

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Tema n°1

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello) _____
codice persona (o n° di matricola) _____
n° d'ordine (v. elenco) _____

1. Calcolare il centroide della lamina piana materiale omogenea Ω descritta nel piano xy da:

$$\Omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq R - x\},$$

dove R è una costante positiva aventi le dimensioni di una lunghezza. Si raccomanda fare una figura, sfruttare le simmetrie, curare l'impostazione analitica del calcolo e riscrivere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

2. Si consideri il solido Ω materiale a forma di semisfera di centro l'origine, raggio R , posto nel semispazio $z \geq 0$, di densità:

$$\delta(x, y, z) = \frac{(15R^2 - z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\mu}{R^5},$$

dove R, μ sono costanti positive avente le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente. Calcolare il momento d'inerzia di Ω rispetto all'asse z . Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione e riscrivere il risultato ottenuto nella forma il più possibile semplificata.

3. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F} = (y, -x)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \underline{r}(t) = (t \cos^2 t, t \sin^2 t), \text{ per } t \in [0, 2\pi].$$

4. Sia Σ la superficie grafico della funzione

$$z = \frac{x^2 - y^2}{R} \text{ per } x^2 + y^2 \leq R^2,$$

con $R > 0$ costante assegnata. Dopo aver calcolato l'elemento di superficie dS , calcolare l'integrale di superficie

$$\int \int_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS.$$

5. Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[-2, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } 1 \leq |x| \leq 2. \end{cases}$$

a. Dopo aver tracciato il grafico di f sul periodo $[-2, 2]$: in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f , tenendo conto del periodo e delle simmetrie, e scrivere la serie di Fourier.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata*.

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Tema n°2

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello) _____
codice persona (o n° di matricola) _____
n° d'ordine (v. elenco) _____

1. Sia Ω una lamina materiale piana omogenea, triangolare, di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$ nel piano xy , di massa m . Calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z (cioè all'origine). Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione, facendo una figura e rappresentando anzitutto Ω come dominio x -semplice, e semplificare il più possibile i risultati ottenuti.

2. Si consideri il tetraedro Ω di vertici $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ dove a, b, c sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza. Si calcoli l'integrale

$$\int \int \int_{\Omega} y dx dy dz.$$

Riportare con cura i passi dell'impostazione e riscrivere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

[Suggerimento: calcolare l'integrale *per fili*, dopo aver scritto la rappresentazione analitica di Ω adatta a questo calcolo, del tipo

$$\Omega = \{(x, y, z) : z \in [0, c], (x, y) \in T_z\}$$

dove $T_z = (1 - \frac{z}{c}) T_0$ e T_0 è il triangolo che nel piano (x, y) ha vertici $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$.]

3. Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana γ di equazione parametrica

$$\underline{r}(t) = (\cos(2t) - 2 \cos t, \sin(2t) - 2 \sin t), \text{ per } t \in [0, 2\pi],$$

utilizzando la formula dedotta dal teorema di Gauss-Green.

4. Scrivere le equazioni parametriche della superficie Σ generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ del piano xz

$$\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} \\ z = \frac{t^4}{4} \end{cases} \text{ per } t \in [0, 2\sqrt{2}].$$

Dopo aver calcolato l'elemento d'area, determinando gli eventuali punti singolari della superficie, calcolare l'integrale di superficie:

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z}.$$

5. Sia Σ la superficie grafico della funzione

$$z = e^{-x^2-y^2} \text{ per } x^2 + y^2 \leq 1.$$

Dopo aver calcolato l'elemento d'area dS e il versore normale $\underline{n}$ (orientato verso l'alto) si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, z)$$

attraverso la superficie Σ .

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Tema n°3

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello) _____
codice persona (o n° di matricola) _____
n° d'ordine (v. elenco) _____

1. Sia Ω il rombo di vertici $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 3)$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_{\Omega} (xy^4 + |x|y^3 + e^x |y|) dx dy.$$

Si raccomanda di fare una figura, curare l'impostazione *sfruttando le simmetrie*, e giustificare i passaggi.

2. Si consideri il cono materiale Ω di altezza h , raggio della base R , vertice nell'origine e asse sull'asse z , avente densità

$$\delta(x, y, z) = \frac{z|xy|}{h^2 R^4} \mu,$$

dove μ è una costante positiva avente le dimensioni di una massa, e R, h sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza. Dopo aver scritto la rappresentazione analitica di Ω , si calcoli la massa totale del cono. Prestare cura nell'impostazione, sfruttare le simmetrie e riscrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.

3. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F} = \left(\frac{x^3}{x^4 + y^4}, \frac{y^3}{x^4 + y^4} + y \right).$$

- a. Determinare il suo insieme di definizione Ω e stabilire se il campo è irrotazionale in Ω .
b. In base alla sola risposta al punto precedente, è possibile dire se il campo è conservativo in Ω ?
c. Calcolare, se esiste, un potenziale di $\underline{F}$ in Ω . Il campo $\underline{F}$ è conservativo?

