Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)____________________________________
codice persona (o n°di matricola)____________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Calcolare l'integrale doppio

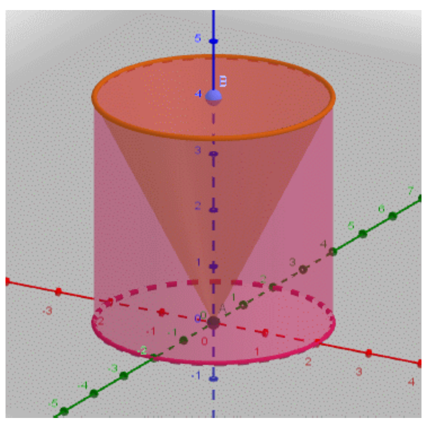
$$\int\int_{\Omega}\left(y^2-x\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right)e^{-x^2-y^2}dxdy$$

dove

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:1\leq x^2+y^2\leq 2, 0\leq y\leq x\right\}$$

Si raccomanda di fare una figura e prestare cura nell'impostazione.

2. Si consideri un solido materiale omogeneo Ω di massa m, formato da un cilindro di altezza h e raggio R, con base sul piano xy, centro della base nell'origine, asse lungo l'asse z positivo, a cui sia stato tolto un cono di uguale base e altezza (ma "capovolto"). Si veda la figura:



Si chiede di:
-calcolare il volume di Ω (senza usare integrali!);
-scrivere la rappresentazione analitica di Ω adatta al calcolo dell'integrale *per fili*;
-calcolare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse z.

3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(y, x, z\left(x^2+y^2\right)\right)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \quad t \in [0, 2\pi]\,. \\ z = 3t \end{cases}$$

4. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ assegnata nel piano xz dall'equazione

$$\gamma : \begin{cases} x = R + t \\ z = \frac{t^2}{r} \end{cases} \quad t \in [-r, +r]$$

dove $R > r > 0$ sono costanti fissate. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e calcolato l'elemento d'area di Σ, calcolare l'area di Σ.

5. Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[-2, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ per } |x| \le 1 \\ 0 \text{ per } 1 < |x| \le 2 \end{cases}$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Sia Ω la lamina materiale piana omogenea del piano xy contornata dalla curva di equazione polare:

$$\rho = R\cos^2\theta, \text{ per } -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

con $R > 0$ costante fissata. Calcolare l'area della regione (sfruttando le formule dedotte dal teorema di Gauss-Green) e le coordinate del centroide.
Si raccomanda di fare un disegno e sfruttare le simmetrie.

2. Si consideri il solido materiale non omogeneo Ω descritto dal cilindro di raggio R e altezza h con asse sull'asse $z > 0$ e base sul piano xy, avente densità:

$$\delta(x, y, z) = \left(2R^2 - \left(x^2 + y^2\right)\right)\frac{\mu}{hR^4},$$

dove $\mu > 0$ è una costante avente le dimensioni di una massa. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse x (attenzione! NON rispetto all'asse z!).

3. Si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F}(x, y, z) = \left(xz\cos(xz) + y\sin x, -\cos x, x^2\cos(xz) - \frac{1+\cos(xz)}{z^2} - x\frac{\sin(xz)}{z}\right).$$

a. Si verifichi se il campo è irrotazionale o meno nel dominio $\Omega = \{(x, y, z) : z > 0\}$.
b. Si stabilisca se il campo è conservativo o meno nel dominio Ω, calcolando in caso affermativo un potenziale di $\underline{F}$.

4. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R + r\cos^3 t \\ z = r\sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

con $R > r > 0$ costanti fissate. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ, l'elemento d'area di Σ, e aver individuato gli eventuali punti singolari della superficie, calcolare l'area di Σ.

5. Sia Σ la superficie cilindrica descritta da

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\}$$

e si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(xy^2, yx^2, |z|^3 \right).$$

a. Scrivere le equazioni parametriche di Σ, il suo elemento d'area e il suo versore normale.
b. Calcolare il flusso di $\underline{F}$ attraverso Σ, orientata con la normale che si allontana dall'asse z (fare un disegno).
Riportare con cura impostazione e passaggi, semplificare il risultato ottenuto.

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Tema n°3

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

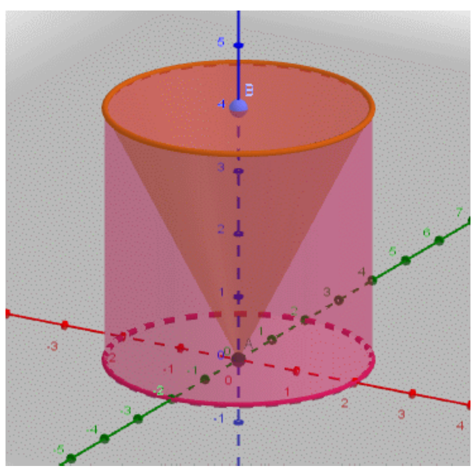
Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Si consideri la lamina piana materiale Ω di massa m rappresentata nel piano xy dal trapezio di vertici:

$$(0,0)\,,(a,0)\,,\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a\right),\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$

con $a>0$ costante avente le dimensioni di una lunghezza. Calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'asse y.
Si raccomanda di fare una figura, scrivere la rappresentazione analitica di Ω e prestare cura nell'impostazione.

2. Si consideri un solido materiale omogeneo Ω di massa m, formato da un cilindro di altezza h e raggio R, con base sul piano xy, centro della base nell'origine, asse lungo l'asse z positivo, a cui sia stato tolto un cono di uguale base e altezza (ma "capovolto"). Si veda la figura:



Si chiede di:
-calcolare il volume di Ω (senza usare integrali!);
-scrivere la rappresentazione analitica di Ω adatta al calcolo dell'integrale *per fili*;
-calcolare il centroide del solido (sfruttando le simmetrie).

3. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = (-y, x, z)$$

lungo l'arco di curva γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \quad t \in [0, 2\pi], \\ z = ht \end{cases}$$

con R, h costanti positive. Riportare l'impostazione e i calcoli e semplificare il risultato ottenuto.

4 Si consideri la superficie materiale Σ, non omogenea, di forma *sferica* di centro l'origine e raggio R, avente densità

$$\delta(x,y,z) = \left(1 + \frac{|z|}{R}\right)\frac{\mu}{R^2},$$

dove $\mu > 0$ è una costante avente le dimensioni di una massa. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse y. (Attenzione! NON attorno all'asse z).
Si raccomanda di scrivere anzitutto le equazioni parametriche di Σ e il suo elemento d'area.

