Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Sia Ω una lamina materiale piana, non omogenea, descritta nel piano xy dal cerchio di centro $(R, 0)$ e raggio R, avente densità superficiale

$$\delta(x, y) = \frac{\mu}{R^4} |xy|$$

(dove R, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente). Dopo aver scritto opportunamente la rappresentazione analitica di Ω,
a) calcolare la massa totale della lamina;
b) calcolare il suo baricentro.
Si raccomanda di fare una figura, sfruttare le simmetrie, prestare cura nell'impostazione, e semplificare il più possibile i risultati ottenuti.

2. Si consideri il solido Ω descritto analiticamente da:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, 0 \leq z \leq h\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \right\},$$

dove a, b, h sono costanti positive assegnate, aventi le dimensioni di una lunghezza. Calcolare il volume di Ω e il suo centroide. Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione e sfruttare le simmetrie.

3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(y, x, z^2\right)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \\ z = \frac{t}{5} \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{5}{4}\pi\right].$$

4. Sia Σ la superficie (porzione della superficie torica contenuta nel semispazio $z \geq 0$) generata dalla rotazione attorno all'asse z della semicirconferenza γ assegnata nel piano xz dall'equazione

$$\gamma : \begin{cases} x = R + r\cos\phi \\ z = r\sin\phi \end{cases} \quad \phi \in [0, \pi]$$

dove $R > r > 0$ sono costanti fissate. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e calcolato l'elemento d'area di Σ,
a. calcolare l'area di Σ;
b. calcolare il centroide di Σ.

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1, 1]$ da

$$f(x) = x^2(1-x).$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier a_k di f. Non si richiede il calcolo dei coefficienti b_k.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Si consideri la lamina piana materiale Ω omogenea di massa m racchiusa dalla curva di equazione polare

$$\rho = R\, e^{\theta} \text{ per } \theta \in [0, 2\pi]$$

con $R > 0$ costante. Calcolare l'area di Ω e il suo momento d'inerzia rispetto all'origine (cioè rispetto a un asse perpendicolare al piano della lamina e passante per l'origine). Si raccomanda di curare l'impostazione e semplificare il risultato ottenuto.

2. Si consideri il solido materiale non omogeneo Ω (a forma di cono circolare) descritto analiticamente da:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : z \in [0, h] \, , \sqrt{x^2 + y^2} \leq R\left(1 - \frac{z}{h}\right) \right\}$$

e avente densità

$$\delta(x, y, z) = \frac{\mu z}{h^2 R^2},$$

dove R, h, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di lunghezza, lunghezza, massa, rispettivamente. Calcolare la massa totale m e il momento d'inerzia I di Ω rispetto all'asse z. Dopo aver calcolato entrambi, esprimere il valore di I in funzione di m, R, h anziché di μ, R, h.

3. Sia γ la curva (chiusa, semplice) di equazione parametrica

$$\underline{r}(t) = (\cos(4t) + 4\cos t, \sin(4t) + 4\sin t)\,, \quad t \in [0, 2\pi]\,,$$

e sia Ω la regione limitata racchiusa da γ. Calcolare l'area di Ω utilizzando la formula dell'area dedotta dalla formula di Gauss-Green.
Riportare impostazione e passaggi.

4. Sia Σ la superficie grafico della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{R} \text{ per } x^2 + y^2 \leq R^2$$

(con $R > 0$ costante fissata). Dopo aver calcolato l'elemento d'area su Σ, calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_{\Sigma} |z| \, dS.$$

5. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ z = R\sin^3 t \end{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $R > 0$ costante fissata. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ, si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, z)$$

uscente dalla superficie Σ. **Si richiede di calcolare il flusso facendo uso del teorema della divergenza, e non calcolando il flusso direttamente dalla definizione.** Prestare cura nell'impostazione, scrivendo per prima cosa una rappresentazione analitica della regione tridimensionale Ω il cui bordo è la superficie Σ.

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Tema n°3

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Si calcoli l'integrale doppio

$$I = \int\int_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)/R^2} dxdy$$

dove Ω è la corona circolare di centro l'origine e raggi $R, 2R$. ($R > 0$ è una costante fissata).

2. Si consideri il solido materiale non omogeneo Ω (a forma di piramide a base quadrata) descritto analiticamente da:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : z \in [0, h], |x| + |y| \leq R\left(1 - \frac{z}{h}\right)\right\}$$

e avente densità

$$\delta(x, y, z) = \frac{\mu z}{h^2 R^2},$$

dove R, h, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di lunghezza, lunghezza, massa, rispettivamente. Calcolare la massa totale e il baricentro di Ω, utilizzando opportunamente le simmetrie.

3. Si consideri il campo vettoriale piano:

$$\underline{F}(x,y) = \left(y \log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2x^2 y}{x^2+y^2}, x \log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} \right).$$

a. Si verifichi se il campo è irrotazionale o meno nel suo dominio di definizione Ω.
b. Si stabilisca se il campo è conservativo o meno nel dominio Ω, calcolando in caso affermativo un potenziale di $\underline{F}$.

4. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ z = R\sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $R > 0$ costante fissata. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ, l'elemento d'area di Σ, e aver individuato gli eventuali punti singolari della superficie, calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_{\Sigma} |xy| \, dS.$$

5. Si consideri la funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = |x|^3.$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Tema n°4

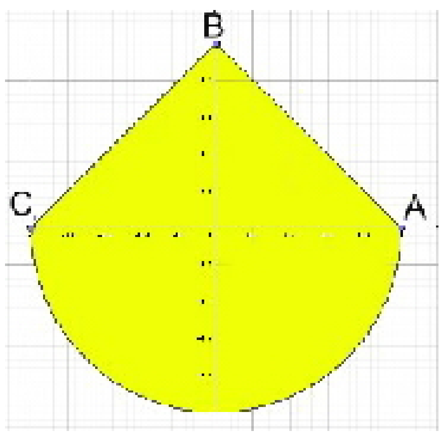
Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)__________________________________
codice persona (o n°di matricola)__________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Calcolare l'integrale doppio

$$I = \int\int_{\Omega} |xy| \, dxdy$$

dove Ω è la regione rappresentata in figura (dove $A = (1,0)\,, B\,(0,1)\,, C = (-1,0)$ e la curva che unisce A e C è una semicirconferenza). Si raccomanda di sfruttare le simmetrie e curare l'impostazione analitica del calcolo.



2. Si consideri il solido semiellissoidale descritto da:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}$$

con a, b, c costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza. Calcolare volume e centroide di Ω, sfruttando opportunamente le simmetrie.

3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = \left(-yz, xz, z^4\right)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \sin(2t) \\ z = \sqrt[5]{t} \end{cases} \quad \text{per } t \in [0, 2\pi].$$

Riportare impostazione e passaggi intermedi.

4. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ z = R\sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $R > 0$ costante fissata. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ, si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, z)$$

uscente dalla superficie Σ. **Si richiede di calcolare il flusso direttamente dalla definizione, senza fare uso del teorema della divergenza.** Prestare cura nell'impostazione, riportando i passaggi relativi.

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1, 1]$ da

$$f(x) = x|x|$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	7
2	6
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Sia Ω una lamina materiale piana, non omogenea, descritta nel piano xy dal cerchio di centro $(R,0)$ e raggio R, avente densità superficiale

$$\delta(x,y)=\frac{\mu}{R^4}|xy|$$

(dove R,μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente). Dopo aver scritto opportunamente la rappresentazione analitica di Ω,
a) calcolare la massa totale della lamina;
b) calcolare il suo baricentro.
Si raccomanda di fare una figura, sfruttare le simmetrie, prestare cura nell'impostazione, e semplificare il più possibile i risultati ottenuti.

$$\begin{aligned}\Omega&=\left\{(x,y):(x-R)^2+y^2\le R^2\right\}\\&=\left\{(x,y):x^2-2Rx+y^2\le 0\right\}.\end{aligned}$$

Per sfruttare le simmetrie, ci servirà anche il semicerchio Ω^+ che sta nel semipiano $y\ge 0$,

$$\Omega^+=\left\{(x,y):x\in[0,2R],0\le y\le\sqrt{2Rx-x^2}\right\}$$

a)

$$\begin{aligned}m&=\int\int_{\Omega}\delta(x,y)\,dxdy=\frac{\mu}{R^4}\int\int_{\Omega}|xy|\,dxdy=\frac{2\mu}{R^4}\int\int_{\Omega^+}xydxdy\\&=\frac{2\mu}{R^4}\int_0^{2R}\left(\int_0^{\sqrt{2Rx-x^2}}ydy\right)xdx=\frac{2\mu}{R^4}\int_0^{2R}\left(\frac{2Rx-x^2}{2}\right)xdx\\&=\frac{\mu}{R^4}\int_0^{2R}\left(2Rx^2-x^3\right)dx=\frac{\mu}{R^4}\left[\frac{2}{3}Rx^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^{2R}\\&=\frac{\mu}{R^4}\left(\frac{16}{3}R^4-4R^4\right)=\frac{4}{3}\mu.\end{aligned}$$

b) Per simmetria il baricentro avrà $y_C=0$, mentre

$$x_C=\frac{1}{m}\int\int_{\Omega}x\delta(x,y)\,dxdy=\frac{3}{4\mu}\frac{\mu}{R^4}2\int\int_{\Omega^+}x^2ydxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{2R^4}\int_0^{2R}\left(\int_0^{\sqrt{2Rx-x^2}} y dy\right)x^2dx \\
&= \frac{3}{2R^4}\int_0^{2R}\left(\frac{2Rx-x^2}{2}\right)x^2dx \\
&= \frac{3}{4R^4}\int_0^{2R}\left(2Rx^3-x^4\right)dx = \frac{3}{4R^4}\left[\frac{Rx^4}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^{2R} \\
&= \frac{3}{4R^4}\cdot R^5\left(8-\frac{32}{5}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}R = \frac{6}{5}R.
\end{aligned}
$$

Il baricentro è: $\left(\frac{6}{5}R, 0\right)$.

2. Si consideri il solido Ω descritto analiticamente da:

$$
\Omega = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, 0\le z\le h\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right\},
$$

dove a, b, h sono costanti positive assegnate, aventi le dimensioni di una lunghezza. Calcolare il volume di Ω e il suo centroide. Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione e sfruttare le simmetrie.

Poiché Ω è il sottografico della funzione $f(x,y) = h\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$ sul dominio piano $A = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$, il volume di Ω è:

$$
|\Omega| = \int\int_A f(x,y)\,dxdy = \int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} h\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy
$$

usando le coordinate polari ellittiche, $x = a\rho\cos\theta, y = b\rho\sin\theta, dxdy = ab\rho d\rho d\theta$, si ha:

$$
\begin{aligned}
|\Omega| &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 h\left(1-\rho^2\right)ab\rho d\rho\right)d\theta \\
&= 2\pi hab\int_0^1\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho \\
&= 2\pi hab\left[-\frac{1}{4}\left(1-\rho^2\right)^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}abh.
\end{aligned}
$$

Per simmetria, il centroide C avrà $x_C = y_C = 0$, mentre

$$
\begin{aligned}
z_C &= \frac{1}{|\Omega|}\int\int\int_\Omega z dxdydz \\
&= \frac{2}{\pi abh}\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\left(\int_0^{h\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)} z dz\right)dxdy \\
&= \frac{2}{\pi abh}\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\frac{h^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2dxdy
\end{aligned}
$$

ancora con le coordinate polari ellittiche,

$$\begin{aligned}
&= \frac{h}{\pi ab} \cdot 2\pi \left(\int_0^1 \left(1-\rho^2\right)^2 ab\rho d\rho \right) \\
&= 2h \int_0^1 \left(1-\rho^2\right)^2 \rho d\rho = 2h \left[-\frac{1}{6}\left(1-\rho^2\right)^3 \right]_0^1 \\
&= 2h \cdot \frac{1}{6} = \frac{h}{3},
\end{aligned}$$

e il centroide è $C\left(0,0,\frac{h}{3}\right)$.

3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(y,x,z^2\right)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \\ z = \frac{t}{5} \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{5}{4}\pi\right].$$

$$\begin{aligned}
\underline{r}(t) &= \left(2\cos^3 t, 2\sin^3 t, \frac{t}{5}\right) \\
\underline{r}'(t) &= \left(-6\cos^2 t \sin t, 6\sin^2 t\cos t, \frac{1}{5}\right) \\
\underline{F}(\underline{r}(t)) &= \left(2\sin^3 t, 2\cos^3 t, \frac{t^2}{25}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{\frac{5}{4}\pi} \left(2\sin^3 t, 2\cos^3 t, \frac{t^2}{25}\right) \cdot \left(-6\cos^2 t\sin t, 6\sin^2 t\cos t, \frac{1}{5}\right) dt \\
&= \int_0^{\frac{5}{4}\pi} \left(-12\cos^2 t\sin^4 t + 12\cos^4 t\sin^2 t + \frac{t^2}{125}\right) dt \\
&= \int_0^{\frac{5}{4}\pi} 12\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) dt + \left[\frac{t^3}{3 \cdot 125}\right]_0^{5\pi/4} \\
&= \int_0^{\frac{5}{4}\pi} 3\sin^2(2t)\cos(2t)\, dt + \frac{\pi^3}{3 \cdot 4^3} \\
&= \left[\frac{\sin^3(2t)}{2}\right]_0^{5\pi/4} + \frac{\pi^3}{3 \cdot 64} = \frac{1}{2} + \frac{\pi^3}{192}.
\end{aligned}$$

4. Sia Σ la superficie (porzione della superficie torica contenuta nel semispazio $z \geq 0$) generata dalla rotazione attorno all'asse z della semicirconferenza γ assegnata nel piano xz dall'equazione

$$\gamma : \begin{cases} x = R + r\cos\phi \\ z = r\sin\phi \end{cases} \quad \phi \in [0,\pi]$$

dove $R > r > 0$ sono costanti fissate. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e calcolato l'elemento d'area di Σ,
a. calcolare l'area di Σ;
b. calcolare il centroide di Σ.

a. La superficie Σ è generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = R + r\cos\phi \\ z = b(t) = r\sin\phi \end{cases} \quad \phi \in [0, \pi]$$

perciò ha equazioni parametriche

$$\Sigma : \begin{cases} x = (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ y = (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ z = r\sin\phi \end{cases} \quad \phi \in [0,\pi], \theta \in [0, 2\pi]$$

e elemento d'area

$$dS = |a(t)| \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} dtd\theta = (R + r\cos\phi)\, rd\phi d\theta.$$

L'area è:

$$\begin{aligned} |\Sigma| &= \int\int_\Sigma dS \\ &= 2\pi \int_0^\pi (R + r\cos\phi)\, rd\phi = 2\pi r \cdot \pi R. \end{aligned}$$

b. Per simmetria, il centroide C avrà coordinate $x_C = y_C = 0$ e

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{1}{|\Sigma|} \int\int_\Sigma z dS = \frac{1}{2\pi r \cdot \pi R} 2\pi \int_0^\pi r\sin\phi\,(R + r\cos\phi)\, rd\phi \\ &= \frac{1}{\pi R} r \int_0^\pi (R\sin\phi + r\sin\phi\cos\phi)\, d\phi \\ &= \frac{r}{\pi R}\left[-R\cos\phi + \frac{r}{2}\sin^2\phi\right]_0^\pi = \frac{r}{\pi R}(2R + 0) = \frac{2}{\pi} r. \end{aligned}$$

Perciò il centroide è $\left(0, 0, \frac{2}{\pi} r\right)$.

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1, 1]$ da

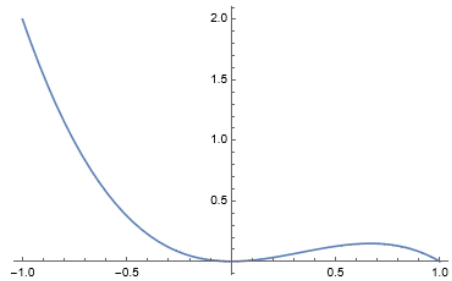
$$f(x) = x^2(1 - x).$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier a_k di f. Non si richiede il calcolo dei coefficienti b_k.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La funzione periodizzata è discontinua su $\mathbb{R}$ ma regolare a tratti. Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $(-1,1)$ mentre negi estremi dell'intervallo converge a

$$\frac{f\left(-1^{+}\right)+f\left(1^{-}\right)}{2}=\frac{2+0}{2}=1.$$



I coefficienti di Fourier tenderanno a zero senza essere necessariamente $o\left(\frac{1}{k}\right)$.
b. La funzione non è né pari né dispari. Per il calcolo dei coefficienti a_k conviene sfruttare che $f(x)=x^2-x^3$ con x^2 pari e $-x^3$ dispari, perciò, poiché $T=2, \omega=2\pi/T=\pi$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2-x^3\right)\cos(k\pi x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^2\cos(k\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x^2\cos(k\pi x)\,dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo, per $k\geq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 x^2\cos(k\pi x)\,dx = 2\left\{\left[x^2\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}dx\right\} \\ &= -\frac{4}{k\pi}\int_0^1 x\sin(k\pi x)\,dx = -\frac{4}{k\pi}\left\{\left[-x\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}dx\right\} \\ &= -\frac{4}{k\pi}\left\{-\frac{\cos(k\pi)}{k\pi}\right\} = 4\frac{\cos(k\pi)}{(k\pi)^2}. \end{aligned}$$

$$a_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Si consideri la lamina piana materiale Ω omogenea di massa m racchiusa dalla curva di equazione polare

$$\rho = R\,e^{\theta} \text{ per } \theta \in [0, 2\pi]$$

con $R > 0$ costante. Calcolare l'area di Ω e il suo momento d'inerzia rispetto all'origine (cioè rispetto a un asse perpendicolare al piano della lamina e passante per l'origine). Si raccomanda di curare l'impostazione e semplificare il risultato ottenuto.

In coordinate polari la lamina è descritta da:

$$\Omega = \left\{(\rho, \theta) : \theta \in [0, 2\pi], \rho \in \left[0, R\,e^{\theta}\right]\right\}.$$

L'area è (per la formula che discende dalle formule di Gauss-Green):

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 e^{2\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2}R^2\left[\frac{e^{2\theta}}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{4}\left(e^{4\pi} - 1\right). \end{aligned}$$

Il momento d'inerzia è:

$$I = \frac{m}{|\Omega|}\int\int_{\Omega}\left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

(in coordinate polari)

$$\begin{aligned} &= \frac{m}{|\Omega|}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{R\,e^{\theta}}\rho^2\rho d\rho\right)d\theta = \frac{4m}{R^2\left(e^{4\pi} - 1\right)}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{R\,e^{\theta}}d\theta \\ &= \frac{m}{R^2\left(e^{4\pi} - 1\right)}\int_0^{2\pi} R^4 e^{4\theta} d\theta = \frac{mR^2}{\left(e^{4\pi} - 1\right)}\left[\frac{e^{4\theta}}{4}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4}mR^2\cdot\left(\frac{e^{8\pi} - 1}{e^{4\pi} - 1}\right) = \frac{1}{4}mR^2\left(e^{4\pi} + 1\right). \end{aligned}$$

2. Si consideri il solido materiale non omogeneo Ω (a forma di cono circolare) descritto analiticamente da:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : z \in [0, h], \sqrt{x^2 + y^2} \le R\left(1 - \frac{z}{h}\right)\right\}$$

e avente densità
$$\delta(x,y,z) = \frac{\mu z}{h^2 R^2},$$
dove R, h, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di lunghezza, lunghezza, massa, rispettivamente. Calcolare la massa totale m e il momento d'inerzia I di Ω rispetto all'asse z. Dopo aver calcolato entrambi, esprimere il valore di I in funzione di m, R, h anziché di μ, R, h.

a) La massa totale sarà:

$$m = \int\int\int_{\Omega} \delta(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^h \frac{\mu z}{h^2 R^2} \left(\int\int_{\sqrt{x^2+y^2} \le R\left(1-\frac{z}{h}\right)} dxdy \right) dz.$$

Ora, l'integrale doppio interno rappresenta l'area del cerchio di raggio $R\left(1-\frac{z}{h}\right)$, uguale ad $A = \pi R^2 \left(1-\frac{z}{h}\right)^2$. Quindi

$$\begin{aligned} m &= \int_0^h \frac{\mu z}{h^2 R^2} \pi R^2 \left(1-\frac{z}{h}\right)^2 dz = \frac{\pi\mu}{h^2} \int_0^h z\left(1 - \frac{2z}{h} + \frac{z^2}{h^2}\right) dz \\ &= \frac{\pi\mu}{h^2} \int_0^h \left(z - \frac{2z^2}{h} + \frac{z^3}{h^2}\right) dz = \frac{\pi\mu}{h^2} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3h} + \frac{z^4}{4h^2}\right]_0^h \\ &= \frac{\pi\mu}{h^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right] h^2 = \frac{\pi}{12}\mu. \end{aligned}$$

b) Il momento d'inerzia sarà:

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) \delta(x,y,z)\, dxdydz \\ &= \int_0^h \frac{\mu z}{h^2 R^2} \left(\int\int_{\sqrt{x^2+y^2} \le R\left(1-\frac{z}{h}\right)} \left(x^2+y^2\right) dxdy \right) dz \end{aligned}$$

calcolando in polari l'integrale doppio interno

$$\begin{aligned} &= \int_0^h \frac{\mu z}{h^2 R^2} 2\pi \left(\int_0^{R\left(1-\frac{z}{h}\right)} \rho^3 d\rho \right) dz \\ &= \frac{2\pi\mu}{h^2 R^2} \int_0^h z \left(\frac{R^4 \left(1-\frac{z}{h}\right)^4}{4} \right) dz = \frac{\pi\mu R^2}{2h^2} \int_0^h z\left(1-\frac{z}{h}\right)^4 dz \\ &\left(1 - \frac{z}{h} = t; dz = -hdt; t \in (1,0)\right) \\ &= \frac{\pi\mu R^2}{2h^2} \int_0^1 h(1-t)\, t^4 h dt = \frac{\pi\mu R^2}{2} \int_0^1 \left(t^4 - t^5\right) dt = \frac{\pi\mu R^2}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{60}\mu R^2. \end{aligned}$$

Poiché $m = \frac{\pi}{12}\mu$, $\mu = \frac{12}{\pi} m$ e

$$I = \frac{\pi}{60}\mu R^2 = \frac{\pi}{60} R^2 \frac{12}{\pi} m = \frac{1}{5} m R^2.$$

3. Sia γ la curva (chiusa, semplice) di equazione parametrica

$$\underline{r}(t) = (\cos(4t) + 4\cos t, \sin(4t) + 4\sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

e sia Ω la regione limitata racchiusa da γ. Calcolare l'area di Ω utilizzando la formula dell'area dedotta dalla formula di Gauss-Green. Riportare impostazione e passaggi.

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_\gamma (xdy - ydx).$$

Poiché

$$\underline{r}'(t) = (-4\sin(4t) - 4\sin t, 4\cos(4t) + 4\cos t),$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\gamma (xdy - ydx) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{(\cos(4t) + 4\cos t)(4\cos(4t) + 4\cos t) - (\sin(4t) + 4\sin t)(-4\sin(4t) - 4\sin t)\}\, dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \{(\cos(4t) + 4\cos t)(\cos(4t) + \cos t) + (\sin(4t) + 4\sin t)(\sin(4t) + \sin t)\}\, dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \{1 + 4 + 5\cos(4t)\cos t + 5\sin(4t)\sin t\}\, dt \\
&= 10\int_0^{2\pi} \{1 + \cos(3t)\}\, dt = 10(2\pi + 0) = 20\pi.
\end{aligned}$$

4. Sia Σ la superficie grafico della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{R} \text{ per } x^2 + y^2 \le R^2$$

(con $R > 0$ costante fissata). Dopo aver calcolato l'elemento d'area su Σ, calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_\Sigma |z|\, dS.$$

L'elemento d'area è:

$$\begin{aligned}
dS &= \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2} dxdy \\
\nabla f(x,y) &= \frac{(2x, -2y)}{R} \\
dS &= \sqrt{1 + \frac{4}{R^2}(x^2 + y^2)} dxdy
\end{aligned}$$

$$\int\int_\Sigma |z|\, dS = \int\int_{x^2+y^2 \le R^2} \left|\frac{x^2 - y^2}{R}\right| \sqrt{1 + \frac{4}{R^2}(x^2 + y^2)} dxdy$$

in coordinate polari

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta}{R} \right| d\theta \right) \sqrt{1 + \frac{4}{R^2}\rho^2} \rho d\rho \\
&= \frac{1}{R} \left(\int_0^R \sqrt{1 + \frac{4}{R^2}\rho^2} \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} |\cos 2\theta| \, d\theta \right) = \frac{1}{R} A \cdot B.
\end{aligned}
$$

Per calcolare A, poniamo

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{1 + \frac{4}{R^2}\rho^2} = t \\
&1 + \frac{4}{R^2}\rho^2 = t^2; \quad \frac{4}{R^2}\rho d\rho = t dt; \quad t \in \left[1, \sqrt{5}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^{\sqrt{5}} t \cdot \left(t^2 - 1\right) \frac{R^2}{4} \cdot \frac{R^2}{4} t dt = \frac{R^4}{16} \int_1^{\sqrt{5}} \left(t^4 - t^2\right) dt \\
&= \frac{R^4}{16} \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{R^4}{16} \left(\frac{25\sqrt{5}}{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{R^4}{16} \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{15} \right).
\end{aligned}
$$

$$
B = 8 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 8 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4} = 4.
$$

Perciò

$$
\int\int_\Sigma |z| \, dS = \frac{1}{R} \frac{R^4}{16} \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{15} \right) 4 = \frac{R^3}{4} \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{15} \right).
$$

5. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$
\begin{cases} x = R \cos^3 t \\ z = R \sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]
$$

con $R > 0$ costante fissata. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ, si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$
\underline{F} = (x, y, z)
$$

uscente dalla superficie Σ. **Si richiede di calcolare il flusso facendo uso del teorema della divergenza, e non calcolando il flusso direttamente dalla definizione.** Prestare cura nell'impostazione, scrivendo per prima cosa una rappresentazione analitica della regione tridimensionale Ω il cui bordo è la superficie Σ.

$$
\gamma : \begin{cases} x = a(t) = R \cos^3 t \\ z = b(t) = R \sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].
$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = (R\cos^3 t)\cos\theta \\ y = (R\cos^3 t)\sin\theta \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi]. \\ z = R\sin^3 t \end{cases}$$

Sia Ω la regione tridimensionale il cui bordo è Σ. Per il teorema della divergenza, si avrà

$$\Phi(\underline{F}, \Sigma) = \int\int_\Sigma \underline{F} \cdot \underline{n} dS = \int\int\int_\Omega \operatorname{div} \underline{F} dxdydz = \int\int\int_\Omega 3dxdydz = 3|\Omega|,$$

quindi si tratta di calcolare il volume di Ω. Per la simmetria della curva γ rispetto all'asse x, sarà

$$|\Omega| = 2\left|\Omega^+\right|$$

dove Ω^+ è la porzione di Ω contenuta in $z \geq 0$. Essendo Σ una superficie di rotazione, possiamo rappresentare il dominio Ω^+ "per strati" al modo seguente. Ponendo

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

deve risultare

$$\begin{cases} \rho \leq R\cos^3 t \\ z = R\sin^3 t \end{cases} \text{con } z \in [0, R],$$

quindi per eliminare il parametro t scriviamo:

$$z^{2/3} = R^{2/3}\sin^2 t = R^{2/3}\left(1 - \cos^2 t\right)$$

$$1 - \left(\frac{z}{R}\right)^{2/3} = \cos^2 t \geq \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2/3}$$

$$\rho \leq R\left[1 - \left(\frac{z}{R}\right)^{2/3}\right]^{3/2}.$$

$$\Omega^+ = \left\{(x, y, x) : x \in [0, R], \sqrt{x^2 + y^2} \leq R\left[1 - \left(\frac{z}{R}\right)^{2/3}\right]^{3/2}\right\}$$

$$\left|\Omega^+\right| = \int\int\int_{\Omega^+} dxdydz = \int_0^R \left(\int\int_{\sqrt{x^2+y^2} \leq R\left[1-\left(\frac{z}{R}\right)^{2/3}\right]^{3/2}} dxdy\right) dz$$

$$= \int_0^R \pi R^2 \left[1 - \left(\frac{z}{R}\right)^{2/3}\right]^3 dz$$

$$z = Rt; dz = Rdt; t \in [0, 1]$$

$$\Phi(\underline{F}, \Sigma) = 3|\Omega| = 3 \cdot 2\left|\Omega^+\right| = 6\pi R^2 \int_0^1 \left[1 - t^{2/3}\right]^3 Rdt$$

$$= 6\pi R^3 \int_0^1 \left(1 - 3t^{2/3} + 3t^{4/3} - t^2\right) dt = 6\pi R^3 \left[t - 3\frac{3}{5}t^{5/3} + 3\frac{3}{7}t^{7/3} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 6\pi R^3 \left(1 - \frac{9}{5} + \frac{9}{7} - \frac{1}{3}\right) = 6\pi R^3 \left(\frac{5 \cdot 7 \cdot 3 - 7 \cdot 3 \cdot 9 + 5 \cdot 3 \cdot 9 - 5 \cdot 7}{5 \cdot 7 \cdot 3}\right)$$

$$= 2\pi R^3 \left(\frac{16}{35}\right) = \frac{32}{35}\pi R^3.$$

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°3

Es.	Punti
1	6
2	6
3	7
4	7
5	7
Tot.	33

1. Si calcoli l'integrale doppio

$$I = \int\int_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)/R^2} dxdy$$

dove Ω è la corona circolare di centro l'origine e raggi $R, 2R$. ($R > 0$ è una costante fissata).

$$I = \int\int_{R^2 \le x^2+y^2 \le 4R^2} \left(x^2+y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)/R^2} dxdy$$

in coordinate polari

$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_R^{2R} \rho^2 e^{-\rho^2/R^2} \rho d\rho \\ &(\rho = Rt; d\rho = Rdt) \\ &= 2\pi R^4 \int_1^2 t^3 e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

$$\int t^3 e^{-t^2} dt = \int \underbrace{\left(-\frac{t^2}{2}\right)}_{g} \underbrace{\left(-2te^{-t^2}\right)}_{f'} dt = -\frac{t^2}{2}e^{-t^2} + \int te^{-t^2} dt$$

$$= -\frac{t^2}{2}e^{-t^2} - \frac{1}{2}e^{-t^2} = -\frac{1}{2}e^{-t^2}\left(1+t^2\right).$$

Quindi

$$I = 2\pi R^4 \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\left(1+t^2\right)\right]_1^2 = \pi R^4 \left(2e^{-1} - 5e^{-4}\right).$$

2. Si consideri il solido materiale non omogeneo Ω (a forma di piramide a base quadrata) descritto analiticamente da:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : z \in [0,h], |x| + |y| \le R\left(1 - \frac{z}{h}\right)\right\}$$

e avente densità

$$\delta(x,y,z) = \frac{\mu z}{h^2 R^2},$$

dove R, h, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di lunghezza, lunghezza, massa, rispettivamente. Calcolare la massa totale e il baricentro di Ω, utilizzando opportunamente le simmetrie.

La massa totale sarà:

$$m = \int\int\int_{\Omega} \delta(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^h \frac{\mu z}{h^2 R^2} \left(\int\int_{|x|+|y| \le R\left(1-\frac{z}{h}\right)} dxdy \right) dz.$$

Ora, l'integrale doppio interno rappresenta l'area di un quadrato la cui semidiagonale è $a = R\left(1 - \frac{z}{h}\right)$, quindi il lato è $l = R\left(1-\frac{z}{h}\right)\sqrt{2}$ e l'area è $A = 2R^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^2$. Quindi

$$\begin{aligned} m &= \int_0^h \frac{\mu z}{h^2 R^2} 2R^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz = \frac{2\mu}{h^2} \int_0^h z\left(1 - \frac{2z}{h} + \frac{z^2}{h^2}\right) dz \\ &= \frac{2\mu}{h^2} \int_0^h \left(z - \frac{2z^2}{h} + \frac{z^3}{h^2}\right) dz = \frac{2\mu}{h^2}\left[\frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3h} + \frac{z^4}{4h^2}\right]_0^h \\ &= \frac{2\mu}{h^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right] h^2 = \frac{\mu}{6}. \end{aligned}$$

Per le simmetrie, il baricentro avrà $x_C = y_C = 0$ mentre

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{1}{m}\int\int\int_{\Omega} z\delta(x,y,z)\, dxdydz \\ &= \frac{6}{\mu}\int_0^h \frac{\mu z^2}{h^2 R^2}\left(\int\int_{|x|+|y| \le R\left(1-\frac{z}{h}\right)} dxdy \right) dz \\ &= \frac{6}{\mu}\int_0^h \frac{\mu z^2}{h^2 R^2} 2R^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^2 dz = \frac{12}{h^2}\int_0^h z^2\left(1 - \frac{2z}{h} + \frac{z^2}{h^2}\right) dz \\ &= \frac{12}{h^2}\int_0^h \left(z^2 - \frac{2z^3}{h} + \frac{z^4}{h^2}\right) dz = \frac{12}{h^2}\left[\frac{z^3}{3} - \frac{2z^4}{4h} + \frac{z^5}{5h^2}\right]_0^h \\ &= 12h\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{30}h = \frac{2}{5}h. \end{aligned}$$

Il baricentro ha coordinate $\left(0, 0, \frac{2}{5}h\right)$.

3. Si consideri il campo vettoriale piano:

$$\underline{F}(x,y) = \left(y\log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2x^2 y}{x^2+y^2}, x\log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} \right).$$

a. Si verifichi se il campo è irrotazionale o meno nel suo dominio di definizione Ω.
b. Si stabilisca se il campo è conservativo o meno nel dominio Ω, calcolando in caso affermativo un potenziale di $\underline{F}$.

a.

$$\begin{aligned}
(F_1)_y &= \log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + 2x^2\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
&= \log\left(x^2+y^2\right) + 2\left(\frac{y^2\left(x^2+y^2\right)+x^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) \\
&= \log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2\left(x^4+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \\
(F_2)_x &= \log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + 2y^2\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
&= \log\left(x^2+y^2\right) + 2\left(\frac{x^2\left(x^2+y^2\right)+y^2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) \\
&= \log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2\left(x^4+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = (F_1)_y
\end{aligned}$$

Quindi il campo è irrotazionale in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
b. Essendo il campo vettoriale irrotazionale in Ω, che però non è un dominio semplicemente connesso, non possiamo garantire che sia conservativo senza determinarne un potenziale. Cerchiamo quindi un potenziale $U(x,y)$ tale che

$$\begin{gathered}
U_x(x,y) = F_1 = y\log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \\
U(x,y) = \int\left(y\log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right)dx \\
\int y\log\left(x^2+y^2\right)dx = y\left\{x\log\left(x^2+y^2\right) - \int x\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}dx\right\}
\end{gathered}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int\left(y\log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right)dx \\
&= xy\log\left(x^2+y^2\right) - \int\frac{2x^2y}{x^2+y^2}dx + \int\frac{2x^2y}{x^2+y^2}dx \\
&= xy\log\left(x^2+y^2\right) + f(y).
\end{aligned}$$

$$U_y(x,y) = x\log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} + f'(y) = F_2$$

quindi $f'(y) = 0, f(y) = c$ e un potenziale è:

$$U(x,y) = xy\log\left(x^2+y^2\right),$$

che è definito in tutto Ω. Pertanto il campo è conservativo in Ω.

4. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ z = R\sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $R > 0$ costante fissata. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ, l'elemento d'area di Σ, e aver individuato gli eventuali punti singolari della superficie, calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_{\Sigma} |xy| \, dS.$$

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = R\cos^3 t \\ z = b(t) = R\sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = (R\cos^3 t)\cos\theta \\ y = (R\cos^3 t)\sin\theta \\ z = R\sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi].$$

$$a'(t) = -3R\cos^2 t\sin t, b'(t) = 3R\sin^2 t\cos t$$

$$\begin{aligned} dS &= |a(t)| \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} dt d\theta \\ &= R\left(\cos^3 t\right) 3R\,|\cos t\sin t|\, dt d\theta \end{aligned}$$

Si hanno punti singolari per $\cos t = 0$ o $\sin t = 0$, cioè per $t = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$; i punti singolari corrispondenti sono:

$$(0, 0, R), (0, 0, -R)$$

e la circonferenza di punti singolari

$$x^2 + y^2 = R^2, z = 0.$$

$$\begin{aligned} \int\int_{\Sigma} |xy| \, dS &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left| \left(R\cos^3 t\right)\cos\theta \left(R\cos^3 t\right)\sin\theta \right| R\left(\cos^3 t\right) 3R\,|\cos t\sin t|\, d\theta \right) dt \\ &= 3R^4 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} t\,|\sin t|\, dt \right) \left(\int_0^{2\pi} |\cos\theta\sin\theta|\, d\theta \right) \\ &= 3R^4 \left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} t\sin t dt \right) \left(4\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta d\theta \right) \\ &= 24R^4 \left[-\frac{\cos^{11} t}{11} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 24R^4 \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{12}{11}R^4. \end{aligned}$$

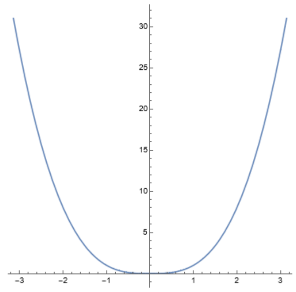
5. Si consideri la funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = |x|^3.$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (con punti angolosi). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[-\pi, \pi]$. I coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{k}\right)$.



b. La funzione è pari, perciò $b_k = 0$ per ogni k. Per calcolare gli a_k, poiché $T = 2\pi$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3\cos(kx)\,dx$$

per $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[x^3\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 3x^2\frac{\sin(kx)}{k}dx\right\}\\
&= -\frac{6}{k\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(kx)\,dx = -\frac{6}{k\pi}\left\{\left[-x^2\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\frac{\cos(kx)}{k}dx\right\}\\
&= -\frac{6}{k\pi}\left\{-\pi^2\frac{\cos(k\pi)}{k} + \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx\right\}\\
&= \frac{6\pi}{k^2}\cos(k\pi) - \frac{12}{k^2\pi}\left\{\left[x\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}dx\right\}\\
&= \frac{6\pi}{k^2}\cos(k\pi) + \frac{12}{k^3\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx\\
&= \frac{6\pi}{k^2}\cos(k\pi) + \frac{12}{k^3\pi}\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{6\pi}{k^2}\cos(k\pi) + \frac{12}{k^4\pi}(1-\cos(kx)).
\end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^4}{4} = \frac{\pi^3}{2}.$$

La serie di Fourier di f è

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx)\\
&= \frac{\pi^3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6\pi}{k^2}\cos(k\pi) + \frac{12}{k^4\pi}(1-\cos(kx))\cos(kx).
\end{aligned}$$

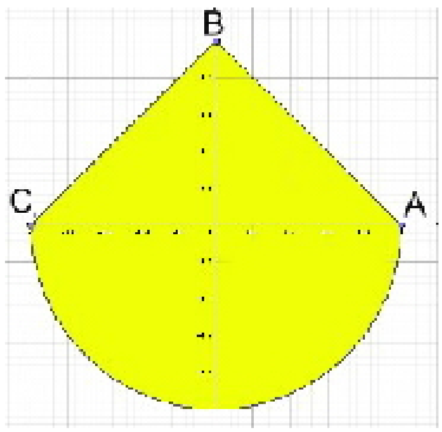
Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2023/2024. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°4

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Calcolare l'integrale doppio

$$I = \int\int_{\Omega} |xy|\, dxdy$$

dove Ω è la regione rappresentata in figura (dove $A = (1,0)$, $B(0,1)$, $C = (-1,0)$ e la curva che unisce A e C è una semicirconferenza). Si raccomanda di sfruttare le simmetrie e curare l'impostazione analitica del calcolo.



Per simmetria,

$$\int\int_{\Omega} |xy|\, dxdy = 2\int\int_{\Omega^+} x\,|y|\, dxdy$$

dove Ω^+ è la porzione di Ω in cui $x \geq 0$, rappresentata da:

$$\Omega^+ = \left\{(x,y) : x \in [0,1], y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, 1-x\right]\right\}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_0^1 x\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} |y|\, dy\right) dx \\
&= 2\int_0^1 x\left\{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} -ydy + \int_0^{1-x} ydy\right\} dx \\
&= 2\int_0^1 x\left\{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy + \int_0^{1-x} ydy\right\} dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^1 x\frac{1}{2}\left\{\left(1-x^2\right)+(1-x)^2\right\}dx \\
&= \int_0^1 x\left(1-x^2+1-2x+x^2\right)dx = \int_0^1 x\,(2-2x)\,dx \\
&= 2\int_0^1 \left(x-x^2\right)dx = 2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

2. Si consideri il solido semiellissoidale descritto da:

$$
\Omega = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1, z \ge 0\right\}
$$

con a, b, c costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza. Calcolare volume e centroide di Ω, sfruttando opportunamente le simmetrie.

Un argomento di dilatazione mostra facilmente che il volume è $abc\cdot$(volume della semisfera di raggio 1) , quindi

$$
|\Omega| = \frac{2}{3}\pi abc.
$$

Per simmetria, il centroide C ha $x_C = y_C = 0$, mentre

$$
\begin{aligned}
z_C &= \frac{1}{|\Omega|}\int\int\int_\Omega z dxdydz \\
&= \frac{3}{2\pi abc}\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\left(\int_0^{c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}} zdz\right)dxdy \\
&= \frac{3}{2\pi abc}\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\frac{c^2}{2}\left(1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right)dxdy \\
&[x = au; y = bv; dxdy = abdudv] \\
&= \frac{3c}{4\pi ab}\int\int_{u^2+v^2\le 1}\left(1-\left(u^2+v^2\right)\right)abdudv \\
&= \frac{3c}{4\pi}2\pi\int_0^1\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho = \frac{3c}{2}\int_0^1\left(\rho-\rho^3\right)d\rho \\
&= \frac{3c}{2}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3c}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}c.
\end{aligned}
$$

Il centroide ha coordinata $\left(0,0,\frac{3}{8}c\right)$.

3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$
\underline{F} = \left(-yz, xz, z^4\right)
$$

lungo l'arco di curva

$$
\gamma : \begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \sin(2t) \\ z = \sqrt[5]{t} \end{cases} \quad \text{per } t \in [0, 2\pi].
$$

Riportare impostazione e passaggi intermedi.

$$\begin{aligned}
\underline{r}'(t) &= \left(-2\sin(2t), 2\cos(2t), \frac{1}{5t^{4/5}}\right).\\
\underline{F}(\underline{r}(t)) &= \left(-\sqrt[5]{t}\sin(2t), \sqrt[5]{t}\cos(2t), t^{4/5}\right)\\
\underline{F}(\underline{r}(t))\cdot\underline{r}'(t) &= \left(-\sqrt[5]{t}\sin(2t), \sqrt[5]{t}\cos(2t), t^{4/5}\right)\cdot\left(-2\sin(2t), 2\cos(2t), \frac{1}{5t^{4/5}}\right)\\
&= 2\sqrt[5]{t}+\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi}\underline{F}(\underline{r}(t))\cdot\underline{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\left(2\sqrt[5]{t}+\frac{1}{5}\right)dt = 2\left[\frac{5}{6}t^{\frac{6}{5}}\right]_0^{2\pi}+\frac{2\pi}{5}\\
&= \frac{5}{3}(2\pi)^{6/5}+\frac{2\pi}{5} = 2\pi\left(\frac{5}{3}\sqrt[5]{2\pi}+\frac{2}{5}\right).
\end{aligned}$$

4. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ z = R\sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $R > 0$ costante fissata. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ, si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, z)$$

uscente dalla superficie Σ. **Si richiede di calcolare il flusso direttamente dalla definizione, senza fare uso del teorema della divergenza.** Prestare cura nell'impostazione, riportando i passaggi relativi.

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = R\cos^3 t \\ z = b(t) = R\sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = (R\cos^3 t)\cos\theta \\ y = (R\cos^3 t)\sin\theta \\ z = R\sin^3 t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi].$$

Per calcolare $\underline{n}dS$ calcoliamo:

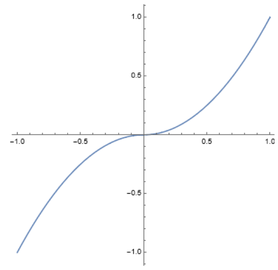
$$\begin{aligned}
\underline{r}_t \times \underline{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -3R\cos^2 t\sin t\cos\theta & -3R\cos^2 t\sin t\sin\theta & 3R\sin^2 t\cos t \\ -(R\cos^3 t)\sin\theta & (R\cos^3 t)\cos\theta & 0 \end{vmatrix}\\
&= 3R\cos t\sin t\cdot R\cos^3 t\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\cos t\cos\theta & -\cos t\sin\theta & \sin t \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix}\\
&= 3R^2\cos^4 t\sin t\,(-\sin t\cos\theta, -\sin t\sin\theta, -\cos t)
\end{aligned}$$

Quindi
$$\underline{n}dS = \pm 3R^2 \cos^4 t \sin t \left(-\sin t \cos\theta, -\sin t \sin\theta, -\cos t\right) dt d\theta$$
e per avere la normale uscente, ragionando sulla componente z, vediamo che il segno da scegliere è:
$$\underline{n}dS = 3R^2 \cos^4 t \sin t \left(\sin t \cos\theta, \sin t \sin\theta, \cos t\right) dt d\theta.$$
Ora sulla superficie è:
$$\underline{F} = \left(\left(R\cos^3 t\right)\cos\theta, \left(R\cos^3 t\right)\sin\theta, R\sin^3 t\right)$$
e il flusso uscente è:
$$\Phi\left(\underline{F}, \Sigma\right) = \int\int_{\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{n}dS$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\left(R\cos^3 t\right)\cos\theta, \left(R\cos^3 t\right)\sin\theta, R\sin^3 t\right) \cdot \left(\sin t\cos\theta, \sin t\sin\theta, \cos t\right)\right) 3R^2 \cos^4 t \sin t dt$$
$$= 3R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\cos^3 t \sin t + \sin^3 t \cos t\right)\right) \cos^4 t \sin t dt$$

$$= 3R^3 \cdot 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \sin^2 t dt = 12\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \left(1 - \sin^2 t\right)^2 \sin^2 t dt$$
$$(\sin t = u; \cos t dt = du; u \in [0,1])$$
$$= 12\pi R^3 \int_0^1 \left(1-u^2\right)^2 u^2 du = 12\pi R^3 \int_0^1 \left(u^2 - 2u^4 + u^6\right) du$$
$$= 12\pi R^3 \left[\frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right]_0^1 = 12\pi R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right)$$
$$= 12\pi R^3 \left(\frac{35 - 42 + 15}{3\cdot 5\cdot 7}\right) = 4\pi R^3 \left(\frac{8}{5\cdot 7}\right) = \frac{32}{35}\pi R^3.$$

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1,1]$ da
$$f(x) = x|x|$$
a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

$a.$ La funzione è continua in $[-1, 1]$ (ma non soddisfa le condizioni di raccordo) ed è regolare a tratti.



Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[-1, 1]$ a eccezione dei punti ± 1 in cui converge a $\left(f\left(1^{-}\right) + f\left(-1^{+}\right)\right)/2 = 0$. I coefficienti di Fourier tenderanno a zero ma non soddisfano una stima di decrescita.
$b.$ La funzione è dispari, perciò $a_k = 0$ per ogni k. Per calcolare i b_k, poiché $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(k\omega x)\,dx = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\sin(k\omega x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx \\
&= 2\int_0^1 x^2\sin(k\pi x)\,dx \\
&= 2\left\{\left[-\frac{1}{k\pi}x^2\cos(k\pi x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{k\pi}2x\cos(k\pi x)\,dx\right\} \\
&= -\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4}{k\pi}\left\{\int_0^1 x\cos(k\pi x)\,dx\right\} \\
&= -\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4}{k\pi}\left\{\left[\frac{1}{k\pi}x\sin(k\pi x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)\,dx\right\} \\
&= -\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) - \frac{4}{(k\pi)^2}\left[-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi x)\right]_0^1 \\
&= -\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4}{(k\pi)^3}\left(\cos(k\pi) - 1\right)
\end{aligned}$$

La serie di Fourier di f è

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{4}{(k\pi)^3}\left(\cos(k\pi) - 1\right)\right]\sin(k\pi x).
\end{aligned}$$