4. Sia Σ la superficie materiale semisferica di centro l'origine e raggio R contenuta nel semispazio $z \geq 0$, avente densità superficiale

$$\sigma(x, y, z) = \left(1 + \frac{|x| + |y|}{R}\right) \frac{\mu}{R^2},$$

dove R, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente. Dopo aver scritto le equazioni parametriche e l'elemento d'area di Σ , calcolare la massa totale della superficie.

5. Si consideri la funzione 2π -periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ 0 & \text{se } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ -1 & \text{se } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

a. Dopo aver tracciato il grafico di f sul periodo $[-\pi, \pi]$: in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f e scrivere la serie di Fourier. Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata*.

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Tema n°4

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello) _____
codice persona (o n° di matricola) _____
n° d'ordine (v. elenco) _____

1. Si consideri la lamina materiale piana, non omogenea, Ω , rappresentata nel piano xy dal semicerchio di centro l'origine, raggio R e posto nel semipiano $y \geq 0$, avente densità superficiale

$$\delta(x, y) = \left(1 + \frac{|x| y^2}{R^3}\right) \frac{\mu}{R^2},$$

dove R, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente. Calcolare la massa totale della lamina.

2. Si calcoli l'integrale triplo

$$\int \int \int_{\Omega} (x^2 + z^2) dx dy dz$$

dove Ω è l'ellissoide di centro l'origine e raggio semiassi a, b, c (costanti positive).

3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = (-y, x, z)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t \cos^2 t \\ y = t \sin^2 t \\ z = t^2 \end{cases} \quad \text{per } t \in [0, 2\pi].$$

Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

4. Sia Σ la superficie grafico della funzione

$$z = \frac{x^2 - y^2}{R} \text{ per } x^2 + y^2 \leq R^2,$$

con $R > 0$ costante assegnata. Dopo aver calcolato l'elemento d'area dS e il versore normale $\underline{n}$ (orientato verso l'alto) si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (-x, y, z)$$

attraverso la superficie Σ .

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1, 1]$ da

$$f(x) = x(2 - x)$$

a. Dopo aver tracciato il grafico di f sul periodo $[-1, 1]$: in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier a_k di f (non è richiesto il calcolo dei b_k). Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata (suggerimento: sfruttare le simmetrie)*.

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Svolgimento Tema n°1

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Calcolare il centroide della lamina piana materiale omogenea Ω descritta nel piano xy da:

$$\Omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq R - x\},$$

dove R è una costante positiva aventi le dimensioni di una lunghezza. Si raccomanda fare una figura, sfruttare le simmetrie, curare l'impostazione analitica del calcolo e riscrivere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

Vedendo Ω come differenza tra un quarto di cerchio e un triangolo, calcoliamo l'area

$$|\Omega| = \frac{\pi}{4}R^2 - \frac{R^2}{2} = R^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right).$$

Per simmetria il centroide $C \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ avrà $\bar{x} = \bar{y}$. Riscriviamo Ω come dominio y -semplice:

$$\Omega = \{(x, y) : x \in [0, R], R - x \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}.$$

Calcoliamo perciò

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{|\Omega|} \int \int_{\Omega} x dx dy = \frac{1}{|\Omega|} \int_0^R x \left(\int_{R-x}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_0^R \left[x\sqrt{R^2-x^2} - x(R-x) \right] dx \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \left[-\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{3/2} - \frac{Rx^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^R \\ &= \frac{1}{R^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right)} \left[\frac{1}{3}R^3 - \frac{R^3}{2} + \frac{R^3}{3} \right] \\ &= \frac{4}{R^2(\pi-2)} R^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{6(\pi-2)} R = \frac{2}{3(\pi-2)} R.\end{aligned}$$

Quindi il centroide è $C \equiv \left(\frac{2}{3(\pi-2)} R, \frac{2}{3(\pi-2)} R \right)$.

2. Si consideri il solido Ω materiale a forma di semisfera di centro l'origine, raggio R , posto nel semispazio $z \geq 0$, di densità:

$$\delta(x, y, z) = \frac{\left(15R^2 - z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \mu}{R^5},$$

dove R, μ sono costanti positive avente le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente. Calcolare il momento d'inerzia di Ω rispetto all'asse z . Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione e riscrivere il risultato ottenuto nella forma il più possibile semplificata.

$$I = \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dx dy dz.$$

Introducendo le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

si ha

$$\Omega = \{(\rho, \phi, \theta) : \rho \in [0, R], \phi \in [0, \pi/2], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

e

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} (\rho^2 \sin^2 \phi) \frac{(15R^2 - \rho^2 \cos \phi) \mu}{R^5} \sin \phi d\phi \right) \rho^2 d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \frac{\mu}{R^5} \int_0^R \rho^4 \left(15R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \phi d\phi - \rho^2 \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \phi) \cos \phi d\phi \right) d\rho. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \phi d\phi &= \int_0^{\pi/2} \sin \phi (1 - \cos^2 \phi) d\phi \\ &\quad [\cos \phi = t] \\ &= \int_0^1 (1 - t^2) dt = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin^3 \phi) \cos \phi d\phi = \left[\frac{\sin^4 \phi}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \frac{\mu}{R^5} \int_0^R \rho^4 \left(15R^2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{\rho^2}{4} \right) d\rho = 2\pi \frac{\mu}{R^5} \left\{ 10R^2 \int_0^R \rho^4 d\rho - \frac{1}{4} \int_0^R \rho^6 d\rho \right\} \\ &= 2\pi \frac{\mu}{R^5} \left\{ 10R^2 \frac{R^5}{5} - \frac{1}{4} \frac{R^7}{7} \right\} = 2\pi \mu R^2 \left(2 - \frac{1}{28} \right) = \frac{55}{14} \pi \mu R^2. \end{aligned}$$

3. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale piano

$$\underline{F} = (y, -x)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \underline{r}(t) = (t \cos^2 t, t \sin^2 t), \text{ per } t \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned}\underline{F}(\underline{r}(t)) &= (t \sin^2 t, -t \cos^2 t) \\ \underline{r}'(t) &= (\cos^2 t - 2t \sin t \cos t, \sin^2 t + 2t \sin t \cos t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{r} &= \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (t \sin^2 t, -t \cos^2 t) \cdot (\cos^2 t - 2t \sin t \cos t, \sin^2 t + 2t \sin t \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2t^2 \sin^3 t \cos t - 2t^2 \sin t \cos^3 t) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} t^2 2 \sin t \cos t dt = - \int_0^{2\pi} \underbrace{t^2}_f \underbrace{\sin 2t}_{g'} dt \\ &= - \left\{ \left[-\frac{t^2}{2} \cos 2t \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} t \cos 2t dt \right\} \\ &= - \left\{ -2\pi^2 + \left(\left[\frac{t}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{2} dt \right) \right\} = 2\pi^2.\end{aligned}$$

4. Sia Σ la superficie grafico della funzione

$$z = \frac{x^2 - y^2}{R} \text{ per } x^2 + y^2 \leq R^2.$$

Dopo aver calcolato l'elemento di superficie dS , calcolare l'integrale di superficie

$$\int \int_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS.$$

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{R} \\ \nabla f(x, y) &= \frac{(2x, -2y)}{R}; dS = \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{4}{R^2} (x^2 + y^2)} dx dy. \\ I &\equiv \int \int_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \int \int_{x^2 + y^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{4}{R^2} (x^2 + y^2)} dx dy \\ &\text{(in coordinate polari)} \\ &= 2\pi \int_0^R \rho^2 \sqrt{1 + \frac{4}{R^2} \rho^2} \rho d\rho.\end{aligned}$$

Poiché

$$\int \sqrt{1 + \frac{4}{R^2} \rho^2} \rho d\rho = \frac{R^2}{12} \left(1 + \frac{4}{R^2} \rho^2 \right)^{3/2},$$

si ha:

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi \int_0^R \rho^2 \left(\frac{R^2}{12} \left(1 + \frac{4}{R^2} \rho^2 \right)^{3/2} \right)' d\rho \\
&= 2\pi \frac{R^2}{12} \left\{ \left[\rho^2 \left(1 + \frac{4}{R^2} \rho^2 \right)^{3/2} \right]_0^R - \int_0^R 2\rho \left(1 + \frac{4}{R^2} \rho^2 \right)^{3/2} d\rho \right\} \\
&= \pi \frac{R^2}{6} \left\{ 5^{3/2} R^2 - \left[\frac{R^2}{10} \left(1 + \frac{4}{R^2} \rho^2 \right)^{5/2} \right]_0^R \right\} \\
&= \pi \frac{R^4}{6} \left\{ 5^{3/2} - \frac{1}{10} [5^{5/2} - 1] \right\} = \pi \frac{R^4}{6} \left\{ \frac{5^{3/2}}{2} + \frac{1}{10} \right\} \\
&= \pi R^4 \left(\frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{60} \right) = \frac{\pi R^4}{60} (25\sqrt{5} + 1).
\end{aligned}$$

5. Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[-2, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } 1 \leq |x| \leq 2. \end{cases}$$

a. Dopo aver tracciato il grafico di f sul periodo $[-2, 2]$: in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f , tenendo conto del periodo e delle simmetrie, e scrivere la serie di Fourier.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata*.

a. La funzione periodizzata è continua su $\mathbb{R}$ e regolare a tratti. Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f ovunque e i coefficienti di Fourier tendono a zero come $o(1/k)$.

b. La funzione è pari, perciò $b_k = 0$ per ogni k . Per calcolare gli a_k , poiché $T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx = \int_0^2 f(x) \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) dx \\
&= \int_0^1 (1-x) \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) dx.
\end{aligned}$$

Ora, per $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_0^1 (1-x) \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[(1-x) \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^1 - \int_0^1 (-1) \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right) dx \\
&= 0 + \frac{2}{k\pi} \int_0^1 \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{2}{k\pi} \left[-\frac{2}{k\pi} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^1 \\
&= \frac{4}{k^2\pi^2} \left[1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right].
\end{aligned}$$

Per $k = 0$,

$$a_0 = \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}$$

e la serie di Fourier di f è

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right] \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Svolgimento Tema n°2

Es.	Punti
1	6
2	7
3	6
4	7
5	7
Tot.	33

1. Sia Ω una lamina materiale piana omogenea, triangolare, di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$ nel piano xy , di massa m . Calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z (cioè all'origine). Si raccomanda di prestare cura nell'impostazione, facendo una figura e rappresentando anzitutto Ω come dominio x -semplice, e semplificare il più possibile i risultati ottenuti.