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1, 1]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ per } x \in [0,1] \\ 0 \text{ per } x \in [-1,0] \end{cases}$$

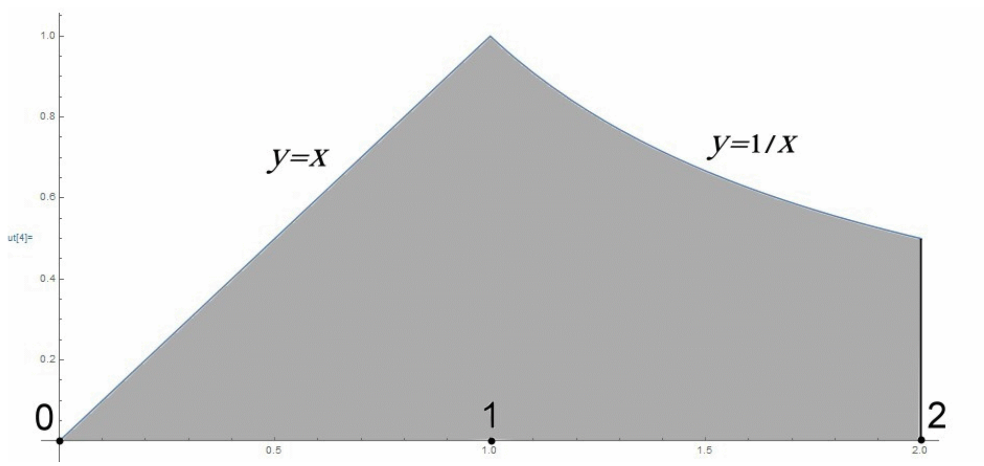
a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Tema n°4

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)____________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Sia Ω la regione piana descritta in figura:



Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_{\Omega} x^2 e^{-xy} dx dy$$

e *semplificare* il risultato ottenuto.

2. Si consideri il solido materiale non omogeneo Ω descritto dal cilindro di raggio R e altezza h con asse sull'asse $z > 0$ e base sul piano xy, avente densità:

$$\delta(x, y, z) = \left(2R^2 - \left(x^2 + y^2\right)\right) \frac{\mu}{hR^4},$$

dove $\mu > 0$ è una costante avente le dimensioni di una massa. Calcolare la massa totale m del solido e la coordinata z_c del suo baricentro.

3. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F} = \frac{(-y, x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

lungo l'arco di curva γ di equazione polare

$$\rho = R\theta e^{-\theta} \text{ per } x \in [0, 2\pi] .$$

Riportare l'impostazione e i calcoli, e semplificare il risultato ottenuto.

4. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ (ellisse) descritta nel piano xz dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R + r\cos\phi \\ z = \frac{r}{2}\sin\phi \end{cases} \text{ per } \phi \in [0, 2\pi]$$

dove $R > r > 0$ sono costanti fissate. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e il suo elemento d'area, calcolare l'integrale di superficie

$$\int\int_{\Sigma} |z| \, dS.$$

5. Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[-2, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \text{ per } |x| \leq 1 \\ 0 \text{ per } 1 < |x| \leq 2 \end{cases}$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	7
2	6
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_{\Omega}\left(y^2 - x\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right)e^{-x^2-y^2}dxdy$$

dove

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 2, 0 \le y \le x\right\}$$

Si raccomanda di fare una figura, scrivere la rappresentazione analitica di T e prestare cura nell'impostazione.

$$\int\int_{\Omega}\left(y^2 - x\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right)e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_1^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\rho^2\sin^2\theta - \sqrt{2}\rho^2\cos\theta\right)e^{-\rho^2}\rho d\theta\right)d\rho$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta\right)d\theta\right)\cdot\left(\int_1^{\sqrt{2}}e^{-\rho^2}\rho^3 d\rho\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta\right)d\theta = \left[\frac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{2} - \sqrt{2}\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{\pi}{8} - \frac{5}{4}.$$

$$\int_1^{\sqrt{2}}e^{-\rho^2}\rho^3 d\rho = \int_1^{\sqrt{2}}\left(-2\rho e^{-\rho^2}\right)\left(-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho = \left[-\frac{\rho^2}{2}e^{-\rho^2}\right]_1^{\sqrt{2}} + \int_1^{\sqrt{2}}\rho e^{-\rho^2}d\rho$$

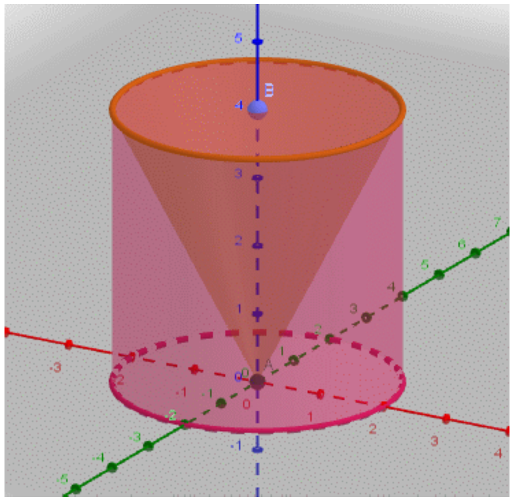
$$= \left[-e^{-2} + \frac{e^{-1}}{2}\right] + \left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_1^{\sqrt{2}} = -e^{-2} + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{-1}$$

$$= e^{-1} - \frac{3}{2}e^{-2}.$$

Quindi

$$\int\int_{\Omega}\left(y^2 - x\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right)e^{-x^2-y^2}dxdy = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{5}{4}\right)\left(e^{-1} - \frac{3}{2}e^{-2}\right).$$

2. Si consideri un solido materiale omogeneo Ω di massa m, formato da un cilindro di altezza h e raggio R, con base sul piano xy, centro della base nell'origine, asse lungo l'asse z positivo, a cui sia stato tolto un cono di uguale base e altezza (ma "capovolto"). Si veda la figura:



Si chiede di:
-calcolare il volume di Ω (senza usare integrali!);
-scrivere la rappresentazione analitica di Ω adatta al calcolo dell'integrale *per fili*;
-calcolare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse z.

$$|\Omega| = \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{m}{|\Omega|}\int\int\int_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz \\
&= \frac{3m}{2\pi R^2 h}\int\int_{x^2+y^2\le R^2}\left(x^2+y^2\right)\left(\int_0^{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}} dz\right)dxdy \\
&= \frac{3m}{2\pi R^2 h}\int\int_{x^2+y^2\le R^2}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\frac{h}{R}dxdy \\
&= \frac{3m}{2\pi R^3}2\pi\int_0^R \rho^3\rho d\rho = \frac{3m}{R^3}\cdot\frac{R^5}{5} = \frac{3}{5}mR^2.
\end{aligned}$$

