x^2+y^2\right)}\right)dxdy \\
&= \int\int_{\{(x,y):x^2+y^2\leq R^2, x\geq 0, y\geq 0\}} \left(2\left(x^2+y^2\right)e^{-x^2-y^2}+e^{-2\left(x^2+y^2\right)}\right)dxdy
\end{aligned}
$$

passando in coordinate polari,

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R \left(2\rho^2e^{-\rho^2}+e^{-2\rho^2}\right)\rho d\rho d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^R 2\rho^3e^{-\rho^2}d\rho+\int_0^R e^{-2\rho^2}\rho d\rho\right\}.
\end{aligned}
$$

Ora:

$$
\begin{aligned}
\int_0^R 2\rho^3e^{-\rho^2}d\rho &= \int_0^R\left(-2\rho e^{-\rho^2}\right)\left(-\rho^2\right)d\rho = \int_0^R\left(e^{-\rho^2}\right)'\left(-\rho^2\right)d\rho \\
&= \left[e^{-\rho^2}\left(-\rho^2\right)\right]_0^R+\int_0^R 2\rho e^{-\rho^2}d\rho \\
&= -R^2e^{-R^2}+\left[-e^{-\rho^2}\right]_0^R = -R^2e^{-R^2}+1-e^{-R^2} \\
&= 1-e^{-R^2}\left(1+R^2\right).
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^R e^{-2\rho^2}\rho d\rho = \left[-\frac{1}{4}e^{-2\rho^2}\right]_0^R = \frac{1-e^{-2R^2}}{4}
$$

perciò

$$
\Phi\left(\underline{F},\Sigma\right) = \frac{\pi}{2}\left\{1-e^{-R^2}\left(1+R^2\right)+\frac{1-e^{-2R^2}}{4}\right\}.
$$

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2021/2022. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°4

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Detta Ω la lamina materiale omogenea di massa m contornata dalla curva del piano xy avente equazione polare:

$$\rho = R\sqrt{\sin\theta},\ \ \theta \in [0, \pi]$$

con $R > 0$ fissato, calcolare l'area della lamina Ω e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse y. Riportare impostazione e passaggi.

Per le formule di Gauss-Green si ha:

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(R\sqrt{\sin\theta}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}R^2\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}R^2 2 = R^2.$$

Il momento d'inerzia è:

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega x^2 dxdy$$

In coordinate polari,

$$\Omega' = \left\{(\rho,\theta) : \theta \in [0,\pi], \rho \in \left[0, R\sqrt{\sin\theta}\right]\right\}, x = \rho\cos\theta, dxdy = \rho d\rho d\theta,$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{m}{R^2}\int_0^\pi \left(\int_0^{R\sqrt{\sin\theta}} \rho^2\cos^2\theta\rho d\rho\right) d\theta \\
&= \frac{m}{R^2}\int_0^\pi \cos^2\theta \frac{\left(R\sqrt{\sin\theta}\right)^4}{4} d\theta \\
&= \frac{mR^2}{4}\int_0^\pi \cos^2\theta\sin^2\theta d\theta = \frac{mR^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{mR^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{mR^2}{8}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{32}mR^2.
\end{aligned}$$

2. Calcolare la coordinata z del centroide del solido omogeneo Ω descritto analiticamente da

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : z \in \left[0, \frac{h}{2}\right], x^2 + y^2 \le \frac{R^2}{h^2}(h-z)^2, x \ge 0\right\}$$

con $R, h > 0$ costanti. (Per il calcolo del volume, cercare di riconoscere di che solido si tratta e non utilizzare integrali).

Ω è la metà (nel semispazio $x \geq 0$) del tronco di cono che si ottiene dal cono di raggio R e altezza h prendendo la metà inferiore.
Il tronco di cono ha volume (calcolato per differenza tra il volume del cono di raggio R e altezza h e quello di raggio $R/2$ e altezza $h/2$):

$$\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi R^2 h \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{24}\pi R^2 h$$

perciò

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{24}\pi R^2 h = \frac{7}{48}\pi R^2 h.$$

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{|\Omega|} \int\int\int_\Omega z dxdydz \\ &= \frac{48}{7\pi R^2 h} \int_0^{\frac{h}{2}} \left(z \int\int_{x^2+y^2 \leq \frac{R^2}{h^2}(h-z)^2, x \geq 0} dxdy \right) dz \end{aligned}$$

L'integrale interno è l'area del semicerchio di raggio $\frac{R}{h}(h-z)$

$$\begin{aligned} &= \frac{48}{7\pi R^2 h} \int_0^{\frac{h}{2}} z \frac{\pi}{2} \frac{R^2}{h^2} (h-z)^2 dz \\ &= \frac{24}{7h^3} \int_0^{\frac{h}{2}} z \left(h^2 - 2zh + z^2\right) dz \\ &= \frac{24}{7h^3} \left[\frac{z^2 h^2}{2} - \frac{2z^3 h}{3} + \frac{z^4}{4}\right]_0^{\frac{h}{2}} \\ &= \frac{24}{7} h \left(\frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{2}{3 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 16}\right) \\ &= \frac{3}{7} h \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{7} h \frac{11}{24} = \frac{11}{56} h. \end{aligned}$$

3. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F} = \frac{\left(y^2, \frac{xy}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

lungo l'arco di curva γ grafico della funzione

$$y = \frac{2}{x} \text{ per } x \in \left[\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{12}\right].$$

Riportare l'impostazione e i calcoli, e semplificare il risultato ottenuto.