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 3y \leq x \leq y + 2\}.$$

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{|\Omega|} \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy = m \int_0^1 \left(\int_{3y}^{y+2} (x^2 + y^2) dx \right) dy \\ &= m \int_0^1 \left(\left[\frac{(y+2)^3}{3} - \frac{(3y)^3}{3} \right] + y^2 [(y+2) - 3y] \right) dy \\ &= m \left\{ \left[\frac{(y+2)^4}{3 \cdot 4} - \frac{9y^4}{4} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 [(-y^3 + y^2)] dy \right\} \\ &= m \left\{ \frac{3^4 - 2^4}{3 \cdot 4} - \frac{9}{4} + 2 \left[-\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 \right\} \\ &= m \left\{ \frac{65}{3 \cdot 4} - \frac{9}{4} + 2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) \right\} = m \left\{ \frac{65 + 2 - 27}{3 \cdot 4} \right\} \\ &= m \left\{ \frac{40}{3 \cdot 4} \right\} = \frac{10}{3} m. \end{aligned}$$

2. Si consideri il tetraedro Ω di vertici $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ dove a, b, c sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza. Si calcoli l'integrale

$$\int \int \int_{\Omega} y dx dy dz.$$

Riportare con cura i passi dell'impostazione e riscrivere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

[Suggerimento: calcolare l'integrale *per fili*, dopo aver scritto la rappresentazione analitica di Ω adatta a questo calcolo, del tipo

$$\Omega = \{(x, y, z) : z \in [0, c], (x, y) \in T_z\}$$

dove $T_z = (1 - \frac{z}{c}) T_0$ e T_0 è il triangolo che nel piano (x, y) ha vertici $(0, 0), (a, 0), (0, b)$.]

$$T_0 = \left\{ (x, y) : x \in [0, a], y \in \left[0, b \left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] \right\}$$

$$T_z = \left\{ (x, y) : x \in \left[0, \left(1 - \frac{z}{c}\right) a\right], y \in \left[0, b \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} y dx dy dz &= \int_0^c \left(\int \int_{T_z} y dx dy \right) dz = \int_0^c \left(\int_0^{(1-\frac{z}{c})a} \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a}-\frac{z}{c})} y dy \right) dx \right) dz \\ &= \int_0^c \left(\int_0^{(1-\frac{z}{c})a} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)^2 b^2 dx \right) dz \\ &= \frac{b^2}{2} \int_0^c \left[-\frac{a}{3} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)^3 \right]_0^{(1-\frac{z}{c})a} dz \\ &= \frac{b^2}{6} a \int_0^c \left[\left(1 - \frac{z}{c}\right)^3 \right] dz \\ &= \frac{1}{6} ab^2 \left[-\frac{c}{4} \left(1 - \frac{z}{c}\right)^4 \right]_0^c = \frac{1}{24} ab^2 c. \end{aligned}$$

3. Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana γ di equazione parametrica

$$\underline{r}(t) = (\cos(2t) - 2 \cos t, \sin(2t) - 2 \sin t), \text{ per } t \in [0, 2\pi],$$

utilizzando la formula dedotta dal teorema di Gauss-Green.

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{(\cos(2t) - 2 \cos t)(2 \cos(2t) - 2 \cos t) - (\sin(2t) - 2 \sin t)(-2 \sin(2t) + 2 \sin t)\} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{2 \cos^2(2t) + 4 \cos^2 t - 6 \cos t \cos 2t + 2 \sin^2(2t) + 4 \sin^2 t - 6 \sin t \sin 2t\} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{2 + 4 - 6(\cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t)\} dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \{1 - \cos t\} dt = 3(2\pi + 0) = 6\pi. \end{aligned}$$

4. Scrivere le equazioni parametriche della superficie Σ generata dalla rotazione attorno all'asse z della curva γ del piano xz

$$\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} \\ z = \frac{t^4}{4} \end{cases} \text{ per } t \in [0, 2\sqrt{2}].$$

Dopo aver calcolato l'elemento d'area, determinando gli eventuali punti singolari della superficie, calcolare l'integrale di superficie:

$$\int \int_{\Sigma} \frac{dS}{z}.$$

$$\Sigma : \begin{cases} x = \frac{t^3}{3} \cos \theta \\ y = \frac{t^3}{3} \sin \theta \\ z = \frac{t^4}{4} \end{cases} \quad t \in [0, 2\sqrt{2}], \theta \in [0, 2\pi].$$

Per il calcolo dell'elemento d'area, dette

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{t^3}{3}, b(t) = \frac{t^4}{4} \\ a'(t) &= t^2; \\ b'(t) &= t^3 \\ dS &= |a(t)| \sqrt{a'(t)^2 + b'(t)^2} dt d\theta \\ &= \frac{t^3}{3} \sqrt{t^4 + t^6} dt d\theta = \frac{t^5}{3} \sqrt{1 + t^2} dt d\theta. \end{aligned}$$

Per $t = 0$ si ha il punto singolare $(0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} \int \int_{\Sigma} \frac{dS}{z} &= 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{4}{t^4} \frac{t^5}{3} \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{8}{3}\pi \int_0^{2\sqrt{2}} t \sqrt{1 + t^2} dt = \\ &= \frac{8}{3}\pi \left[\frac{1}{3} (1 + t^2)^{3/2} \right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{8}{9}\pi [27 - 1] = \frac{208}{9}\pi. \end{aligned}$$

5. Sia Σ la superficie grafico della funzione

$$z = e^{-x^2-y^2} \text{ per } x^2 + y^2 \leq 1,$$

con $R > 0$ costante assegnata. Dopo aver calcolato l'elemento d'area dS e il versore normale $\underline{n}$ (orientato verso l'alto) si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (x, y, z)$$

attraverso la superficie Σ .

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{-x^2-y^2} \\ \nabla f(x, y) &= e^{-x^2-y^2} (-2x, -2y) \\ dS &= \sqrt{1 + |\nabla f|^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} e^{-2(x^2+y^2)} dx dy \\ \underline{n} &= \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}; \underline{n} dS = (-f_x, -f_y, 1) dx dy = (2xe^{-x^2-y^2}, 2ye^{-x^2-y^2}, 1) dx dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(\underline{F}, \Sigma) &= \int \int_{\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{n} dS \\
&= \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left(x, y, e^{-x^2-y^2} \right) \cdot \left(2xe^{-x^2-y^2}, 2ye^{-x^2-y^2}, 1 \right) dx dy \\
&= \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left(2(x^2+y^2) + 1 \right) e^{-x^2-y^2} dx dy \\
&= 2\pi \int_0^1 (2\rho^2 + 1) e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi \int_0^1 (2\rho^2 + 1) \left(-e^{-\rho^2} \right)' d\rho \\
&= \pi \left\{ \left[-e^{-\rho^2} (2\rho^2 + 1) \right]_0^1 + \int_0^1 4\rho e^{-\rho^2} d\rho \right\} \\
&= \pi \left\{ 1 - 3e^{-1} + \left[-2e^{-\rho^2} \right]_0^1 \right\} = \pi \{ 1 - 3e^{-1} + 2 - 2e^{-1} \} \\
&= \pi \left(3 - \frac{5}{e} \right).
\end{aligned}$$

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Svolgimento Tema n°3

Es.	Punti
1	7
2	6
3	7
4	6
5	7
Tot.	33

1. Sia Ω il rombo di vertici $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 3)$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_{\Omega} (xy^4 + |x|y^3 + e^x |y|) dx dy.$$

Si raccomanda di fare una figura, curare l'impostazione *sfruttando le simmetrie*, e giustificare i passaggi.

Per le simmetrie, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int \int_{\Omega} (xy^4 + |x|y^3 + e^x |y|) dx dy = \int \int_{\Omega} e^x |y| dx dy \\ &= 2 \int \int_{\Omega^+} e^x y dx dy \end{aligned}$$

dove Ω^+ è la porzione del rombo compresa nel semipiano $y \geq 0$, perciò

$$\Omega^+ = \{(x, y) : x \in [-1, 0], 0 \leq y \leq 3 + 3x\} \cup \{(x, y) : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 3 - 3x\}.$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \left\{ \int_{-1}^0 e^x \left(\int_0^{3+3x} y dy \right) dx + \int_0^1 e^x \left(\int_0^{3-3x} y dy \right) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \int_{-1}^0 e^x \left(9 \frac{(x+1)^2}{2} \right) dx + \int_0^1 e^x \left(9 \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \right\} \\ &= 9 \left\{ \int_{-1}^0 e^x (x+1)^2 dx + \int_0^1 e^x (1-x)^2 dx \right\} \\ &= 9 \left\{ \int_{-1}^0 [e^x (x+1)^2]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x 2(x+1) dx + [e^x (1-x)^2]_0^1 + \int_0^1 2e^x (1-x) dx \right\} \\ &= 9 \left\{ 1 - 2 \left([e^x (x+1)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x dx \right) - 1 + 2 \left([e^x (1-x)]_0^1 + \int_0^1 e^x dx \right) \right\} \\ &= 9 \cdot 2 \left\{ \int_{-1}^1 e^x dx - 1 - 1 \right\} = 18 (e - e^{-1} - 2). \end{aligned}$$

2. Si consideri il cono materiale Ω di altezza h , raggio della base R , vertice nell'origine e asse sull'asse z , avente densità

$$\delta(x, y, z) = \frac{z|xy|}{h^2 R^4} \mu,$$

dove μ è una costante positiva avente le dimensioni di una massa, e R, h sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza. Dopo aver scritto la rappresentazione analitica di Ω , si calcoli la massa totale del cono. Prestare cura nell'impostazione, sfruttare le simmetrie e riscrivere i risultati ottenuti nella forma il più possibile semplificata.

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : z \in [0, h], x^2 + y^2 \leq \left(\frac{Rz}{h} \right)^2 \right\}.$$

$$\begin{aligned} m &= \int \int \int_{\Omega} \delta(x, y, z) dx dy dz = \int_0^h \left(\int \int_{x^2+y^2 \leq \left(\frac{Rz}{h}\right)^2} \frac{z |xy|}{h^2 R^4} \mu dx dy \right) dz \\ &= \frac{\mu}{h^2 R^4} \int_0^h z \left(\int \int_{x^2+y^2 \leq \left(\frac{Rz}{h}\right)^2} |xy| dx dy \right) dz \\ &= \frac{\mu}{h^2 R^4} \int_0^h z \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{Rz}{h}} |\rho \cos \theta \rho \sin \theta| \rho d\rho \right) d\theta \right) dz \\ &= \frac{\mu}{h^2 R^4} \int_0^h z \left(4 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{Rz}{h}} \rho^3 d\rho \right) dz \\ &= \frac{\mu}{h^2 R^4} \int_0^h z \cdot 4 \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \left(\frac{Rz}{h} \right)^4 dz \\ &= \frac{\mu}{h^2 R^4} \frac{1}{2} \left(\frac{R}{h} \right)^4 \int_0^h z^5 dz = \frac{\mu}{2h^6} \cdot \frac{h^6}{6} = \frac{\mu}{12}. \end{aligned}$$

3. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\underline{F} = \left(\frac{x^3}{x^4 + y^4}, \frac{y^3}{x^4 + y^4} + y \right).$$

- Determinare il suo insieme di definizione Ω e stabilire se il campo è irrotazionale in Ω .
- In base alla sola risposta al punto precedente, è possibile dire se il campo è conservativo in Ω ?
- Calcolare, se esiste, un potenziale di $\underline{F}$ in Ω . Il campo $\underline{F}$ è conservativo?

- $\Omega = \{(x, y) : (x, y) \neq (0, 0)\}.$

$$\begin{aligned} \partial_x F_2 &= \partial_x \left(\frac{y^3}{x^4 + y^4} + y \right) = -\frac{4x^3 y^3}{(x^4 + y^4)^2} \\ \partial_y F_1 &= \partial_y \left(\frac{x^3}{x^4 + y^4} \right) = -\frac{4x^3 y^3}{(x^4 + y^4)^2}. \end{aligned}$$

Quindi il campo è irrotazionale in Ω .

- Poiché Ω non è semplicemente connesso, dal fatto che il campo sia irrotazionale in Ω non si può dedurre che sia conservativo in Ω .

c.

$$\begin{aligned}
U_x &= F_1; \\
U(x, y) &= \int \frac{x^3}{x^4 + y^4} dx = \frac{1}{4} \log(x^4 + y^4) + g(y) \\
U_y(x, y) &= \frac{y^3}{x^4 + y^4} + g'(y) = \frac{y^3}{x^4 + y^4} + y \\
g'(y) &= y; g(y) = \frac{y^2}{2} + c \\
U(x, y) &= \frac{1}{4} \log(x^4 + y^4) + \frac{y^2}{2} + c.
\end{aligned}$$

Quindi $\underline{F}$ è conservativo in Ω .

4. Sia Σ la superficie materiale semisferica di centro l'origine e raggio R contenuta nel semispazio $z \geq 0$, avente densità superficiale

$$\sigma(x, y, z) = \left(1 + \frac{|x| + |y|}{R}\right) \frac{\mu}{R^2},$$

dove R, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente. Dopo aver scritto le equazioni parametriche e l'elemento d'area di Σ , calcolare la massa totale della superficie.

$$\begin{aligned}
\Sigma : \begin{cases} x = R \sin \phi \cos \theta \\ y = R \sin \phi \sin \theta \\ z = R \cos \phi \end{cases} \quad \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi] \\
dS = R^2 \sin \phi d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= \int \int_{\Sigma} \sigma(x, y, z) dS \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{|R \sin \phi \cos \theta| + |R \sin \phi \sin \theta|}{R} \right) \frac{\mu}{R^2} R^2 \sin \phi d\phi \right) d\theta \\
&= \mu \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} (1 + \sin \phi (|\cos \theta| + |\sin \theta|)) d\theta \right) \sin \phi d\phi \\
&= \mu \int_0^{\pi/2} \left(2\pi + 4 \sin \phi \int_0^{\pi/2} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \right) \sin \phi d\phi \\
&= \mu \int_0^{\pi/2} (2\pi + 8 \sin \phi) \sin \phi d\phi = 2\mu \int_0^{\pi/2} (\pi \sin \phi + 4 \sin^2 \phi) d\phi \\
&= 2\mu \left(\pi + 4 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 4\pi\mu.
\end{aligned}$$

5. Si consideri la funzione 2π -periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ 0 & \text{se } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ -1 & \text{se } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

a. Dopo aver tracciato il grafico di f sul periodo $[-\pi, \pi]$: in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f e scrivere la serie di Fourier.

Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata*.

a. La funzione è regolare a tratti ma discontinua, quindi la serie di Fourier converge puntualmente a f in $[-\pi, \pi]$ tranne nei punti $\pm\pi$, in cui converge a 0, e nei punti $\pm\frac{\pi}{2}$ in cui converge a $\pm\frac{1}{2}$, rispettivamente. Poiché f è dispari sarà $a_k = 0$ per ogni k . I coefficienti b_k tenderanno a zero ma ci aspettiamo che non saranno $o(1/k)$.

b. Per i coefficienti b_k si ha

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(kx)}{k} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{\pi k} \left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \cos(k\pi) \right) \end{aligned}$$

perciò

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \cos(k\pi) \right) \sin(kx)$$

Seconda prova in itinere di Analisi Matematica 2

Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano

A.A. 2025/2026. Prof. M. Bramanti

Svolgimento Tema n°4

Es.	Punti
1	6
2	6
3	7
4	7
5	7
Tot.	33

1. Si consideri la lamina materiale piana, non omogenea, Ω , rappresentata nel piano xy dal semicerchio di centro l'origine, raggio R e posto nel semipiano $y \geq 0$, avente densità superficiale

$$\delta(x, y) = \left(1 + \frac{|x|y^2}{R^3}\right) \frac{\mu}{R^2},$$

dove R, μ sono costanti positive aventi le dimensioni di una lunghezza e una massa, rispettivamente. Calcolare la massa totale della lamina.

$$\begin{aligned} m &= \int \int_{\Omega} \delta(x, y) dx dy = \frac{\mu}{R^2} \int \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2, y \geq 0\}} \left(1 + \frac{|x|y^2}{R^3}\right) dx dy \\ &= \frac{2\mu}{R^2} \int \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2, y \geq 0, x \geq 0\}} \left(1 + \frac{xy^2}{R^3}\right) dx dy \\ &= \frac{2\mu}{R^2} \left\{ \frac{\pi R^2}{4} + \frac{1}{R^3} \int \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2, y \geq 0, x \geq 0\}} xy^2 dx dy \right\} \\ &= \frac{2\mu}{R^2} \left\{ \frac{\pi R^2}{4} + \frac{1}{R^3} \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \cos \theta \sin^2 \theta d\theta d\rho \right\} \\ &= \frac{2\mu}{R^2} \left\{ \frac{\pi R^2}{4} + \frac{1}{R^3} \frac{R^5}{5} \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} \\ &= 2\mu \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{15} \right\} = \mu \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{15} \right). \end{aligned}$$

2. Si calcoli l'integrale triplo

$$\int \int \int_{\Omega} (x^2 + z^2) dx dy dz$$

dove Ω è l'ellissoide di centro l'origine e raggio semiassi a, b, c (costanti positive).

Utilizziamo le coordinate ellissoidali:

$$\begin{cases} x = a\rho \sin \phi \cos \theta \\ y = b\rho \sin \phi \sin \theta \\ z = c\rho \cos \phi \end{cases} \quad dx dy dz = abc\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$$

$$\begin{aligned}
I &\equiv \int \int \int_{\Omega} (x^2 + z^2) dx dy dz \\
&= abc \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^1 [(a\rho \sin \phi \cos \theta)^2 + (c\rho \cos \phi)^2] \rho^2 d\rho \right) \sin \phi d\phi \right) d\theta \\
&= abc \left\{ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \cdot \int_0^{\pi} \sin^3 \phi d\phi \cdot a^2 \int_0^1 \rho^4 d\rho + 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \cos^2 \phi \sin \phi d\phi \cdot c^2 \int_0^1 \rho^4 d\rho \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^3 \phi d\phi &= \int_0^{\pi} \sin \phi (1 - \cos^2 \phi) d\phi \\
&\quad [\cos \phi = t] \\
&= \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \phi \sin \phi d\phi = \left[-\frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned}
I &= abc \left\{ \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{5} + 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot c^2 \cdot \frac{1}{5} \right\} \\
&= \frac{4}{15} \pi abc (a^2 + c^2).
\end{aligned}$$

3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F} = (-y, x, z)$$

lungo l'arco di curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t \cos^2 t \\ y = t \sin^2 t \\ z = t^2 \end{cases} \quad \text{per } t \in [0, 2\pi].$$

Riportare impostazione e passaggi intermedi ed esprimere il risultato nella forma il più possibile semplificata.

$$\begin{aligned}
\underline{r}(t) &= (t \cos^2 t, t \sin^2 t, t^2) \\
\underline{r}'(t) &= (\cos^2 t - 2t \cos t \sin t, \sin^2 t + 2t \sin t \cos t, 2t) \\
\underline{F}(\underline{r}(t)) &= (-t \sin^2 t, t \cos^2 t, t^2) \\
\underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) &= (-t \sin^2 t, t \cos^2 t, t^2) \cdot (\cos^2 t - 2t \cos t \sin t, \sin^2 t + 2t \sin t \cos t, 2t) \\
&= -t \sin^2 t \cos^2 t + 2t^2 \cos t \sin^3 t + t \cos^2 t \sin^2 t + 2t^2 \sin t \cos^3 t + 2t^3 \\
&= 2t^2 \cos t \sin t + 2t^3 = t^2 \sin 2t + 2t^3.
\end{aligned}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} \{t^2 \sin 2t + 2t^3\} dt.$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} t^2 \sin 2t dt &= \left[-t^2 \frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2t \frac{\cos 2t}{2} dt = -2\pi^2 + \int_0^{2\pi} t \cos 2t dt \\ &= -2\pi^2 + \left[t \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{2} dt = -2\pi^2.\end{aligned}$$

$$L = -2\pi^2 + \left[\frac{t^4}{2} \right]_0^{2\pi} = -2\pi^2 + 8\pi^4.$$

4. Sia Σ la superficie grafico della funzione

$$z = \frac{x^2 - y^2}{R} \text{ per } x^2 + y^2 \leq R^2,$$

con $R > 0$ costante assegnata. Dopo aver calcolato l'elemento d'area dS e il versore normale $\underline{n}$ (orientato verso l'alto) si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\underline{F} = (-x, y, z)$$

attraverso la superficie Σ .

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{R} \\ \nabla f(x, y) &= \frac{2}{R} (x, -y) \\ dS &= \sqrt{1 + |\nabla f|^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{R^2} (x^2 + y^2)} dx dy \\ \underline{n} &= \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}; \underline{n} dS = (-f_x, -f_y, 1) dx dy = \left(-\frac{2}{R}x, \frac{2}{R}y, 1 \right) dx dy.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\underline{F}, \Sigma) &= \int \int_{\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{n} dS = \int \int_{x^2 + y^2 \leq R^2} \left(-x, y, \frac{x^2 - y^2}{R} \right) \cdot \left(-\frac{2}{R}x, \frac{2}{R}y, 1 \right) dx dy \\ &= \int \int_{x^2 + y^2 \leq R^2} \left(\frac{2}{R} (x^2 + y^2) + \frac{x^2 - y^2}{R} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{R} \int \int_{x^2 + y^2 \leq R^2} (3x^2 + y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R (3\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{1}{R} \left(\int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta \right) \left(\int_0^R \rho^3 d\rho \right) \\ &= \frac{1}{R} (3\pi + \pi) \frac{R^4}{4} = \pi R^3.\end{aligned}$$

5. Si consideri la funzione 2-periodica definita in $[-1, 1]$ da

$$f(x) = x(2 - x)$$

a. Dopo aver tracciato il grafico di f sul periodo $[-1, 1]$: in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier a_k di f (non è richiesto il calcolo dei b_k). Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, quindi eseguire il calcolo esplicito, riportando chiaramente i passaggi essenziali ed il risultato, *nella forma il più possibile esplicita e semplificata (suggerimento: sfruttare le simmetrie)*.

a. La funzione è regolare a tratti ma la sua periodizzata è discontinua perché $f(-1) \neq f(1)$, quindi la serie di Fourier converge puntualmente a f in $[-1, 1]$ tranne nei punti ± 1 , in cui converge a $-1 = \frac{f(1)+f(-1)}{2}$. La funzione f non è né pari né dispari, quindi tutti i coefficienti di Fourier a priori vanno calcolati (ma $f(x) = 2x - x^2$ con $2x$ dispari e $-x^2$ pari, sfrutteremo questo fatto nel calcolo degli integrali). I coefficienti a_k, b_k tenderanno a zero ma ci aspettiamo che non siano $o(1/k)$.

b. Poiché $T = 2, \omega = 2\pi/T = \pi$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx = \int_{-1}^1 (2x - x^2) \cos(k\pi x) dx \\ &= \int_{-1}^1 2x \cos(k\pi x) dx - \int_{-1}^1 x^2 \cos(k\pi x) dx \end{aligned}$$

per le simmetrie

$$= 0 - 2 \int_0^1 x^2 \cos(k\pi x) dx = -2 \int_0^1 x^2 \cos(k\pi x) dx.$$

Perciò

$$a_0 = -2 \int_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3}$$

mentre per $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} a_k &= -2 \left\{ \int_0^1 x^2 \cos(k\pi x) dx \right\} = -2 \left\{ \left[x^2 \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} dx \right\} \\ &= \frac{4}{k\pi} \int_0^1 x \sin(k\pi x) dx = \frac{4}{k\pi} \left\{ \left[-x \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} dx \right\} \\ &= \frac{4}{k\pi} \left\{ -\frac{\cos(k\pi)}{k\pi} + 0 \right\} = \frac{4}{k^2 \pi^2} (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$