3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x, y, z) = \left(y, x, z\left(x^2+y^2\right)\right)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \quad t \in [0, 2\pi]. \\ z = 3t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= (t\cos t, t\sin t, 3t) \\ \underline{r}'(t) &= (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 3) \\ \underline{F}(\underline{r}(t)) &= \left(t\sin t, t\cos t, 3t^3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L = \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} &= \int_0^{2\pi} \left(t\sin t, t\cos t, 3t^3\right)\cdot(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 3)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(t\sin t\cos t - t^2\sin^2 t + t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t + 9t^3\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(t\sin(2t) + t^2\cos(2t) + 9t^3\right) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} t^2\cos(2t)\,dt &= \left[t^2\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t\frac{\sin(2t)}{2}dt \\ &= 0 - \int_0^{2\pi} t\sin(2t)\,dt. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^{2\pi} \left(t\sin(2t) + t^2\cos(2t) + 9t^3\right) dt = 0 + 9\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{9}{4}16\pi^4 = 36\pi^4.$$

4. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ assegnata nel piano xz dall'equazione

$$\gamma : \begin{cases} x = R + t \\ z = \frac{t^2}{r} \end{cases} \quad t \in [-r, +r]$$

dove $R > r > 0$ sono costanti fissate. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e calcolato l'elemento d'area di Σ, calcolare l'area di Σ.

a. La superficie Σ è generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva

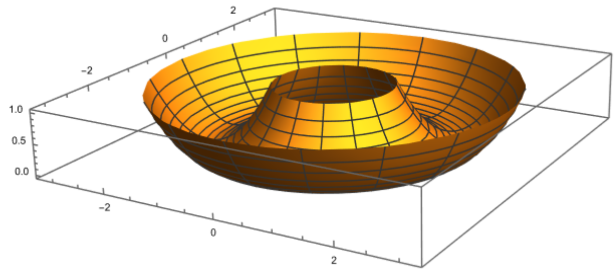
$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = R + t \\ z = b(t) = \frac{t^2}{r} \end{cases} \quad t \in [-r, r]$$

perciò ha equazioni parametriche

$$\Sigma : \begin{cases} x = (R+t)\cos\theta \\ y = (R+t)\sin\theta \\ z = \frac{t^2}{r} \end{cases} \quad t \in [-r, r], \theta \in [0, 2\pi]$$

e elemento d'area

$$dS = a(t)\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}dtd\theta = (R+t)\sqrt{1 + \frac{4t^2}{r^2}}dtd\theta.$$



b. L'area è:

$$
\begin{aligned}
|\Sigma| &= \int\int_{\Sigma} dS \\
&= 2\pi \int_{-r}^{r} (R+t)\sqrt{1+\frac{4t^2}{r^2}}dt \\
&= 2\pi \left\{ \int_{-r}^{r} R\sqrt{1+\frac{4t^2}{r^2}}dt + \int_{-r}^{r} t\sqrt{1+\frac{4t^2}{r^2}}dt \right\} \\
&= 2\pi \left\{ 2R\int_{0}^{r} \sqrt{1+\frac{4t^2}{r^2}}dt + 0 \right\} = 4\pi R \int_{0}^{r} \sqrt{1+\frac{4t^2}{r^2}}dt
\end{aligned}
$$

ponendo $\frac{2t}{r} = \operatorname{Sh} u; dt = \frac{r}{2} \operatorname{Ch} u du$

$$
\begin{aligned}
&= 4\pi R \int_{0}^{\operatorname{SettSh} 2} \frac{r}{2} (\operatorname{Ch} u)^2 \, du = 2\pi R r \left[\frac{\operatorname{Ch} u \operatorname{Sh} u + u}{2} \right]_{0}^{\operatorname{SettSh} 2} \\
&= \pi R r \left(2\sqrt{1+2^2} + \operatorname{SettSh} 2 \right) = \pi R r \left(2\sqrt{5} + \log\left(2+\sqrt{5}\right) \right).
\end{aligned}
$$

5. Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[-2, 2]$ da

$$
f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ per } |x| \leq 1 \\ 0 \text{ per } 1 < |x| \leq 2 \end{cases}
$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La funzione ha discontinuità in $x = \pm 1$ (ma soddisfa le condizioni di raccordo) ed è regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[-2, 2]$ a eccezione dei punti ± 1 in cui converge a $\left(f\left(1^+\right) + f\left(1^-\right)\right)/2 = \frac{1}{2}$. I coefficienti di Fourier tenderanno a zero ma non soddisfano una stima di decrescita..

b. La funzione è pari, perciò $b_k = 0$ per ogni k. Per calcolare gli a_k, poiché $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \int_0^2 f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx \\
&= \int_0^1 x^2\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx
\end{aligned}$$

per $k \geq 1$

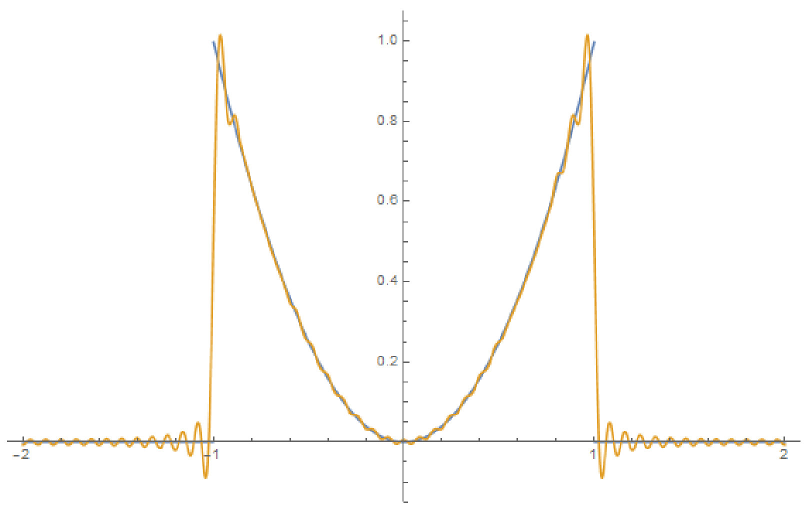
$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{2}{k\pi}x^2\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{k\pi}2x\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx \\
&= \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{k\pi}\left\{\int_0^1 x\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx\right\} \\
&= \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{k\pi}\left\{\left[-\frac{2}{k\pi}x\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx\right\} \\
&= \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{(k\pi)^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{8}{(k\pi)^2}\left[\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{(k\pi)^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{16}{(k\pi)^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$a_0 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