La curva ha equazioni parametriche:

$$\underline{r}(t) = \left(t, \frac{2}{t}\right) \text{ per } t \in \left[\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{12}\right],$$

per cui si ha:

$$\underline{r}'(t) = \left(1, -\frac{2}{t^2}\right)$$

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) = \frac{\left(\frac{4}{t^2}, 1\right)}{\sqrt{t^2 + \frac{4}{t^2}}}$$

quindi il lavoro è

$$\begin{aligned}
L &= \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} \\
&= \int_{\sqrt[4]{5}}^{\sqrt[4]{12}} \frac{\left(\frac{4}{t^2}, 1\right)}{\sqrt{t^2 + \frac{4}{t^2}}} \cdot \left(1, -\frac{2}{t^2}\right) dt = \int_{\sqrt[4]{5}}^{\sqrt[4]{12}} \frac{\frac{2}{t^2}}{\sqrt{t^4+4}} t dt = \int_{\sqrt[4]{5}}^{\sqrt[4]{12}} \frac{1}{t^4\sqrt{t^4+4}} 2t^3 dt \\
&\left[\sqrt{t^4+4} = u; t^4 + 4 = u^2; 4t^3 dt = 2udu; t^4; t^4 = u^2 - 4\right] \\
&= \int_3^4 \frac{1}{(u^2-4)\,u} udu = \frac{1}{4}\int_3^4 \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right) du \\
&= \frac{1}{4}\left[\log\left(\frac{u-2}{u+2}\right)\right]_3^4 = \frac{1}{4}\left[\log\left(\frac{2}{6}\right) - \log\left(\frac{1}{5}\right)\right] = \frac{1}{4}(\log 5 - \log 3) = \frac{1}{4}\log\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

4. Si consideri la superficie materiale omogenea, di massa m, *semisferica*, di equazioni parametriche

$$\Sigma : \begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \quad \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi] \\ z = R\cos\phi. \end{cases}$$

(con $R > 0$ costante). Calcolare il suo momento d'inerzia *rispetto all'asse* y [*attenzione:* NON *rispetto all'asse* z] e il suo centroide (sfruttando le simmetrie).

Sappiamo che $dS = R^2 \sin\phi d\phi d\theta$, perciò

$$\begin{aligned}
I &= \frac{m}{|\Sigma|}\int\int_\Sigma \left(x^2 + z^2\right) dS \\
&= \frac{m}{2\pi R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(R^2\sin^2\phi\cos^2\theta + R^2\cos^2\phi\right) d\theta\right) R^2 \sin\phi d\phi \\
&= \frac{mR^2}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\pi\sin^2\phi + 2\pi\cos^2\phi\right)\sin\phi d\phi \\
&= \frac{mR^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos^2\phi\right)\sin\phi d\phi \\
&= \frac{mR^2}{2}\left[-\cos\phi - \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{mR^2}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}mR^2.
\end{aligned}$$

Il centroide, per simmetria, avrà $x_c = y_c = 0$.

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{|\Sigma|} \int \int_{\Sigma} z dS \\ &= \frac{1}{2\pi R^2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos\phi R^2 \sin\phi d\phi \right) \\ &= R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \sin\phi d\phi = R \left[\frac{\sin^2\phi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

Quindi il centroide è $\left(0, 0, \frac{R}{2}\right)$.

5. Si consideri la funzione 6-periodica definita in $[0,3]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ per } x \in [0,2] \\ 3 - x \text{ per } x \in [2,3] \end{cases}$$

e riflessa dispari in $[-3,0]$.
a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La funzione periodizzata è discontinua su $\mathbb{R}$ (in 0 e nei punti $6k$) e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[-3,3]$ tranne in 0, in cui converge a $\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = 0$. I coefficienti di Fourier saranno solo infinitesimi, ma non $o\left(\frac{1}{k}\right)$.
b. La funzione è dispari, perciò $a_k = 0$ per ogni k. Per calcolare i b_k, poiché $T = 6$, $\omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(k\omega x)\, dx = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(k\omega x)\, dx = \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right) dx \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \int_0^2 \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right) dx + \int_2^3 (3-x) \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right) dx \right\} \\ &= \frac{2}{3} \left[-\frac{3}{k\pi} \cos\left(k\frac{\pi}{3}x\right) \right]_0^2 + \frac{2}{3} \left\{ \left[-(3-x) \frac{3}{k\pi} \cos\left(k\frac{\pi}{3}x\right) \right]_2^3 - \int_2^3 \frac{3}{k\pi} \cos\left(k\frac{\pi}{3}x\right) dx \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\left\{\frac{3}{k\pi}\left(1-\cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right)\right)+\frac{3}{k\pi}\cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right)-\frac{3}{k\pi}\left[\frac{3}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right)\right]_2^3\right\} \\
&= \frac{2}{3}\left\{\frac{3}{k\pi}-\frac{9}{k^2\pi^2}\left[-\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right)\right]\right\} \\
&= \frac{2}{3}\left\{\frac{3}{k\pi}+\frac{9}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right)\right\} = \frac{2}{k\pi}+\frac{6}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right)
\end{aligned}
$$

La serie di Fourier di f è

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}+\frac{3}{k^2\pi}\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right)\right]\sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right).
\end{aligned}
$$

Grafico di $f(x)$ insieme alla sua somma parziale di Fourier fino a $n = 10$: