Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Sia Ω una lamina materiale piana, non omogenea, descritta nel piano xy dalla porzione di corona circolare di centro $(0,0)$, raggi $R, 2R$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$, avente densità superficiale

$$\delta(x,y) = \frac{\mu}{R^3}(y+R)$$

(dove R, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente). Dopo aver scritto opportunamente la rappresentazione analitica di Ω,
a) calcolare la massa totale della lamina;
b) calcolare il suo baricentro.
Si raccomanda di fare una figura, sfruttare le simmetrie, prestare cura nell'impostazione, e semplificare il più possibile i risultati ottenuti.

2. Si consideri il solido Ω (piramide a base quadrata) descritto analiticamente da:

$$\Omega = \{(x,y,z) : z \in [0,a], |x| + |y| \leq z\},$$

dove a è una costante positiva avente le dimensioni di una lunghezza. Calcolare il volume di Ω e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z, supponendo sia omogeneo e di massa m. Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione e sfruttare le simmetrie.

3. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F} = \left(-yx^2, xy^2\right).$$

a. Stabilire se il campo è irrotazionale o meno nel piano.
b. Calcoalre la circuitazione di $\underline{F}$ lungo la curva (ellisse)

$$\gamma : \underline{r}(t) = (a\cos t, b\sin t), \text{ per } t \in [0, 2\pi]$$

(con a, b costanti positive).

4. Sia Σ la superficie semisferica materiale di centro l'origine, raggio R, contenuta nel semispazio $z \geq 0$, avente densità superficiale

$$\sigma(x, y, z) = \frac{\mu z}{R^5}\left(R^2 - |xy|\right),$$

dove $\mu > 0$ è una costante avente le dimensioni di una massa. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e l'elemento d'area, calcolare la massa totale di Σ.

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1, 1]$ da

$$f(x) = x^2 |x|.$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)____________________________________
codice persona (o n°di matricola)____________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Si calcoli l'integrale doppio

$$\int\int_T |x|\, y dxdy$$

dove T è il triangolo di vertici $(-1,-1)\,,(3,3)\,,(-1,7)$. Si presti attenzione all'impostazione e si riporti l'espressione analitica che definisce l'insieme T.

2. Si calcolino il volume e il momento d'inerzia rispetto all'asse z del solido Ω omogeneo di massa m descritto analiticamente da:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : z \in [0,h]\,, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \left(\frac{z}{h}\right)^2\right\}$$

(cono a base ellittica), dove h, a, b sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza.

3. Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana di equazione in forma polare

$$\rho = R\theta \sin\theta, \text{ per } \theta \in [0,\pi]\,,$$

utilizzando la formula dedotta dal teorema di Gauss-Green.

4. Sia Σ la superficie grafico della funzione

$$f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^2 \text{ per } x^2+y^2 \leq R^2$$

(con $R>0$ costante fissata). Dopo aver calcolato l'elemento d'area su Σ, calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_{\Sigma} z dS.$$

5. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z per un angolo di $\frac{\pi}{2}$ (NON un giro completo!) la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche (quarto di ellisse):

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ z = b\sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $a, b > 0$ costanti fissate. Si scrivano le equazioni parametriche di Σ, si calcoli il versore normale e l'elemento d'area, e si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x,y,z)$$

attraverso la superficie Σ, orientata col versore normale che si allontana dall'origine.

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Tema n°3

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)_______________________________________
codice persona (o n°di matricola)_______________________________________
n°d'ordine (v. elenco)_______________________________________

1. Si calcoli il momento d'inerzia rispetto all'asse z di una lamina triangolare Ω omogenea di massa m che, nel piano xy, ha vertici nei punti $(0,1),(2,-1),(-2,-1)$.
Si presti cura nell'impostazione e riporti la rappresentazione analitica di Ω.

2. Si consideri il solido materiale omogeneo Ω descritto analiticamente da:

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) : x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq \frac{x^2+y^2}{R} \right\},$$

con $R>0$ costante avente le dimensioni di una lunghezza. Calcolare volume e centroide di Ω. Prestare cura all'impostazione e sfruttare le simmetrie.

3. Si consideri il campo vettoriale piano:

$$\underline{F}(x,y)=\left(e^{-xy}\left(2x-x^2y+y^3\right),e^{-xy}\left(xy^2-2y-x^3\right)+e^{-y}(1-y)\right).$$

a. Si verifichi se il campo è irrotazionale o meno nel suo dominio di definizione Ω.
b. Si stabilisca se il campo è conservativo o meno nel dominio Ω, calcolando in caso affermativo un potenziale di $\underline{F}$.

4. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz è il grafico della funzione

$$z=|x-2R| \text{ per } x\in[R,3R],$$

con $R>0$ costante fissata. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e l'elemento d'area di Σ, calcolare l'area e il centroide di Σ, sfruttando le simmetrie.

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1,1]$ da

$$f(x)=e^{-|x|}\operatorname{sgn}(x)$$

(dove $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 \text{ per } x>0\\ -1 \text{ per } x<0\end{cases}$).
a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Tema n°4

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)___________________________________
codice persona (o n°di matricola)___________________________________
n°d'ordine (v. elenco)____

1. Calcolare l'integrale doppio

$$I = \int\int_{\Omega} x e^{-|y|} dx dy$$

dove Ω è il semicerchio di centro l'origine e raggio R contenuto nel semipiano $x \geq 0$. Si raccomanda di sfruttare le simmetrie e curare l'impostazione analitica del calcolo.

2. Si calcoli l'integrale triplo

$$\int\int\int_{\Omega} \left(x^2 + |yz|\right) dx dy dz$$

dove Ω è la sfera di centro l'origine e raggio $R > 0$.

3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = (yz, x, y)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \cos t \\ z = \sin t \end{cases} \qquad \text{per } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

4. Si consideri la superficie conica Σ di raggio R e altezza h ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ z = h - \frac{h}{R}t \end{cases} \quad t \in [0, R]$$

Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ, l'elemento d'area e il versore normale (orientato in modo da avere componente z positiva) si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, z)$$

attraverso la superficie Σ.
Se ora si completa la superficie Σ aggiungendo anche la base del cono, in modo da avere una superficie chiusa Σ', si completi il calcolo precedente in modo da ottenere il flusso uscente da Σ'.

5. Si consideri la funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \sin|x|$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	7
2	6
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Sia Ω una lamina materiale piana, non omogenea, descritta nel piano xy dalla porzione di corona circolare di centro $(0,0)$, raggi $R, 2R$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$, avente densità superficiale

$$\delta(x,y) = \frac{\mu}{R^3}(y+R)$$

(dove R, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente). Dopo aver scritto opportunamente la rappresentazione analitica di Ω,
a) calcolare la massa totale della lamina;
b) calcolare il suo baricentro.
Si raccomanda di fare una figura, sfruttare le simmetrie, prestare cura nell'impostazione, e semplificare il più possibile i risultati ottenuti.

$$\Omega = \left\{(x,y) : R^2 \leq x^2 + y^2 \leq (2R)^2, y \geq 0\right\}.$$

a)

$$m = \int\int_\Omega \delta(x,y)\,dxdy = \frac{\mu}{R^3}\int\int_\Omega (y+R)\,dxdy$$

in coordinate polari

$$= \frac{\mu}{R^3}\int_R^{2R}\left(\int_0^\pi (\rho\sin\theta + R)\,d\theta\right)\rho d\rho = \frac{\mu}{R^3}\int_R^{2R}(2\rho + \pi R)\,\rho d\rho$$

$$= \frac{\mu}{R^3}\left[\frac{2}{3}\rho^3 + \pi R\frac{\rho^2}{2}\right]_R^{2R} = \frac{\mu}{R^3}\left[\frac{2}{3}7R^3 + \pi R\frac{3R^2}{2}\right]$$

$$= \mu\left(\frac{14}{3} + \frac{3}{2}\pi\right).$$

b) Per simmetria il baricentro avrà $x_C = 0$, mentre

$$y_C = \frac{1}{m}\int\int_\Omega y\delta(x,y)\,dxdy = \frac{1}{m}\frac{\mu}{R^3}\int\int_\Omega y(y+R)\,dxdy$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{14}{3} + \frac{3}{2}\pi\right)R^3}\int_R^{2R}\left(\int_0^\pi (\rho\sin\theta + R)\,\rho\sin\theta d\theta\right)\rho d\rho$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{14}{3} + \frac{3}{2}\pi\right)R^3}\int_R^{2R}\left(\int_0^\pi \left(\rho\sin^2\theta + R\sin\theta\right)d\theta\right)\rho^2 d\rho$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(\frac{14}{3}+\frac{3}{2}\pi\right)R^3}\int_R^{2R}\left(\rho\frac{\pi}{2}+2R\right)\rho^2 d\rho \\
&= \frac{1}{\left(\frac{14}{3}+\frac{3}{2}\pi\right)R^3}\left[\frac{\rho^4}{4}\frac{\pi}{2}+2R\frac{\rho^3}{3}\right]_R^{2R} \\
&= \frac{R}{\left(\frac{14}{3}+\frac{3}{2}\pi\right)}\left(\frac{15}{4}\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{\frac{14}{3}+\frac{15}{8}\pi}{\frac{14}{3}+\frac{3}{2}\pi}\right)R.
\end{aligned}
$$

2. Si consideri il solido Ω (piramide a base quadrata) descritto analiticamente da:

$$
\Omega=\left\{(x,y,z): z\in[0,a], |x|+|y|\leq z\right\},
$$

dove a è una costante positiva avente le dimensioni di una lunghezza. Calcolare il volume di Ω e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z, supponendo sia omogeneo e di massa m. Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione e sfruttare le simmetrie.

$$
|\Omega|=\int_0^a\left(\int\int_{|x|+|y|\leq z}dxdy\right)dz=4\int_0^a\left(\int\int_{x+y\leq z, x\geq 0, y\geq 0}dxdy\right)dz
$$

(poiché l'integrale interno è l'area di un triangolo rettangolo isoscele di cateto z)

$$
=4\int_0^a\frac{z^2}{2}dz=\frac{2}{3}a^3.
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{m}{|\Omega|}\int\int\int_\Omega\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\frac{m}{\frac{2}{3}a^3}\int_0^a\left(\int\int_{|x|+|y|\leq z}\left(x^2+y^2\right)dxdy\right)dz \\
&= \frac{3m}{2a^3}4\int_0^a\left(\int\int_{x+y\leq z, x\geq 0, y\geq 0}\left(x^2+y^2\right)dxdy\right)dz \\
&= \frac{6m}{a^3}\int_0^a\left(\int_0^z\left(\int_0^{z-x}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx\right)dz=\frac{6m}{a^3}\int_0^a\left(\int_0^z\left(x^2(z-x)+\frac{(z-x)^3}{3}\right)dx\right)dz \\
&= \frac{6m}{a^3}\int_0^a\left(\frac{z^4}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^4}{12}\right)dz=\frac{6m}{a^3}\int_0^a\left(\frac{z^4}{6}\right)dz=\frac{1}{a^3}\frac{a^5}{5}m=\frac{1}{5}ma^2.
\end{aligned}
$$

3. Si consideri il campo vettoriale piano

$$
\underline{F}=\left(-yx^2, xy^2\right).
$$

a. Stabilire se il campo è irrotazionale o meno nel piano.
b. Calcoalre la circuitazione di $\underline{F}$ lungo la curva (ellisse)

$$
\gamma: \underline{r}(t)=(a\cos t, b\sin t), \text{ per } t\in[0,2\pi]
$$

(con a, b costanti positive).

a.

$$(F_1)_y = -x^2; (F_2)_x = y^2.$$

Il campo non è irrotazionale.

b.

$$\begin{aligned} \underline{F}(\underline{r}(t)) &= \left(-a^2 b\cos^2 t\sin t, ab^2\cos t\sin^2 t\right) \\ \underline{r}'(t) &= (-a\sin t, b\cos t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} &= \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{r}(t))\cdot \underline{r}'(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-a^2 b\cos^2 t\sin t, ab^2\cos t\sin^2 t\right)\cdot(-a\sin t, b\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(a^3 b + ab^3\right)\cos^2 t\sin^2 t dt \\ &= \left(a^3 b + ab^3\right)\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{\pi}{4}ab\left(a^2+b^2\right). \end{aligned}$$

4. Sia Σ la superficie semisferica materiale di centro l'origine, raggio R, contenuta nel semispazio $z \geq 0$, avente densità superficiale

$$\sigma(x,y,z) = \frac{\mu z}{R^5}\left(R^2 - |xy|\right),$$

dove $\mu > 0$ è una costante avente le dimensioni di una massa. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e l'elemento d'area, calcolare la massa totale di Σ.

$$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases} \quad \phi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \theta\in[0,2\pi].$$

$$dS = R^2\sin\phi d\phi d\theta$$

$$\begin{aligned} m &= \int\int_\Sigma \sigma(x,y,z)\,dS = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu R\cos\phi}{R^5}\left(R^2 - \left|R^2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\right|\right)R^2\sin\phi d\phi\right)d\theta \\ &= \frac{\mu R^5}{R^5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \left|\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\right|\right)d\theta\right)\cos\phi\sin\phi d\phi \\ &= \mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\right)d\theta\right)\cos\phi\sin\phi d\phi \\ &= 4\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^2\phi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}\right)\cos\phi\sin\phi d\phi \\ &= 2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\pi - \sin^2\phi\right)\cos\phi\sin\phi d\phi = 2\mu\left[\pi\frac{\sin^2\theta}{2} - \frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} \\ &= 2\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\right) = \mu\left(\pi - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1,1]$ da

$$f(x) = x^2 |x| .$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti (ma la periodizzata non è derivabile negli estremi dell'intervallo). Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[-1,1]$ e i coefficienti di Fourier saranno $o\left(\frac{1}{k}\right)$.
b. La funzione è pari, perciò $b_k = 0$. Essendo $T = 2, \omega = 2\pi/T = \pi$,

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = 2\int_0^1 x^3\cos(k\pi x)\,dx.$$

$$a_0 = 2\int_0^1 x^3 dx = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo, per $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_k &= 2\int_0^1 x^3\cos(k\pi x)\,dx = 2\left\{\left[x^3\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 3x^2\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}dx\right\}\\
&= -\frac{6}{k\pi}\int_0^1 x^2\sin(k\pi x)\,dx = -\frac{6}{k\pi}\left\{\left[-x^2\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 2x\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}dx\right\}\\
&= -\frac{6}{k\pi}\left\{-\frac{\cos(k\pi)}{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 x\cos(k\pi x)\,dx\right\}\\
&= \frac{6}{(k\pi)^2}\cos(k\pi) - \frac{12}{(k\pi)^2}\left\{\left[x\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}dx\right\}\\
&= \frac{6}{(k\pi)^2}\cos(k\pi) + \frac{12}{(k\pi)^3}\left[-\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^1\\
&= \frac{6}{(k\pi)^2}\cos(k\pi) + \frac{12}{(k\pi)^4}(1-\cos(k\pi)).
\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{6}{(k\pi)^2}\cos(k\pi) + \frac{12}{(k\pi)^4}(1-\cos(k\pi))\right]\cos(k\pi x)$$

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Si calcoli l'integrale doppio
$$\int\int_T |x|\, y dxdy$$
dove T è il triangolo di vertici $(-1,-1),(3,3),(-1,7)$. Si presti attenzione all'impostazione e si riporti l'espressione analitica che definisce l'insieme T.

$$T = \{(x,y) : x \in [-1,3], x \leq y \leq 6-x\}.$$

$$\begin{aligned}
\int\int_T |x|\, y dxdy &= \int_{-1}^{3}\left(\int_x^{6-x} |x|\, y dy\right) dx = \int_{-1}^{3} |x| \left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{6-x}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} |x| \left((6-x)^2 - x^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} |x| (36-12x)\, dx \\
&= 6\left\{\int_{-1}^{0} -x(3-x)\, dx + \int_0^3 x(3-x)\, dx\right\} \\
&= 6\left\{\int_{-1}^{0} \left(-3x+x^2\right) dx + \int_0^3 \left(3x-x^2\right) dx\right\} \\
&= 6\left\{\left[-\frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3\right\} \\
&= 6\left\{\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{3}{2}\cdot 9 - \frac{27}{3}\right]\right\} = 6\left\{6+\frac{1}{3}\right\} = 38.
\end{aligned}$$

2. Si calcolino il volume e il momento d'inerzia rispetto all'asse z del solido Ω omogeneo di massa m descritto analiticamente da:
$$\Omega = \left\{(x,y,z) : z \in [0,h], \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \left(\frac{z}{h}\right)^2\right\}$$
(cono a base ellittica), dove h, a, b sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza.

Volume:

$$|\Omega| = \int_0^h \left(\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq\left(\frac{z}{h}\right)^2} dxdy\right) dz$$

poiché l'integrale interno è l'area di un'ellisse avente semiassi $\frac{az}{h}, \frac{bz}{h}$,

$$= \int_0^h \pi ab \frac{z^2}{h^2} dz = \pi \frac{ab}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi hab.$$

Momento d'inerzia:

$$I = \frac{m}{|\Omega|} \int\int\int_\Omega \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \frac{3m}{\pi abh} \int_0^h \left(\int\int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \left(\frac{z}{h}\right)^2} \left(x^2 + y^2\right) dxdy \right) dz$$

introducendo nell'integrale interno le coordinate polari ellittiche

$$\begin{cases} x = a\rho \cos\theta \\ y = b\rho \sin\theta \end{cases} \quad dxdy = ab\rho d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{3m}{\pi abh} \int_0^h \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{z}{h}} \rho^2 \left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right) ab\rho d\rho \right) d\theta \right) dz \\ &= \frac{3m}{\pi h} \left(\int_0^{2\pi} \left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right) d\theta \right) \int_0^h \left(\int_0^{\frac{z}{h}} \rho^3 d\rho \right) dz \\ &= \frac{3m}{\pi h} \pi \left(a^2 + b^2\right) \int_0^h \frac{1}{4} \left(\frac{z}{h}\right)^4 dz = \frac{3m}{4h^5} \left(a^2 + b^2\right) \frac{h^5}{5} = \frac{3}{20} m \left(a^2 + b^2\right). \end{aligned}$$

$$m = \int\int\int_\Omega \delta(x, y, z)\, dxdydz = \int_0^h \frac{\mu z}{h^2 R^2} \left(\int\int_{\sqrt{x^2+y^2} \leq R\left(1 - \frac{z}{h}\right)} dxdy \right) dz.$$

3. Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana di equazione in forma polare

$$\rho = R\theta \sin\theta, \text{ per } \theta \in [0, \pi],$$

utilizzando la formula dedotta dal teorema di Gauss-Green.

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi R^2 \theta^2 \sin^2\theta d\theta \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^\pi \theta^2 \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{R^2}{4} \int_0^\pi \left[\theta^2 - \theta^2 \cos 2\theta\right] d\theta. \end{aligned}$$

Ora:

$$\int_0^\pi \theta^2 d\theta = \frac{\pi^3}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \theta^2 \cos 2\theta d\theta &= \left[\theta^2 \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2\theta \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = -\int_0^\pi \theta \sin 2\theta d\theta \\ &= -\left\{ \left[-\theta \frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{2} d\theta \right\} = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\text{Area} = \frac{R^2}{4}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi R^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi R^2}{24}\left(2\pi^2 - 3\right).$$

4. Sia Σ la superficie grafico della funzione

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 \text{ per } x^2 + y^2 \leq R^2$$

(con $R > 0$ costante fissata). Dopo aver calcolato l'elemento d'area su Σ, calcolare l'integrale di superficie:

$$\int\int_{\Sigma} z dS.$$

L'elemento d'area è:

$$dS = \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2} dxdy$$

poiché f è radiale, $f = \rho^4, |\nabla f(x,y)| = 4\rho^3$,

$$dS = \sqrt{1 + 16\left(x^2 + y^2\right)^3} dxdy.$$

$$\int\int_{\Sigma} z dS = \int\int_{x^2+y^2\leq R^2} \left(x^2 + y^2\right)^2 \sqrt{1 + 16\left(x^2 + y^2\right)^3} dxdy$$

in coordinate polari

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^R \rho^4 \sqrt{1 + 16\rho^6} \rho d\rho \\
&= 2\pi \left[\frac{2}{3 \cdot 16 \cdot 6}\left(1 + 16\rho^6\right)^{3/2}\right]_0^R \\
&= \frac{\pi}{72}\left[\left(1 + 16R^6\right)^{3/2} - 1\right].
\end{aligned}$$

5. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z per un angolo di $\frac{\pi}{2}$ (NON un giro completo!) la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche (quarto di ellisse):

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ z = b\sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $a, b > 0$ costanti fissate. Si scrivano le equazioni parametriche di Σ, si calcoli il versore normale e l'elemento d'area, e si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, z)$$

attraverso la superficie Σ, orientata col versore normale che si allontana dall'origine.

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = a\cos t \\ z = b(t) = b\sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = a\cos t\cos\theta \\ y = a\cos t\sin\theta \quad t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \\ z = b\sin t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dS &= a(t)\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}dtd\theta \\ &= a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dtd\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{r}_t \times \underline{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -a\sin t\cos\theta & -a\sin t\sin\theta & b\cos t \\ -a\cos t\sin\theta & a\cos t\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(-ab\cos^2 t\cos\theta, -ab\cos^2 t\sin\theta, -a^2\cos t\sin t\right) \\ &= -a\cos t\left(b\cos t\cos\theta, b\cos t\sin\theta, a\sin t\right). \end{aligned}$$

$$\underline{n}dS = \pm\left(\underline{r}_t \times \underline{r}_\theta\right)dtd\theta = a\cos t\left(b\cos t\cos\theta, b\cos t\sin\theta, a\sin t\right)dtd\theta,$$

dove il segno è stato scelto in modo che il vettore si allontani dall'origine.

$$\underline{F}\left(\underline{r}(t,\theta)\right) = \left(a\cos t\cos\theta, a\cos t\sin\theta, b\sin t\right).$$

Il flusso è:

$$\begin{aligned} \Phi\left(\underline{F}, \Sigma\right) &= \int\int_\Sigma \underline{F}\cdot\underline{n}dS \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left(a\cos t\cos\theta, a\cos t\sin\theta, b\sin t\right)\cdot a\cos t\left(b\cos t\cos\theta, b\cos t\sin\theta, a\sin t\right)dtd\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a\cos t\left(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t\right)dtd\theta \\ &= a^2 b\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\cos t dt = \frac{\pi}{2}a^2 b. \end{aligned}$$

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°3

Es.	Punti
1	6
2	6
3	7
4	7
5	7
Tot.	33

1. Si calcoli il momento d'inerzia rispetto all'asse z di una lamina triangolare Ω omogenea di massa m che, nel piano xy, ha vertici nei punti $(0,1),(2,-1),(-2,-1)$.
Si presti cura nell'impostazione e riporti la rappresentazione analitica di Ω.

$$\Omega = \{(x,y) : x \in [-2,0], -1 \leq y \leq x+1\} \cup \{(x,y) : x \in [0,2], -1 \leq y \leq 1-x\}.$$

$$|\Omega| = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4.$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{|\Omega|} \int\int_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) dxdy = \text{(per simmetria)} \\ &= \frac{m}{4} 2 \int_0^2 \left(\int_{-1}^{1-x} \left(x^2+y^2\right) dy \right) dx = \frac{m}{2} \int_0^2 \left\{ x^2 (2-x) + \frac{1}{3} \left[(1-x)^3 + 1 \right] \right\} dx \\ &= \frac{m}{2} \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12} (1-x)^4 + \frac{x}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{m}{2} \left[\frac{16}{3} - \frac{16}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{2}{3} \right] = \frac{m}{2} \left(\frac{18}{3} - 4 \right) = m. \end{aligned}$$

2. Si consideri il solido materiale omogeneo Ω descritto analiticamente da:

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) : x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq \frac{x^2+y^2}{R} \right\},$$

con $R > 0$ costante avente le dimensioni di una lunghezza. Calcolare volume e centroide di Ω. Prestare cura all'impostazione e sfruttare le simmetrie.

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{R}} dz \right) dxdy = \int\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{x^2+y^2}{R} dxdy \\ &= \frac{1}{R} 2\pi \int_0^R \rho^2 \rho d\rho = \frac{1}{R} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2} R^3. \end{aligned}$$

Per simmetria, il centroide avrà $x_C = y_C = 0$.

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{1}{|\Omega|} \int\int\int_{\Omega} z dxdydz = \frac{2}{\pi R^3} \int\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{R}} z dz \right) dxdy \\ &= \frac{2}{\pi R^3} \int\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+y^2}{R} \right)^2 dxdy = \frac{1}{\pi R^5} 2\pi \int_0^R \rho^5 d\rho = \frac{2}{R^5} \frac{R^6}{6} = \frac{1}{3} R. \end{aligned}$$

Il centroide è: $\left(0,0,\frac{1}{3}R\right)$.

3. Si consideri il campo vettoriale piano:

$$\underline{F}(x,y)=\left(e^{-xy}\left(2x-x^2y+y^3\right),e^{-xy}\left(xy^2-2y-x^3\right)+e^{-y}(1-y)\right).$$

a. Si verifichi se il campo è irrotazionale o meno nel suo dominio di definizione Ω.
b. Si stabilisca se il campo è conservativo o meno nel dominio Ω, calcolando in caso affermativo un potenziale di $\underline{F}$.

a.

$$\begin{aligned}(F_1)_y&=e^{-xy}\left(-x\left(2x-x^2y+y^3\right)-x^2+3y^2\right)\\&=e^{-xy}\left(-2x^2+x^3y-xy^3-x^2+3y^2\right)\\&=e^{-xy}\left(-3x^2+x^3y-xy^3+3y^2\right)\\(F_2)_x&=e^{-xy}\left(-y\left(xy^2-2y-x^3\right)+y^2-3x^2\right)\\&=e^{-xy}\left(-xy^3+2y^2+x^3y+y^2-3x^2\right)\\&=e^{-xy}\left(-xy^3+3y^2+x^3y-3x^2\right)=(F_1)_y.\end{aligned}$$

Quindi il campo è irrotazionale in $\Omega=\mathbb{R}^2$.
b. Essendo il campo vettoriale irrotazionale in $\mathbb{R}^2$, che è un dominio semplicemente connesso, $\underline{F}$ è conservativo.
Cerchiamo un potenziale $U(x,y)$ tale che

$$\begin{aligned}U_x(x,y)&=F_1=e^{-xy}\left(2x-x^2y+y^3\right)\\U(x,y)&=\int e^{-xy}\left(2x-x^2y+y^3\right)dx\\&=\int e^{-xy}\left(2x-x^2y\right)dx+y^3\int e^{-xy}dx\\&=-\frac{e^{-xy}}{y}\left(2x-x^2y\right)+\int\frac{e^{-xy}}{y}(2-2xy)\,dx-y^2e^{-xy}\\&=e^{-xy}\left(-2\frac{x}{y}+x^2-y^2\right)+\frac{2}{y}\int e^{-xy}dx-2\int xe^{-xy}dx\\&=e^{-xy}\left(-2\frac{x}{y}+x^2-y^2\right)+\frac{2}{y}\left(-\frac{e^{-xy}}{y}\right)-2\left(-x\frac{e^{-xy}}{y}+\int\frac{e^{-xy}}{y}dx\right)\\&=e^{-xy}\left(-2\frac{x}{y}+x^2-y^2-\frac{2}{y^2}+2\frac{x}{y}\right)-\frac{2}{y}\int e^{-xy}dx\\&=e^{-xy}\left(x^2-y^2-\frac{2}{y^2}+\frac{2}{y^2}\right)+c(y)=e^{-xy}\left(x^2-y^2\right)+c(y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_y(x.y)&=e^{-xy}\left(-x\left(x^2-y^2\right)+2x\right)+c'(y)=e^{-xy}\left(xy^2-2y-x^3\right)+e^{-y}(1-y)\\c'(y)&=e^{-y}(1-y)\\c(y)&=\int e^{-y}(1-y)\,dy=-e^{-y}(1-y)-\int e^{-y}dy=-e^{-y}(1-y)+e^{-y}+c=ye^{-y}+c\end{aligned}$$

Quindi

$$U(x,y) = e^{-xy}\left(x^2 - y^2\right) + ye^{-y} + c.$$

4. Sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz è il grafico della funzione

$$z = |x - 2R| \text{ per } x \in [R, 3R],$$

con $R > 0$ costante fissata. Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ e l'elemento d'area di Σ, calcolare l'area e il centroide di Σ, sfruttando le simmetrie.

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = t \\ z = b(t) = |t - 2R| \end{cases} \text{per } t \in [R, 3R].$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \\ z = |t - 2R| \end{cases} \quad \text{per } t \in [R, 3R], \theta \in [0, 2\pi].$$

$$dS = |a(t)|\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}dtd\theta = t\sqrt{2}dtd\theta$$

$$|\Sigma| = \int\int_\Sigma dS = 2\pi\int_R^{3R} t\sqrt{2}dt = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_R^{3R} = 8\pi\sqrt{2}R^2.$$

Trattandosi di una superficie di rotazione, $x_C = y_C = 0$, mentre

$$\begin{aligned}
z_C &= \frac{1}{|\Sigma|}\int\int_\Sigma zdS = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}R^2}2\pi\int_R^{3R} t|t - 2R|\sqrt{2}dt \\
&= \frac{1}{4R^2}\left\{\int_R^{2R} t(2R - t)\,dt + \int_{2R}^{3R} t(t - 2R)\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{4R^2}\left\{\left[t^2R - \frac{t^3}{3}\right]_R^{2R} + \left[\frac{t^3}{3} - t^2R\right]_{2R}^{3R}\right\} \\
&= \frac{1}{4R^2}\left\{\left(4R^3 - \frac{8R^3}{3} - R^3 + \frac{R^3}{3}\right) + \left(\frac{27R^3}{3} - 9R^3 - \frac{8R^3}{3} + 4R^3\right)\right\} \\
&= \frac{R}{4}\left\{7 - \frac{15}{3}\right\} = \frac{R}{4}\left\{7 - \frac{15}{3}\right\} = \frac{R}{2}.
\end{aligned}$$

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1, 1]$ da

$$f(x) = e^{-|x|}\operatorname{sgn}(x)$$

(dove $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ per } x > 0 \\ -1 \text{ per } x < 0 \end{cases}$).

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La funzione periodizzata è discontinua in $\mathbb{R}$ ma regolare a tratti. Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f per $x \in (-1, 1), x \neq 0$; nei punti $0, \pm 1$ la serie converge alla media dei limiti destro e sinistro, cioè 0. I coefficienti di Fourier tenderanno a zero ma potrebbero non essere $o\left(\frac{1}{k}\right)$.
b. La funzione è dispari, perciò $a_k = 0$ per ogni k. Per calcolare i b_k, poiché $T = 2, \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(k\omega x)\, dx = 2 \int_0^1 e^{-x} \sin(k\pi x)\, dx.$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \underset{f'}{e^{-x}} \underset{g}{\sin(k\pi x)} dx = \left[-e^{-x} \sin(k\pi x)\right]_0^1 + \int_0^1 k\pi e^{-x} \cos(k\pi x)\, dx \\
&= k\pi \int_0^1 \underset{f'}{e^{-x}} \underset{g}{\cos(k\pi x)} dx = k\pi \left\{ \left[-e^{-x} \cos(k\pi x)\right]_0^1 - \int_0^1 k\pi e^{-x} \sin(k\pi x)\, dx \right\} \\
&= k\pi \left(1 - e^{-1} \cos(k\pi)\right) - (k\pi)^2 I.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{k\pi}{1 + (k\pi)^2} \left(1 - e^{-1} \cos(k\pi)\right) \\
b_k &= \frac{2k\pi}{1 + (k\pi)^2} \left(1 - e^{-1} \cos(k\pi)\right)
\end{aligned}$$

La serie di Fourier di f è

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi}{1 + (k\pi)^2} \left(1 - e^{-1} \cos(k\pi)\right) \sin(k\pi x).$$

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2024/2025. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema n°4

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Calcolare l'integrale doppio

$$I = \int\int_{\Omega} xe^{-|y|}dxdy$$

dove Ω è il semicerchio di centro l'origine e raggio R contenuto nel semipiano $x \geq 0$. Si raccomanda di sfruttare le simmetrie e curare l'impostazione analitica del calcolo.

In coordinate polari,

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega} xe^{-|y|}dxdy = \int_0^R \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos\theta e^{-\rho|\sin\theta|}d\theta\right)\rho d\rho \\
&= \int_0^R \left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta e^{-\rho\sin\theta}d\theta\right)\rho^2 d\rho = 2\int_0^R \left(\left[-\frac{e^{-\rho\sin\theta}}{\rho}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\rho^2 d\rho \\
&= 2\int_0^R \left(1-e^{-\rho}\right)\rho d\rho = 2\left[\frac{\rho^2}{2}+e^{-\rho}\left(1+\rho\right)\right]_0^R = 2\left(\frac{R^2}{2}+e^{-R}\left(1+R\right)-1\right).
\end{aligned}$$

2. Si calcoli l'integrale triplo

$$\int\int\int_{\Omega}\left(x^2+|yz|\right)dxdydz$$

dove Ω è la sfera di centro l'origine e raggio $R > 0$.
Utilizziamo le coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \quad dxdydz = \rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta. \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_{x^2+y^2+z^2\leq R^2}\left(x^2+|yz|\right)dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^R\left(\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\left|\sin\phi\cos\phi\sin\theta\right|\right)\rho^2 d\rho\right)\sin\phi d\phi\right)d\theta \\
&= \left(\int_0^R \rho^4 d\rho\right)\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left(\sin^3\phi\cos^2\theta+\sin^2\phi\left|\cos\phi\sin\theta\right|\right)d\theta\right)d\phi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi} \left(\pi \sin^3 \phi + \sin^2 \phi \left| \cos \phi \right| \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \right) d\phi \\
&= \frac{R^5}{5} 2 \int_0^{\pi/2} \left(\pi \sin \phi \left(1 - \cos^2 \phi \right) + 4 \sin^2 \phi \cos \phi \right) d\phi \\
&= \frac{2}{5} R^5 \left[\pi \left(-\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right) + \frac{4}{3} \sin^3 \phi \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2}{5} R^5 \left[\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{4}{3} \right] = \frac{4}{15} R^5 \left(\pi + 2 \right).
\end{aligned}
$$

3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$
\underline{F} = (yz, x, y)
$$

lungo l'arco di curva

$$
\gamma : \begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \cos t \\ z = \sin t \end{cases} \qquad \text{per } t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].
$$

Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

$$
\begin{aligned}
\underline{r}(t) &= (\sin(2t), \cos t, \sin t) \\
\underline{r}'(t) &= (2\cos(2t), -\sin t, \cos t). \\
\underline{F}(\underline{r}(t)) &= (\cos t \sin t, \sin(2t), \cos t) \\
\underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) &= (\cos t \sin t, \sin(2t), \cos t) \cdot (2\cos(2t), -\sin t, \cos t) \\
&= 2\cos(2t) \frac{\sin(2t)}{2} - \sin t \sin(2t) + \cos^2 t \\
&= \frac{1}{2} \sin(4t) + \frac{1}{2} (\cos(3t) - \cos t) + \cos^2 t.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \sin(4t) + \frac{1}{2} \cos(3t) - \frac{1}{2} \cos t + \cos^2 t \right\} dt \\
&= 0 + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(3t)}{3} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

4. Si consideri la superficie conica Σ di raggio R e altezza h ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva γ che nel piano xz ha equazioni parametriche:

$$
\begin{cases} x = t \\ z = h - \frac{h}{R} t \end{cases} \quad t \in [0, R]
$$

Dopo aver scritto le equazioni parametriche di Σ, l'elemento d'area e il versore normale (orientato in modo da avere componente z positiva) si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$
\underline{F} = (x, y, z)
$$

attraverso la superficie Σ.
Se ora si completa la superficie Σ aggiungendo anche la base del cono, in modo da avere una superficie chiusa Σ', si completi il calcolo precedente in modo da ottenere il flusso uscente da Σ'.

$$\gamma : \begin{cases} x = a(t) = t \\ z = b(t) = h - \frac{h}{R}t \end{cases} \quad t \in [0, R].$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \\ z = h - \frac{h}{R}t \end{cases} \quad t \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi].$$

$$dS = |a(t)|\sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2}dtd\theta = t\sqrt{1 + \left(\frac{h}{R}\right)^2}dtd\theta$$

Per calcolare $\underline{n}dS$ calcoliamo:

$$\begin{aligned} \underline{r}_t \times \underline{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & -\frac{h}{R} \\ -t\sin\theta & t\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{h}{R}t\cos\theta, \frac{h}{R}t\sin\theta, t\right) = t\left(\frac{h}{R}\cos\theta, \frac{h}{R}\sin\theta, 1\right), \end{aligned}$$

vettore che è già orientato nel verso richiesto.

$$\underline{n}dS = t\left(\frac{h}{R}\cos\theta, \frac{h}{R}\sin\theta, 1\right)dtd\theta.$$

Ora sulla superficie è:

$$\underline{F} = \left(t\cos\theta, t\sin\theta, h - \frac{h}{R}t\right)$$

e il flusso è:

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{F}, \Sigma) &= \int\int_\Sigma \underline{F} \cdot \underline{n}dS \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(t\cos\theta, t\sin\theta, h - \frac{h}{R}t\right) \cdot t\left(\frac{h}{R}\cos\theta, \frac{h}{R}\sin\theta, 1\right)d\theta dt \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} t\left(t\frac{h}{R} + h - \frac{h}{R}t\right)d\theta dt = 2\pi\int_0^R htdt = \pi hR^2. \end{aligned}$$

Se ora aggiungiamo anche la base, il cerchio $x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$, col versore normale uscente, quindi verso il basso, si ha:

$$\underline{n}dS = (0, 0, 1)\,dxdy$$

e il campo vettoriale sulla base è:

$$\underline{F} = (x, y, 0),$$

quindi

$$\underline{F} \cdot \underline{n}dS = (x, y, 0) \cdot (0, 0, 1)\,dxdy = 0,$$

e il contributo è nullo: il flusso non cambia.

5. Si consideri la funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \sin|x|$$

a. Dopo aver disegnato il grafico di f, in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.
b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.
Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata.*

a. La periodizzata della funzione è continua in $\mathbb{R}$ (ma ha punti angolosi) ed è regolare a tratti. Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in $[-\pi, \pi]$ e i coefficienti di Fourier saranno $o(1/k)$.
b. La funzione è pari, perciò $b_k = 0$ per ogni k. Per calcolare gli a_k, scriviamo

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos(kx)\,dx.$$

Se $k = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}.$$

Per $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x)}{2}dx \\
&\text{se } k \neq 1 \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((k+1)x)}{k+1} + \frac{\cos((k-1)x)}{k-1}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos((k+1)\pi)}{k+1} - \frac{1-\cos((k-1)\pi)}{k-1}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}(1-\cos((k+1)\pi))\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1+\cos(k\pi)}{1-k^2}.
\end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0.$$

La serie di Fourier di f è

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1+\cos(k\pi)}{1-k^2}\cos(kx).$$