La serie di Fourier di f è

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \\
&= \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{(k\pi)^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{16}{(k\pi)^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right]\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right).
\end{aligned}$$

Grafico di $f(x)$ insieme alla sua somma parziale di Fourier fino a $n = 50$:



Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	7
2	6
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Sia Ω la lamina materiale piana omogenea del piano xy contornata dalla curva di equazione polare:

$$\rho = R\cos^2\theta, \text{ per } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

con $R > 0$ costante fissata. Calcolare l'area della regione (sfruttando le formule dedotte dal teorema di Gauss-Green) e le coordinate del centroide.
Si raccomanda di fare un disegno e sfruttare le simmetrie.

$$\begin{aligned}
|\Omega| &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^4\theta d\theta = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos 2\theta+1}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{R^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta + 1\right)d\theta \\
&= \frac{R^2}{4}\left(\frac{\pi}{4}+0+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{16}\pi R^2.
\end{aligned}$$

Poiché la regione è simmetrica rispetto all'asse x,

$$y_C = \frac{1}{|\Omega|}\int\int_\Omega y dx dy = 0.$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
x_C &= \frac{1}{|\Omega|}\int\int_\Omega x dx dy = \frac{1}{|\Omega|}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{R\cos^2\theta}\rho\cos\theta\rho d\rho\right)d\theta = \frac{16}{3\pi R^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{R\cos^2\theta}d\theta \\
&= \frac{16}{9\pi R^2}R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^7 d\theta = \frac{32}{9\pi}R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(1-\sin^2\theta\right)^3 d\theta
\end{aligned}$$

$\sin\theta = t$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32}{9\pi}R\int_0^1\left(1-t^2\right)^3 dt = \frac{32}{9\pi}R\int_0^1\left(1-3t^2+3t^4-t^6\right)dt \\
&= \frac{32}{9\pi}R\left[t-t^3+\frac{3}{5}t^5-\frac{t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{32}{9\pi}R\left(1-1+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{32}{9\pi}R\cdot\frac{16}{35} = \frac{512}{315\pi}R.
\end{aligned}$$

2. Si consideri il solido materiale non omogeneo Ω descritto dal cilindro di raggio R e altezza h con asse sull'asse $z > 0$ e base sul piano xy, avente densità:

$$\delta(x,y,z) = \left(2R^2 - \left(x^2+y^2\right)\right)\frac{\mu}{hR^4},$$

dove $\mu > 0$ è una costante avente le dimensioni di una massa. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse x (attenzione! NON rispetto all'asse z!).

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_{\Omega} \left(y^2+z^2\right) \delta\left(x,y,z\right) dxdydz \\
&= \int_0^h \left(\int\int_{x^2+y^2 \le R^2} \left(y^2+z^2\right)\left(2R^2-\left(x^2+y^2\right)\right) \frac{\mu}{hR^4} dxdy \right) dz \\
&= \frac{\mu}{hR^4} \left\{ h \int\int_{x^2+y^2\le R^2} y^2 \left(2R^2-\left(x^2+y^2\right)\right) dxdy \right. \\
&+ \left. \left(\int_0^h z^2 dz\right) \cdot \left(\int\int_{x^2+y^2\le R^2} \left(2R^2-\left(x^2+y^2\right)\right) dxdy \right) \right\} \\
&= \frac{\mu}{hR^4} \left\{ h \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta\right)\left(\int_0^R \rho^2 \left(2R^2-\rho^2\right)\rho d\rho\right) + \frac{h^3}{3}\cdot 2\pi \int_0^R \left(2R^2-\rho^2\right)\rho d\rho \right\} \\
&= \frac{\mu}{R^4} \left\{ \pi \int_0^R \left(2R^2\rho^3-\rho^5\right) d\rho + \frac{2\pi h^2}{3} \int_0^R \left(2R^2\rho-\rho^3\right) d\rho \right\} \\
&= \frac{\mu}{R^4} \left\{ \pi \left[2R^2\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^R + \frac{2\pi h^2}{3} \left[R^2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \right\} \\
&= \frac{\mu}{R^4} \left\{ \pi \cdot \frac{R^6}{3} + \frac{2\pi h^2}{3} \cdot \frac{3}{4} R^4 \right\} \\
&= \mu\pi \left\{ \frac{R^2}{3} + \frac{h^2}{2} \right\}.
\end{aligned}
$$

3. Si consideri il campo vettoriale

$$
\underline{F}\left(x,y,z\right) = \left(xz\cos\left(xz\right) + y\sin x, -\cos x, x^2\cos\left(xz\right) - \frac{1+\cos\left(xz\right)}{z^2} - x\frac{\sin\left(xz\right)}{z} \right).
$$

a. Si verifichi se il campo è irrotazionale o meno nel dominio $\Omega = \{(x,y,z) : z > 0\}$.
b. Si stabilisca se il campo è conservativo o meno nel dominio Ω, calcolando in caso affermativo un potenziale di $\underline{F}$.

a.

$$
\begin{aligned}
\left(F_1\right)_y &= \sin x = \left(F_2\right)_x; \\
\left(F_1\right)_z &= x\cos\left(xz\right) - x^2 z\sin\left(xz\right); \\
\left(F_3\right)_x &= 2x\cos\left(xz\right) - x^2 z \sin\left(xz\right) + \frac{\sin\left(xz\right)}{z} - \frac{\sin\left(xz\right)}{z} - x\cos\left(xz\right) \\
&= x\cos\left(xz\right) - x^2 z\sin\left(xz\right) = \left(F_1\right)_z; \\
\left(F_2\right)_z &= 0 = \left(F_3\right)_y.
\end{aligned}
$$

Quindi il campo è irrotazionale in Ω.

b. Essendo il campo vettoriale irrotazionale in Ω, dominio semplicemente connesso, il campo è anche conservativo in Ω. Determiniamone un potenziale. Cerchiamo $U(x,y,z)$ tale che

$$U_x(x,y,z) = F_1(x,y,z) = xz\cos(xz) + y\sin x$$
$$U(x,y,z) = \int (xz\cos(xz) + y\sin x)\,dx = z\int x\cos(xz)\,dx - y\cos x.$$
$$\int x\cos(xz)\,dx = x\frac{\sin(xz)}{z} - \int \frac{\sin(xz)}{z}dx = x\frac{\sin(xz)}{z} + \frac{\cos(xz)}{z^2}.$$
$$U(x,y,z) = x\sin(xz) + \frac{\cos(xz)}{z} - y\cos x + f(y,z).$$

$$U_y(x,y,z) = -\cos x + f_y(y,z) = F_2 = -\cos x$$
$$f_y(y,z) = 0; f(y,z) = g(z);$$
$$U(x,y,z) = x\sin(xz) + \frac{\cos(xz)}{z} - y\cos x + g(z).$$

$$\begin{aligned} U_z(x,y,z) &= x^2\cos(xz) + \frac{-xz\sin(xz) - \cos(xz)}{z^2} + g'(z) \\ &= F_3 = x^2\cos(xz) - \frac{1+\cos(xz)}{z^2} - x\frac{\sin(xz)}{z}; \\ g'(z) &= -\frac{1}{z^2}; g(z) = \frac{1}{z} + c; \end{aligned}$$

e in definitiva

$$U(x,y,z) = x\sin(xz) + \frac{\cos(xz)}{z} - y\cos x + \frac{1}{z} + c.$$

4. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

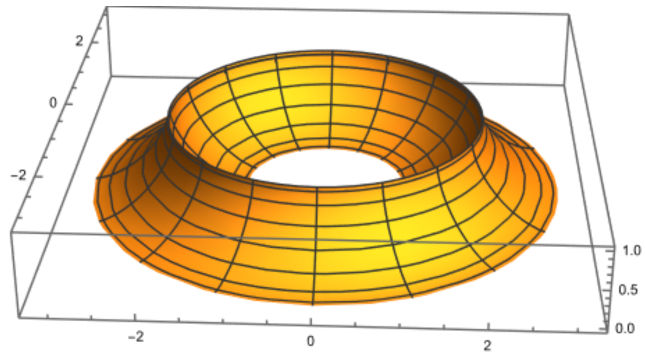
$$\begin{cases} x = R + r\cos^3 t \\ z = r\sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0,\pi]$$

con $R > r > 0$ costanti fissate. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ, l'elemento d'area di Σ, e aver individuato gli eventuali punti singolari della superficie, calcolare l'area di Σ.

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = R + r\cos^3 t \\ z = b(t) = r\sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0,\pi].$$
$$\Sigma : \begin{cases} x = (R + r\cos^3 t)\cos\theta \\ y = (R + r\cos^3 t)\sin\theta \\ z = r\sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0,\pi], \theta \in [0,2\pi].$$
$$a'(t) = -3r\cos^2 t\sin t, b'(t) = 3r\sin^2 t\cos t$$
$$\begin{aligned} dS &= |a(t)|\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}dtd\theta \\ &= \left(R + r\cos^3 t\right)3r\,|\cos t\sin t|\,dtd\theta \end{aligned}$$

Si hanno 3 circonferenze di punti singolari per $t=0, t=\frac{\pi}{2}, t=\pi$, corrispondenti a:

$$\begin{aligned}&x^2+y^2=(R+r)^2, z=0\\&x^2+y^2=R^2, z=r\\&x^2+y^2=(R-r)^2, z=0.\end{aligned}$$



Area di Σ:

$$\begin{aligned}|\Sigma| &= \int\int_\Sigma dS = 2\pi\int_0^\pi \left(R+r\cos^3 t\right) 3r\,|\cos t\sin t|\,dt\\&= 6\pi r\left\{R\int_0^\pi |\cos t\sin t|\,dt + r\int_0^\pi \cos^3 t\,|\cos t\sin t|\,dt\right\}\\&= 6\pi r\left\{2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t dt + 0\right\}\\&= 12\pi rR\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 12\pi rR\cdot\frac{1}{2} = 6\pi rR.\end{aligned}$$

5. Sia Σ la superficie cilindrica descritta da

$$\Sigma = \left\{(x,y,z): x^2+y^2=R^2, z\in\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]\right\}$$

e si consideri il campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(xy^2, yx^2, |z|^3\right).$$

a. Scrivere le equazioni parametriche di Σ, il suo elemento d'area e il suo versore normale.
b. Calcolare il flusso di $\underline{F}$ attraverso Σ, orientata con la normale che si allontana dall'asse z (fare un disegno).
Riportare con cura impostazione e passaggi, semplificare il risultato ottenuto.

a.

$$\Sigma: \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \quad \theta\in[0,2\pi], t\in\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]. \\ z = t\end{cases}$$

$$dS = Rd\theta dt$$

$$\underline{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

b.

$$
\begin{aligned}
\underline{F}_{/\Sigma} &= \left(R^3\cos\theta\sin^2\theta, R^3\cos^2\theta\sin\theta, |t|^3\right)\\
\underline{F}\cdot\underline{n} &= \left(R^3\cos\theta\sin^2\theta, R^3\cos^2\theta\sin\theta, |t|^3\right)\cdot(\cos\theta,\sin\theta,0)\\
&= 2R^3\cos^2\theta\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(\underline{F},\Sigma\right) &= \int\int_{\Sigma}\underline{F}\cdot\underline{n}dS\\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(2R^3\cos^2\theta\sin^2\theta\right)Rd\theta dt\\
&= 2R^4h\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\\
&= 2R^4h\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2\left(2\theta\right)d\theta = \frac{1}{2}\pi R^4h.
\end{aligned}
$$

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°3

Es.	Punti
1	6
2	6
3	7
4	7
5	7
Tot.	33

1. Si consideri la lamina piana materiale Ω di massa m rappresentata nel piano xy dal trapezio di vertici:

$$(0,0)\,,(a,0)\,,\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a\right),\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$

con $a>0$ costante avente le dimensioni di una lunghezza. Calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'asse y.
Si raccomanda di fare una figura, scrivere la rappresentazione analitica di Ω e prestare cura nell'impostazione.

$$\Omega=\left\{(x,y):0\le y\le\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\le x\le\left(1-\frac{y}{a\sqrt{3}}\right)a\right\}.$$

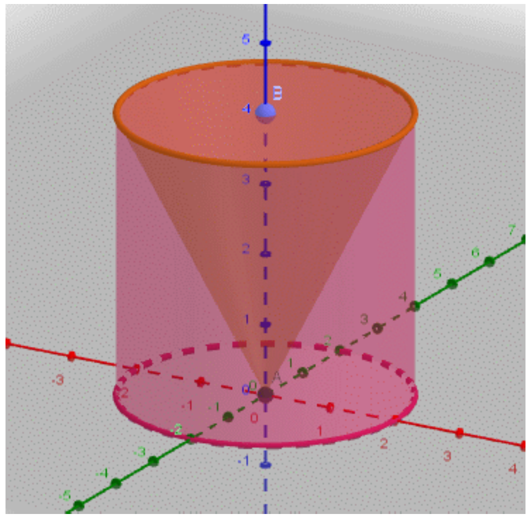
$$|\Omega|=\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2.$$

$$I=\frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega x^2dxdy=\frac{8m}{3\sqrt{3}a^2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\int_0^{\left(1-\frac{y}{a\sqrt{3}}\right)a}x^2dx\right)dy$$

$$=\frac{8m}{3\sqrt{3}a^2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\frac{1}{3}\left(1-\frac{y}{a\sqrt{3}}\right)^3a^3dy=\frac{8m}{9\sqrt{3}}a\left[-\frac{a\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{y}{a\sqrt{3}}\right)^4\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$$=\frac{2m}{9}a^2\left[-\left(1-\frac{y}{a\sqrt{3}}\right)^4\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2m}{9}a^2\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^4\right]=\frac{15}{16}\frac{2m}{9}a^2=\frac{5}{24}ma^2.$$

2. Si consideri un solido materiale omogeneo Ω di massa m, formato da un cilindro di altezza h e raggio R, con base sul piano xy, centro della base nell'origine, asse lungo l'asse z positivo, a cui sia stato tolto un cono di uguale base e altezza (ma “capovolto”). Si veda la figura:



Si chiede di:
-calcolare il volume di Ω (senza usare integrali!);
-scrivere la rappresentazione analitica di Ω adatta al calcolo dell'integrale *per fili*;
-calcolare il centroide del solido (sfruttando le simmetrie).

$$|\Omega| = \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$
$$\Omega = \left\{ (x,y,z) : x^2+y^2 \le R^2, 0 \le z \le \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \right\}.$$

Per simmetria, $x_C = y_C = 0$.

$$z_c = \frac{1}{|\Omega|}\int\int\int_\Omega z dxdydz = \frac{3}{2\pi R^2 h}\int\int_{x^2+y^2\le R^2}\left(\int_0^{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}} zdz\right)dxdy$$
$$= \frac{3}{2\pi R^2 h}\int\int_{x^2+y^2\le R^2}\frac{1}{2}\frac{h^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right)dxdy$$
$$= \frac{3h}{4\pi R^4}2\pi\int_0^R \rho^2\rho d\rho = \frac{3h}{2R^4}\frac{R^4}{4} = \frac{3}{8}h.$$

Pertanto il centroide ha coordinate:
$$\left(0,0,\frac{3}{8}h\right)$$

3. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale
$$\underline{F}(x,y,z) = (-y,x,z)$$
lungo l'arco di curva γ di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \quad t\in[0,2\pi], \\ z = ht \end{cases}$$

con R, h costanti positive. Riportare l'impostazione e i calcoli e semplificare il risultato ottenuto.

$$\begin{aligned}
\underline{r}(t) &= \left(R\cos^3 t, R\sin^3 t, ht\right) \\
\underline{r}'(t) &= \left(-3R\cos^2 t\sin t, 3R\sin^2 t\cos t, h\right) \\
\underline{F}(\underline{r}(t)) &= \left(-R\sin^3 t, R\cos^3 t, ht\right) \\
\underline{F}(\underline{r}(t))\cdot\underline{r}'(t) &= \left(-R\sin^3 t, R\cos^3 t, ht\right)\cdot\left(-3R\cos^2 t\sin t, 3R\sin^2 t\cos t, h\right) \\
&= 3R^2\left(\sin^4 t\cos^2 t+\cos^4 t\sin^2 t\right)+h^2 t \\
&= 3R^2\sin^2 t\cos^2 t+h^2 t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi}\underline{F}(\underline{r}(t))\cdot\underline{r}'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left(3R^2\sin^2 t\cos^2 t+h^2 t\right)dt \\
&= \frac{3}{4}R^2\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt+h^2\int_0^{2\pi}t\,dt \\
&= \frac{3}{4}\pi R^2+h^2\frac{4\pi^2}{2}=\frac{3}{4}\pi R^2+2\pi^2h^2.
\end{aligned}$$

4 Si consideri la superficie materiale Σ, non omogenea, di forma *sferica* di centro l'origine e raggio R, avente densità

$$\delta(x,y,z)=\left(1+\frac{|z|}{R}\right)\frac{\mu}{R^2},$$

dove $\mu>0$ è una costante avente le dimensioni di una massa. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse y. (Attenzione! NON attorno all'asse z).
Si raccomanda di scrivere anzitutto le equazioni parametriche di Σ e il suo elemento d'area.

$$\Sigma:\begin{cases} x=R\sin\phi\cos\theta \\ y=R\sin\phi\sin\theta & \phi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi]. \\ z=R\cos\phi. \end{cases}$$

$$dS=R^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta.$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int_{\Sigma} \left(x^2+z^2\right)\delta(x,y,z)\,dS \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left[(R\sin\phi\cos\theta)^2+(R\cos\phi)^2\right]\left(1+\frac{|R\cos\phi|}{R}\right)\frac{\mu}{R^2}R^2\sin\phi d\phi\right)d\theta \\
&= \mu R^2\left(\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[(\sin\phi\cos\theta)^2+(\cos\phi)^2\right]d\theta\,(1+|\cos\phi|)\sin\phi d\phi\right) \\
&= \mu R^2\left(\int_0^{\pi}\pi\left[(\sin\phi)^2+2(\cos\phi)^2\right](1+|\cos\phi|)\sin\phi d\phi\right) \\
&= 2\pi\mu R^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\phi)\left(2-\sin^2\phi\right)\sin\phi d\phi\right) \\
&= 2\pi\mu R^2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\sin^2\phi\right)\sin\phi d\phi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\left(2\sin\phi-\sin^3\phi\right)d\phi\right\} = 2\pi\mu R^2\left\{A+B\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \left[\sin^2\phi-\frac{\sin^4\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}. \\
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos^2\phi\right)\sin\phi d\phi = \left[-\cos\phi-\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

perciò

$$
I = 2\pi\mu R^2\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{4}\right)=\frac{25}{6}\pi\mu R^2.
$$

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1,1]$ da

$$
f(x)=\begin{cases} x \text{ per } x\in[0,1] \\ 0 \text{ per } x\in[-1,0] \end{cases}
$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La funzione è continua ma non soddisfa la condizione di raccordo, inoltre è regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $(-1,1)$ mentre nei punti ±1 converge a $\left(f(-1^+)+f(1^-)\right)/2=\frac{1}{2}$, e i suoi coefficienti di Fourier tendono a zero senza soddisfare stime quantitative.

b. La funzione non è né pari né dispari. Poiché $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(k\pi x)\,dx = \int_{0}^{1} x\cos(k\pi x)\,dx$$

per $k \geq 1$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{k\pi}x\sin(k\pi x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)\,dx \\ &= \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{(k\pi)^2}(\cos(k\pi) - 1). \end{aligned}$$

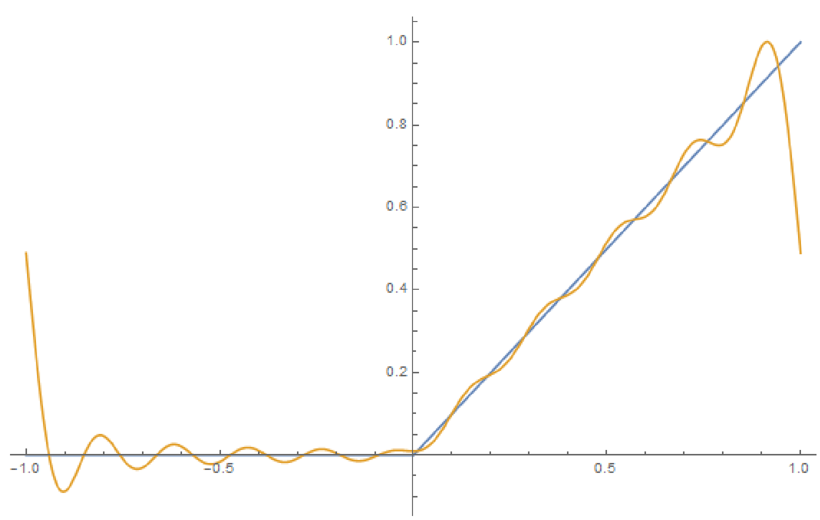
$$a_0 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} b_k &= \int_0^1 x\sin(k\pi x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{k\pi}x\cos(k\pi x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{k\pi}\cos(k\pi x)\,dx \\ &= -\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi). \end{aligned}$$

La serie di Fourier di f è

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\pi x) + b_k\sin(k\pi x) \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{(k\pi)^2}(\cos(k\pi) - 1)\right]\cos(k\pi x) - \frac{1}{k\pi}\cos(k\pi)\sin(k\pi x)\right\}. \end{aligned}$$

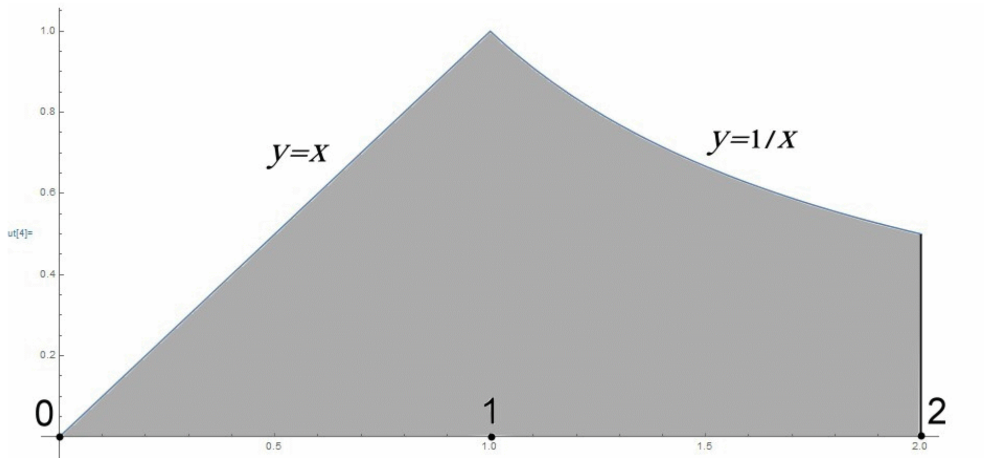
Grafico di $f(x)$ insieme alla sua somma parziale di Fourier fino a $n = 10$:



Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°4

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Sia Ω la regione piana descritta in figura:



Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_{\Omega} x^2 e^{-xy} dxdy$$

e *semplificare* il risultato ottenuto.

$$\begin{aligned}
\int\int_{\Omega} x^2 e^{-xy} dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 e^{-xy} dy\right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x}} x^2 e^{-xy} dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 \left[\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_0^x\right) dx + \int_1^2 \left(x^2 \left[\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_0^{1/x}\right) dx \\
&= \int_0^1 x\left(1 - e^{-x^2}\right) dx + \int_1^2 \left(x\left(1 - e^{-1}\right)\right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^1 + \left(1 - e^{-1}\right)\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - e^{-1}\right)\left(\frac{4-1}{2}\right) \\
&= \frac{e^{-1}}{2} + \frac{3}{2}\left(1 - e^{-1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

2. Si consideri il solido materiale non omogeneo Ω descritto dal cilindro di raggio R e altezza h con asse sull'asse $z > 0$ e base sul piano xy, avente densità:

$$\delta(x, y, z) = \left(2R^2 - \left(x^2 + y^2\right)\right) \frac{\mu}{hR^4},$$

dove $\mu > 0$ è una costante avente le dimensioni di una massa. Calcolare la massa totale m del solido e la coordinata z_c del suo baricentro.

a. Calcoliamo anzitutto la massa totale:

$$\begin{aligned} m &= \int\int\int_\Omega \delta(x, y, z)\, dxdydz = \int_0^h \left(\int\int_{x^2+y^2 \le R^2} \left(2R^2 - \left(x^2 + y^2\right)\right) \frac{\mu}{hR^4} dxdy \right) dz \\ &= \frac{\mu}{hR^4} \cdot h \cdot 2\pi \int_0^R \left(2R^2 - \rho^2\right) \rho d\rho = \frac{2\pi\mu}{R^4} \left[R^2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = \frac{2\pi\mu}{R^4} \cdot \frac{3}{4} R^4 = \frac{3}{2}\pi\mu. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{m} \int\int\int_\Omega z\delta(x, y, z)\, dxdydz \\ &= \frac{2}{3\pi\mu} \int_0^h z \left(\int\int_{x^2+y^2 \le R^2} \left(2R^2 - \left(x^2 + y^2\right)\right) \frac{\mu}{hR^4} dxdy \right) dz \\ &= \frac{2}{3\pi hR^4} \left(\int_0^h zdz \right) \left(\int\int_{x^2+y^2 \le R^2} \left(2R^2 - \left(x^2 + y^2\right)\right) dxdy \right) \\ &= \frac{2}{3\pi hR^4} \cdot \frac{h^2}{2} \left(2\pi \int_0^R \left(2R^2 - \rho^2\right) \rho d\rho \right) \\ &= \frac{2h}{3R^4} \cdot \int_0^R \left(2R^2\rho - \rho^3\right) d\rho = \frac{2h}{3R^4} \left[R^2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \\ &= \frac{2h}{3R^4} \cdot \frac{3}{4} R^4 = \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

3. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F} = \frac{(-y, x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

lungo l'arco di curva γ di equazione polare

$$\rho = R\theta e^{-\theta} \text{ per } x \in [0, 2\pi].$$

Riportare l'impostazione e i calcoli, e semplificare il risultato ottenuto.

La curva ha equazioni parametriche:

$$\begin{aligned} \underline{r}(\theta) &= \left(R\theta e^{-\theta} \cos\theta, R\theta e^{-\theta} \sin\theta\right) \\ &= R\theta e^{-\theta} (\cos\theta, \sin\theta), \end{aligned}$$

per cui si ha:

$$\begin{aligned}\underline{r}'(\theta) &= R\left(e^{-\theta}(1-\theta)\right)(\cos\theta,\sin\theta) + R\theta e^{-\theta}(-\sin\theta,\cos\theta) \\ &= Re^{-\theta}\left((1-\theta)\cos\theta - \theta\sin\theta, (1-\theta)\sin\theta + \theta\cos\theta\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{F}(\underline{r}(\theta)) &= (-\sin\theta,\cos\theta) \\ \underline{F}(\underline{r}(\theta))\cdot\underline{r}'(\theta) &= Re^{-\theta}\left((1-\theta)\cos\theta - \theta\sin\theta, (1-\theta)\sin\theta + \theta\cos\theta\right)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta) \\ &= Re^{-\theta}\left(-(1-\theta)\cos\theta\sin\theta + \theta\sin^2\theta + (1-\theta)\sin\theta\cos\theta + \theta\cos^2\theta\right) \\ &= R\theta e^{-\theta}.\end{aligned}$$

quindi il lavoro è

$$\begin{aligned}L &= \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi}\underline{F}(\underline{r}(\theta))\cdot\underline{r}'(\theta)\,d\theta = R\int_0^{2\pi}\theta e^{-\theta}d\theta \\ &= R\left\{\left[-\theta e^{-\theta}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^{-\theta}d\theta\right\} = R\left\{-2\pi e^{-2\pi} + 1 - e^{-2\pi}\right\} \\ &= R\left(1 - e^{-2\pi}(1+2\pi)\right).\end{aligned}$$

4. Sia Σ la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ (ellisse) descritta nel piano xz dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R + r\cos\phi \\ z = \frac{r}{2}\sin\phi \end{cases} \quad \text{per } \phi\in[0,2\pi]$$

dove $R > r > 0$ sono costanti fissate. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e il suo elemento d'area, calcolare l'integrale di superficie

$$\int\int_\Sigma |z|\,dS.$$

Poiché

$$\gamma : \begin{cases} x = a(\phi) = R + r\cos\phi \\ z = b(\phi) = \frac{r}{2}\sin\phi \end{cases} \quad \text{per } \phi\in[0,2\pi]$$

le equazioni parametriche di Σ sono

$$\Sigma : \begin{cases} x = (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ y = (R + r\cos\phi)\sin\theta \quad \phi\in[0,2\pi], \theta\in[0,2\pi] \\ z = \frac{r}{2}\sin\phi \end{cases}$$

e l'elemento d'area è

$$\begin{aligned}dS &= |a(\phi)|\sqrt{a'(\phi)^2 + b'(\phi)^2}d\phi d\theta \\ &= (R + r\cos\phi)\sqrt{(-r\sin\phi)^2 + \left(\frac{r}{2}\cos\phi\right)^2}d\phi d\theta \\ &= (R + r\cos\phi)\,r\sqrt{\sin^2\phi + \frac{1}{4}\cos^2\phi d\phi d\theta}.\end{aligned}$$

$$\int\int_{\Sigma} |z|\, dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{r}{2} \sin\phi \right| (R + r\cos\phi)\, r \sqrt{\sin^2\phi + \frac{1}{4}\cos^2\phi d\phi} \right) d\theta$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{Rr^2}{2} \int_0^{2\pi} |\sin\phi| \sqrt{\sin^2\phi + \frac{1}{4}\cos^2\phi d\phi} + \frac{r^3}{2} \int_0^{2\pi} |\sin\phi| \cos\phi \sqrt{\sin^2\phi + \frac{1}{4}\cos^2\phi d\phi} \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{Rr^2}{2} 2 \int_0^{\pi} \sin\phi \sqrt{1 - \frac{3}{4}\cos^2\phi d\phi} + 0 \right\}$$

$$= 2\pi Rr^2 \int_0^{\pi} \sin\phi \sqrt{1 - \frac{3}{4}\cos^2\phi d\phi} \qquad [\cos\phi = t]$$

$$= 2\pi Rr^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \frac{3}{4}t^2 dt} = 4\pi Rr^2 \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{3}{4}t^2 dt}$$

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2} t = \sin u \right]$$

$$= 4\pi Rr^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos^2 u du = 4\pi Rr^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sin u \cos u + u}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \pi Rr^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \pi Rr^2 \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi \right).$$

5. Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[-2, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \text{ per } |x| \le 1 \\ 0 \text{ per } 1 < |x| \le 2 \end{cases}$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La funzione è continua e soddisfa la condizione di raccordo, inoltre è regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[-2, 2]$ e i suoi coefficienti di Fourier saranno $o(1/k)$.

$b.$ La funzione è pari, perciò $b_k = 0$ per ogni k. Per calcolare gli a_k, poiché $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \int_0^2 f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx \\ &= \int_0^1 \left(1-x^2\right)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx \end{aligned}$$

per $k \geq 1$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{2}{k\pi}\left(1-x^2\right)\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{k\pi}2x\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx \\ &= \frac{4}{k\pi}\left\{\int_0^1 x\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx\right\} \\ &= \frac{4}{k\pi}\left\{\left[-\frac{2}{k\pi}x\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx\right\} \\ &= -\frac{8}{(k\pi)^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{(k\pi)^2}\left[\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 \\ &= -\frac{8}{(k\pi)^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{16}{(k\pi)^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$a_0 = \int_0^1 \left(1-x^2\right)dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

La serie di Fourier di f è

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \\ &= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{8}{(k\pi)^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{16}{(k\pi)^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right]\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right). \end{aligned}$$

Grafico di $f(x)$ insieme alla sua somma parziale di Fourier fino a $n = 10$: