Stime $W^{2,p}$ globali per operatori ellittici non variazionali con potenziale che soddisfa una reverse Hölder condition

Lavoro in collaborazione con L. Brandolini (Univ. di Bergamo), E. Harboure e B. Viviani (Univ. Nacional del Litoral, Santa Fé, Argentina)

Marco Bramanti

Politecnico di Milano

Catania, Aprile 2011

Introduzione

- Consideriamo l'*operatore di Schrödinger stazionario*

$$-\Delta + V.$$

Introduzione

- Consideriamo l'*operatore di Schrödinger stazionario*

$$-\Delta + V.$$

- In particolare, l'*operatore di Hermite*

$$Lu = -\Delta u + |x|^2 u \text{ in } \mathbb{R}^n,$$

descrive l'oscillatore armonico quantistico n-dimensionale.

Introduzione

- Consideriamo l'*operatore di Schrödinger stazionario*

$$-\Delta + V.$$

- In particolare, l'*operatore di Hermite*

$$Lu = -\Delta u + |x|^2 u \text{ in } \mathbb{R}^n,$$

descrive l'oscillatore armonico quantistico n-dimensionale.

- Ogni potenziale si può approssimare col potenziale armonico vicino a un punto di equilibrio stabile, perciò questo è un operatore importante per la meccanica quantistica, ed è stato molto studiato anche da un punto di vista matematico.

Relazione con le funzioni di Hermite e proprietà spettrali

- L'operatore di Hermite è legato al più semplice operatore unidimensionale

$$L_1 f(x) = f''(x) + x^2 f(x)$$

che descrive l'oscillatore armonico quantistico unidimensionale.

Relazione con le funzioni di Hermite e proprietà spettrali

- L'operatore di Hermite è legato al più semplice operatore unidimensionale
$$L_1 f(x) = f''(x) + x^2 f(x)$$
che descrive l'oscillatore armonico quantistico unidimensionale.
- Le autofunzioni dell'operatore unidimensionale sono le *funzioni di Hermite*
$$\begin{aligned}\phi_k(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) \text{ con } H_k \text{ polinomi di Hermite,}\\ H_k(x) &= (-1)^k e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).\\ \left(\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\phi_k(x) &= (2k+1)\phi_k(x),\ x \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \ldots\end{aligned}$$
che costituiscono un s.o.n.c. di $L^2(\mathbb{R})$.

Relazione con le funzioni di Hermite, proprietà spettrali, trasformate di Riesz

- A partire dalle funzioni di Hermite (unidimensionali) si ottengono le autofunzioni dell'operatore di Hermite n-dimensionale,che costituiscono un s.o.n.c. di $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\Phi_\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{\alpha_i}(x_i) \text{ con}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \alpha_i = 0, 1, 2, ...$$

$$L\Phi_\alpha \equiv \left(-\Delta + |x|^2\right)\Phi_\alpha = (2|\alpha| + n)\Phi_\alpha$$

Relazione con le funzioni di Hermite, proprietà spettrali, trasformate di Riesz

- A partire dalle funzioni di Hermite (unidimensionali) si ottengono le autofunzioni dell'operatore di Hermite n-dimensionale,che costituiscono un s.o.n.c. di $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\Phi_\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{\alpha_i}(x_i) \text{ con}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \alpha_i = 0, 1, 2, ...$$

$$L\Phi_\alpha \equiv \left(-\Delta + |x|^2\right)\Phi_\alpha = (2|\alpha| + n)\Phi_\alpha$$

- **Trasformate di Riesz e applicazioni.** L'esistenza di un s.o.n.c. di $L^2(\mathbb{R}^n)$ di autofunzioni di L consente di definire una risoluzione spettrale, che a sua volta permette di definire certe "trasformate di Riesz" adattate a L.

Relazione con le funzioni di Hermite, proprietà spettrali, trasformate di Riesz

- A partire dalle funzioni di Hermite (unidimensionali) si ottengono le autofunzioni dell'operatore di Hermite n-dimensionale,che costituiscono un s.o.n.c. di $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\Phi_\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{\alpha_i}(x_i) \text{ con}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \alpha_i = 0, 1, 2, ...$$

$$L\Phi_\alpha \equiv \left(-\Delta + |x|^2\right)\Phi_\alpha = (2|\alpha| + n)\Phi_\alpha$$

- **Trasformate di Riesz e applicazioni.** L'esistenza di un s.o.n.c. di $L^2(\mathbb{R}^n)$ di autofunzioni di L consente di definire una risoluzione spettrale, che a sua volta permette di definire certe "trasformate di Riesz" adattate a L.
- Thangavelu (1990, Comm. P.D.E.) ha definito e studiato queste trasformate di Riesz, ne ha provato la continuità su $L^p(\mathbb{R}^n)$ e ne ha dedotto stime a priori per l'*operatore delle onde* legato a L.

Stime a priori per l'operatore di Hermite

- **Shen** (1995, Ann. Inst. Fourier) ha provato stime a priori $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ per le soluzioni di

$$Lu \equiv -\Delta u + Vu = f \text{ con } f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p \leq q$$

assumendo che

$$V \in B_q \text{ per qualche } q > n/2,$$

Stime a priori per l'operatore di Hermite

- **Shen** (1995, Ann. Inst. Fourier) ha provato stime a priori $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ per le soluzioni di

$$Lu \equiv -\Delta u + Vu = f \text{ con } f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p \leq q$$

assumendo che

$$V \in B_q \text{ per qualche } q > n/2,$$

- ossia: $V \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $V \geq 0$ ed esiste una costante $C > 0$ per cui vale la *reverse Hölder inequality*

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B V(x)^q \, dx \right)^{1/q} \leq C \left(\frac{1}{|B|} \int_B V(x) \, dx \right)$$

per ogni sfera B in $\mathbb{R}^n$.

La condizione reverse Holder

- Si può dimostrare che se $V(x) = |x|^2$ o più in generale $V(x)$ è un *polinomio nonnegativo*, $V(x)$ soddisfa sempre una condizione più forte di B_q (per ogni q), precisamente (condizione B_∞):

$$\max_B V \leq C \left(\frac{1}{|B|} \int_B V(x) \, dx \right).$$

Anzi, Shen scrive che l'idea di questo suo lavoro nasce da una precedente ricerca (tesi di Ph.D. di J. Zhong, Princeton), in cui si studia l'operatore L con un potenziale V polinomio nonnegativo.

La condizione reverse Holder

- Si può dimostrare che se $V(x) = |x|^2$ o più in generale $V(x)$ è un *polinomio nonnegativo*, $V(x)$ soddisfa sempre una condizione più forte di B_q (per ogni q), precisamente (condizione B_∞):

$$\max_B V \leq C \left(\frac{1}{|B|} \int_B V(x)\, dx \right).$$

  Anzi, Shen scrive che l'idea di questo suo lavoro nasce da una precedente ricerca (tesi di Ph.D. di J. Zhong, Princeton), in cui si studia l'operatore L con un potenziale V polinomio nonnegativo.
- *Idea del perché* $|x|^2$ *soddisfa la* B_∞*:* se prendo $B = B(0, r)$ trovo, per $V(x) = |x|^2$,

$$\max_B V = r^2$$
$$\frac{1}{|B|} \int_B |x|^2\, dx = cr^2.$$

Altri risultati

- **Dziubanski** (2005, Illinois J. Math.) ha studiato l'operatore

$$Lu \equiv Au + Vu$$

con $V \in B_q$ (come Shen) e A operatore ellittico degenere in forma di divergenza, con coefficienti L^∞ e la degenerazione controllata da un peso A_2 di Muckenhoupt.

Altri risultati

- **Dziubanski** (2005, Illinois J. Math.) ha studiato l'operatore

$$Lu \equiv Au + Vu$$

  con $V \in B_q$ (come Shen) e A operatore ellittico degenere in forma di divergenza, con coefficienti L^∞ e la degenerazione controllata da un peso A_2 di Muckenhoupt.
- Sotto queste ipotesi ha provato alcune stime puntuali globali sulla soluzione fondamentale dell'operatore, e ha studiato lo spazio di Hardy H^1_L legato a questo operatore.

Obiettivo del nostro lavoro

- Provare stime a priori $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ per le soluzioni di

$$Lu \equiv Au + Vu = f \text{ con } f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p \leq q$$

assumendo che

$$\begin{aligned} V &\in B_q \text{ per qualche } q > n/2, \\ Au &\equiv -a_{ij} u_{x_i x_j} \end{aligned}$$

Obiettivo del nostro lavoro

- Provare stime a priori $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ per le soluzioni di

$$Lu \equiv Au + Vu = f \text{ con } f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p \leq q$$

assumendo che

$$\begin{aligned} V &\in B_q \text{ per qualche } q > n/2, \\ Au &\equiv -a_{ij} u_{x_i x_j} \end{aligned}$$

- con $a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $a_{ij} = a_{ji}$,$(i,j = 1,2,...,n)$

$$\mu |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leq \frac{1}{\mu} |\xi|^2 \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ per qualche } \mu > 0, \tag{1}$$

$$a_{ij} \in VMO(\mathbb{R}^n) \tag{2}$$

cioè (per ogni $i,j = 1,2,...,n$)

$$\eta_{ij}(r) = \sup_{\rho \leq r} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} \left| a_{ij}(y) - a_{ij}^B \right| dy \right) \to 0 \text{ per } r \to 0^+.$$

Risultati principali

- **Teorema.** *Sotto le ipotesi precedenti su A e V, per ogni $p \in (1, q]$ esiste $C > 0$ tale che*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C \left\{ \|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\} \tag{3}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. La costante C dipende da n, p, q, l'ellitticità e i moduli VMO dei coefficienti, e dipende da V solo mediante la costante B_q (nessuna norma L^q_{loc} è coinvolta).

Risultati principali

- **Teorema.** *Sotto le ipotesi precedenti su A e V, per ogni $p \in (1, q]$ esiste $C > 0$ tale che*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\{ \|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\} \tag{3}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. La costante C dipende da n, p, q, l'ellitticità e i moduli VMO dei coefficienti, e dipende da V solo mediante la costante B_q (nessuna norma L^q_{loc} è coinvolta).

- **Osservazioni.** Rispetto alla teoria di Chiarenza-Frasca-Longo (1991, 1993) per l'operatore parte principale, estesa a termini di ordine inferiore da Vitanza (1994) e a tutto lo spazio da Krylov (2008), la difficoltà sta nel fatto che il nostro potenziale può non appartenere a nessuno spazio $L^p(\mathbb{R}^n)$, addirittura essere illimitato all'infinito.

Risultati principali

- **Teorema.** *Sotto le ipotesi precedenti su A e V, per ogni $p \in (1, q]$ esiste $C > 0$ tale che*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\{ \|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\} \qquad (3)$$

  per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. La costante C dipende da n, p, q, l'ellitticità e i moduli VMO dei coefficienti, e dipende da V solo mediante la costante B_q (nessuna norma L^q_{loc} è coinvolta).
- **Osservazioni.** Rispetto alla teoria di Chiarenza-Frasca-Longo (1991, 1993) per l'operatore parte principale, estesa a termini di ordine inferiore da Vitanza (1994) e a tutto lo spazio da Krylov (2008), la difficoltà sta nel fatto che il nostro potenziale può non appartenere a nessuno spazio $L^p(\mathbb{R}^n)$, addirittura essere illimitato all'infinito.
- Si potrebbe anche pensare di usare le teorie per potenziali in una classe di Kato-Stummel. In effetti se $V \in B_q$, V soddisfa la condizione di Kato-Stummel su ogni compatto, ma con costanti che esplodono quando il compatto invade tutto lo spazio.

Risultati principali

- Vogliamo anche provare un risultato di esistenza e unicità per l'equazione $Lu = f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 < p \leq q$.

Risultati principali

- Vogliamo anche provare un risultato di esistenza e unicità per l'equazione $Lu = f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 < p \leq q$.
- Non banale: occorre provare una stima

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

(senza il termine u a destra), in una situazione in cui manca compattezza, perché siamo su tutto $\mathbb{R}^n$ e perché V non sta in nessuno spazio L^p.

Risultati principali

- Vogliamo anche provare un risultato di esistenza e unicità per l'equazione $Lu = f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 < p \leq q$.
- Non banale: occorre provare una stima

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

  (senza il termine u a destra), in una situazione in cui manca compattezza, perché siamo su tutto $\mathbb{R}^n$ e perché V non sta in nessuno spazio L^p.
- Inoltre, nell'esistenza di soluzione dobbiamo supporre qualcosa sul potenziale in modo che "sia d'aiuto", perché se il potenziale è nullo il problema non è ben posto in $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. Ad esempio:

$$-\Delta u = f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

  non può avere soluzione per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, come si vede prendendo la trasformata di Fourier

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{|\xi|^2}.$$

Risultati principali

- Dovremo chiedere una condizione del tipo
$$V(x) \geq c_0 > 0$$
oltre a $V \in B_q$. Ma questa condizione è un po' grossolana, ad esempio esclude il potenziale $|x|^2$ che è il nostro modello. Allora raffiniamo l'ipotesi così:

Risultati principali

- Dovremo chiedere una condizione del tipo

$$V(x) \geq c_0 > 0$$

oltre a $V \in B_q$. Ma questa condizione è un po' grossolana, ad esempio esclude il potenziale $|x|^2$ che è il nostro modello. Allora raffiniamo l'ipotesi così:

- **Teorema.** *Supponiamo che L soddisfi le ipotesi di ellitticità, coefficienti VMO, potenziale $V \in B_q$ per qualche $q \geq n/2$, e inoltre*

$$V(x) \geq \delta > 0 \text{ per } |x| \geq R \tag{4}$$

per qualche $\delta, R > 0$. Allora per ogni $p \in (1, q]$, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \geq 0$ esiste una e una sola $u \in W_V^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ tale che $Lu + \lambda u = f$. Vale inoltre:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Lu + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{5}$$

dove C dipende da n, p, le quantità coinvolte nelle ipotesi, ed anche $\|V\|_{L^1(B(0,R))}$.

Linea dimostrativa delle stime a priori globali

- Occupiamoci ora del nostro primo risultato, le stime a priori globali:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\} \qquad (6)$$

per $p \in (1, q]$, $V \in B_q$, ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Illustriamo quali sono gli strumenti usati per la dimostrazione, qual è la linea generale della dimostrazione, qualche idea e tecnica coinvolta.

Linea dimostrativa delle stime a priori globali

- Occupiamoci ora del nostro primo risultato, le stime a priori globali:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\{ \|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\} \tag{6}$$

  per $p \in (1, q]$, $V \in B_q$, ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Illustriamo quali sono gli strumenti usati per la dimostrazione, qual è la linea generale della dimostrazione, qualche idea e tecnica coinvolta.
- Gli strumenti principali sono:

Linea dimostrativa delle stime a priori globali

- Occupiamoci ora del nostro primo risultato, le stime a priori globali:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\} \tag{6}$$

  per $p \in (1, q]$, $V \in B_q$, ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Illustriamo quali sono gli strumenti usati per la dimostrazione, qual è la linea generale della dimostrazione, qualche idea e tecnica coinvolta.

- Gli strumenti principali sono:

  1. Le stime locali di Chiarenza-Frasca-Longo per l'operatore solo parte principale a coefficienti *VMO*

Linea dimostrativa delle stime a priori globali

- Occupiamoci ora del nostro primo risultato, le stime a priori globali:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\} \quad (6)$$

per $p \in (1, q]$, $V \in B_q$, ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Illustriamo quali sono gli strumenti usati per la dimostrazione, qual è la linea generale della dimostrazione, qualche idea e tecnica coinvolta.

- Gli strumenti principali sono:
  1. Le stime locali di Chiarenza-Frasca-Longo per l'operatore solo parte principale a coefficienti *VMO*
  2. Certe stime sulla soluzione fondamentale provate da Dziubanski (citato prima)

Linea dimostrativa delle stime a priori globali

- Occupiamoci ora del nostro primo risultato, le stime a priori globali:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\} \tag{6}$$

  per $p \in (1, q]$, $V \in B_q$, ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Illustriamo quali sono gli strumenti usati per la dimostrazione, qual è la linea generale della dimostrazione, qualche idea e tecnica coinvolta.

- Gli strumenti principali sono:
  1. Le stime locali di Chiarenza-Frasca-Longo per l'operatore solo parte principale a coefficienti *VMO*
  2. Certe stime sulla soluzione fondamentale provate da Dziubanski (citato prima)
  3. Varie tecniche di analisi reale: operatori integrali non singolari e loro "commutatori positivi".

Linea dimostrativa delle stime a priori globali

- Occupiamoci ora del nostro primo risultato, le stime a priori globali:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\} \tag{6}$$

  per $p \in (1, q]$, $V \in B_q$, ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Illustriamo quali sono gli strumenti usati per la dimostrazione, qual è la linea generale della dimostrazione, qualche idea e tecnica coinvolta.

- Gli strumenti principali sono:
  1. Le stime locali di Chiarenza-Frasca-Longo per l'operatore solo parte principale a coefficienti *VMO*
  2. Certe stime sulla soluzione fondamentale provate da Dziubanski (citato prima)
  3. Varie tecniche di analisi reale: operatori integrali non singolari e loro "commutatori positivi".

- Vediamo ora più in dettaglio.

Dalla stima locale su Vu alle stime globali su $D^2 u$

Per provare (6) il primo passo è il risultato locale:

- **Teorema 1.** *Sotto le ipotesi precedenti, per ogni* $p \in (1, q]$ *esistono costanti positive* C, r *tali che per ogni* $z_0 \in R^n$, $u \in C_0^\infty(B_r(z_0))$

$$\|Vu\|_{L^p(B_r(z_0))} \leq C \|Lu\|_{L^p(B_r(z_0))}.$$

Le costanti C, r *dipendono* n, p, q, *la costante di ellitticità* μ, *i moduli VMO dei coefficienti, e la costante* B_q *di* V.

Dalla stima locale su Vu alle stime globali su D^2u

Per provare (6) il primo passo è il risultato locale:

- **Teorema 1.** *Sotto le ipotesi precedenti, per ogni $p \in (1, q]$ esistono costanti positive C, r tali che per ogni $z_0 \in R^n$, $u \in C_0^\infty(B_r(z_0))$*

$$\|Vu\|_{L^p(B_r(z_0))} \leq C \|Lu\|_{L^p(B_r(z_0))}.$$

  Le costanti C, r dipendono n, p, q, la costante di ellitticità μ, i moduli VMO dei coefficienti, e la costante B_q di V.
- Useremo anche la stima locale di Chiarenza-Frasca-Longo:

Dalla stima locale su Vu alle stime globali su $D^2 u$

Per provare (6) il primo passo è il risultato locale:

- **Teorema 1.** *Sotto le ipotesi precedenti, per ogni $p \in (1, q]$ esistono costanti positive C, r tali che per ogni $z_0 \in R^n$, $u \in C_0^\infty (B_r (z_0))$*

$$\|Vu\|_{L^p(B_r(z_0))} \leq C \|Lu\|_{L^p(B_r(z_0))} .$$

Le costanti C, r dipendono n, p, q, la costante di ellitticità μ, i moduli VMO dei coefficienti, e la costante B_q di V.

- Useremo anche la stima locale di Chiarenza-Frasca-Longo:
- **Teorema 2.** *Per ogni $p \in (1, \infty)$ esistono costanti positive C, r tali che per ogni $z_0 \in R^n$, $u \in C_0^\infty (B_r (z_0))$*

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^p(B_r(z_0))} \leq C \|Au\|_{L^p(B_r(z_0))} .$$

Le costanti C, r dipendono da n, p, la costante di ellitticità μ, e i moduli VMO dei coefficienti.

Dimostrazione delle stime globali dai Teoremi 1 e 2

- Sia $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ una partizione dell'unità di funzioni non negative in $\mathbb{R}^n$ tali che $\phi_i \in C_0^\infty(B(z_i, r))$ con r come nel Teorema 1 e tale che la famiglia di sfere $B_i = B(z_i, r)$ abbia la proprietà di intersezione finita.

Dimostrazione delle stime globali dai Teoremi 1 e 2

- Sia $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ una partizione dell'unità di funzioni non negative in $\mathbb{R}^n$ tali che $\phi_i \in C_0^\infty(B(z_i, r))$ con r come nel Teorema 1 e tale che la famiglia di sfere $B_i = B(z_i, r)$ abbia la proprietà di intersezione finita.
- Allora, per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, poiché in ogni punto la somma $\sum_i V\phi_i u$ ha un numero limitato di termini, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \left\|\sum_i V\phi_i u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \\
&\leq C\sum_i \|V\phi_i u\|_{L^p(B(z_i,r))}^p \leq C\sum_i \|L(\phi_i u)\|_{L^p(B(z_i,r))}^p \\
&\leq C\sum_i \left\{\|Lu\|_{L^p(B(z_i,r))}^p + \|Du\|_{L^p(B(z_i,r))}^p + \|u\|_{L^p(B(z_i,r))}^p\right\} \\
&\leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p\right\} \\
&\leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\}^p . \qquad (7)
\end{aligned}$$

Dimostrazione delle stime globali dai Teoremi 1 e 2 (segue)

- Analogamente, il Teorema 2 implica

$$\begin{aligned}\left\|D^2 u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq C\left\{\|Au\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\}\\ &\leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\}\end{aligned}$$

che, insieme a (7) dà

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)}+\|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\}$$

Dimostrazione delle stime globali dai Teoremi 1 e 2 (segue)

- Analogamente, il Teorema 2 implica

$$\begin{aligned}\left\|D^2u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq C\left\{\|Au\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\}\\ &\leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\}\end{aligned}$$

che, insieme a (7) dà

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)}+\|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\}$$

- Allora la classica disuguaglianza di interpolazione

$$\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon\left\|D^2u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\frac{C}{\varepsilon}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

ci permette di scrivere

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)}+\|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\}.$$

Proprietà della soluzione fondamentale dell'operatore congelato

- Per quanto visto è sufficiente stimare:

$$\|Vu\|_{L^p(B_r(z_0))} \leq C \|Lu\|_{L^p(B_r(z_0))}.$$

Proprietà della soluzione fondamentale dell'operatore congelato

- Per quanto visto è sufficiente stimare:

$$\|Vu\|_{L^p(B_r(z_0))} \leq C \|Lu\|_{L^p(B_r(z_0))}.$$

- Fissiamo una sfera $B_r(z_0)$ con r da scegliersi poi, sia $x_0 \in B_r(z_0)$, e congeliamo i coefficienti di A in x_0, ottenendo l'operatore

$$L_0 u = -a_{ij}(x_0) u_{x_i x_j} + V(x) u$$

che riscriviamo in forma di divergenza

$$L_0 u = -\left(a_{ij}(x_0) u_{x_i}\right)_{x_j} + V(x) u,$$

perché questo ci consente di applicare le stime sulla soluzione fondamentale provate da **Dziubanski** (2005, Illinois J. Math.):

Proprietà della soluzione fondamentale dell'operatore congelato

- **Teorema.** *L'operatore L_0 ha una soluzione fondamentale $\Gamma(x_0; x, y)$ che soddisfa le seguenti stime: per ogni intero positivo k esiste una costante c_k (indipendente da x_0) tale che*

$$\Gamma(x_0; x, y) \leq \frac{c_k}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$$

dove $\rho(x)$ è il "critical radius" associato a V, definito da:

$$\rho(x) = \sup\left\{ r > 0 : \frac{r^2}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} V(y)\, dy \leq 1 \right\}.$$

Proprietà della soluzione fondamentale dell'operatore congelato

- **Teorema.** *L'operatore L_0 ha una soluzione fondamentale $\Gamma(x_0; x, y)$ che soddisfa le seguenti stime: per ogni intero positivo k esiste una costante c_k (indipendente da x_0) tale che*

$$\Gamma(x_0; x, y) \leq \frac{c_k}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$$

dove $\rho(x)$ è il "critical radius" associato a V, definito da:

$$\rho(x) = \sup\left\{ r > 0 : \frac{r^2}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} V(y)\, dy \leq 1 \right\}.$$

- La funzione ρ è stata introdotta da Shen, e giocherà un ruolo importante. Vediamo di capire perché questa funzione è ben definita per $V \in B_q, q > n/2$. (Nelle nostre ipotesi è solo $V \in B_q$ con $q \geq n/2$, ma è noto che $B_q \subset B_{q+\varepsilon}$ per qualche $\varepsilon > 0$).

Il "critical radius"

- **Lemma.** *Sia* $V \in B_q, q > n/2$. *Allora esiste* $C > 0$ *tale che per* $0 < r < R < \infty$ *risulta*

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} V(y)\, dy \leq C \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}} \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} V(y)\, dy.$$

Il "critical radius"

- **Lemma.** *Sia $V \in B_q, q > n/2$. Allora esiste $C > 0$ tale che per $0 < r < R < \infty$ risulta*

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy \leq C\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}} \frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} V(y)\,dy.$$

- **Dimostrazione.**

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy &\leq \left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)^q\,dy\right)^{1/q}\\ &\leq \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}}\left(\frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} V(y)^q\,dy\right)^{1/q}\\ &\leq \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}} \frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} V(y)\,dy.\end{aligned}$$

Il "critical radius" (segue)

- Ora dal lemma segue

$$\frac{r^2}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy \leq C\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}-2}\frac{R^2}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} V(y)\,dy$$

Il "critical radius" (segue)

- Ora dal lemma segue

$$\frac{r^2}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy \le C\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}-2}\frac{R^2}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} V(y)\,dy$$

- che, essendo $n/q-2<0$, implica:

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy = 0 \qquad \text{per } R=1 \text{ e } r\to 0$$

$$\lim_{R\to +\infty}\frac{R^2}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} V(y)\,dy = +\infty \qquad \text{per } r=1 \text{ e } R\to +\infty$$

Il "critical radius" (segue)

- Ora dal lemma segue

$$\frac{r^2}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy \le C\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}-2}\frac{R^2}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} V(y)\,dy$$

- che, essendo $n/q-2<0$, implica:

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy = 0 \qquad \text{per } R=1 \text{ e } r\to 0$$

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{R^2}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} V(y)\,dy = +\infty \qquad \text{per } r=1 \text{ e } R\to+\infty$$

- perciò è ben definita la quantità

$$\rho(x) = \sup\left\{r>0 : \frac{r^2}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy \le 1\right\}.$$

Il "critical radius" (segue)

- Ora dal lemma segue

$$\frac{r^2}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy \le C\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}-2}\frac{R^2}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} V(y)\,dy$$

- che, essendo $n/q-2<0$, implica:

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy = 0 \qquad \text{per } R=1 \text{ e } r\to 0$$

$$\lim_{R\to +\infty}\frac{R^2}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} V(y)\,dy = +\infty \qquad \text{per } r=1 \text{ e } R\to +\infty$$

- perciò è ben definita la quantità

$$\rho(x) = \sup\left\{r>0 : \frac{r^2}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} V(y)\,dy \le 1\right\}.$$

- In particolare si ha

$$\frac{\rho(x)^2}{|B(x,\rho(x))|}\int_{B(x,\rho(x))} V(y)\,dy = 1.$$

Formule di rappresentazione integrale

- Torniamo al nostro problema: stimare Vu in termini di Lu. Scriviamo una formula di rappresentazione utilizzando la soluzione fondamentale dell'operatore congelato L_0:

Formule di rappresentazione integrale

- Torniamo al nostro problema: stimare Vu in termini di Lu. Scriviamo una formula di rappresentazione utilizzando la soluzione fondamentale dell'operatore congelato L_0:
- Per ogni $u \in C_0^\infty(B_r(z_0))$, $x \in B_r(z_0)$, scriviamo

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int \Gamma(x_0; x, y)\, L_0 u(y)\, dy = \\
&= \int \Gamma(x_0; x, y)\, Lu(y)\, dy + \int \Gamma(x_0; x, y)\, [A_0 u(y) - Au(y)]\, dy.
\end{aligned}
$$

Formule di rappresentazione integrale

- Torniamo al nostro problema: stimare Vu in termini di Lu. Scriviamo una formula di rappresentazione utilizzando la soluzione fondamentale dell'operatore congelato L_0:
- Per ogni $u \in C_0^\infty(B_r(z_0))$, $x \in B_r(z_0)$, scriviamo

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int \Gamma(x_0; x, y) L_0 u(y)\, dy = \\
&= \int \Gamma(x_0; x, y) Lu(y)\, dy + \int \Gamma(x_0; x, y) [A_0 u(y) - Au(y)]\, dy.
\end{aligned}
$$

- Ponendo $x_0 = x$ otteniamo

$$
u(x) = \int \Gamma(x; x, y) Lu(y)\, dy + \sum_{i,j=1}^{n} \int \Gamma(x; x, y) [a_{ij}(y) - a_{ij}(x)]\, u_{x_i x_j}
$$

Formule di rappresentazione integrale

- Sfruttando la stima puntuale sulla soluzione fondamentale (Dziubanski) si ha, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, 3...$:

$$|V(x)\, u(x)| \leq c_k V(x) \int \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ |Lu(y)| + \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(y) - a_{ij}(x)| \left| u_{x_i x_j}(y) \right| \right\} dy.$$

Formule di rappresentazione integrale

- Sfruttando la stima puntuale sulla soluzione fondamentale (Dziubanski) si ha, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, 3 \ldots$:

$$\left|V(x)\, u(x)\right| \leq c_k V(x) \int \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ |Lu(y)| + \sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}(y) - a_{ij}(x)\right| \left|u_{x_i x_j}(y)\right| \right\} dy.$$

- Definiamo gli operatori integrali:

$$S_k f(x) = V(x) \int \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy$$

$$S_{k,a} f(x) = V(x) \int \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \left|a(y) - a(x)\right| f(y)\, dy$$

per $a \in L^\infty \cap VMO(\mathbb{R}^n)$.

Formule di rappresentazione integrale

- Allora la nostra formula di rappresentazione si riscrive in forma compatta come:

$$|Vu(x)| \leq c_k S_k(|Lu|)(x) + \sum_{i,j=1}^{n} S_{k,a_{ij}}\left(\left|u_{x_i x_j}\right|\right)(x). \qquad (8)$$

Formule di rappresentazione integrale

- Allora la nostra formula di rappresentazione si riscrive in forma compatta come:

$$\left|Vu(x)\right| \leq c_k S_k\left(|Lu|\right)(x) + \sum_{i,j=1}^{n} S_{k,a_{ij}}\left(\left|u_{x_i x_j}\right|\right)(x). \tag{8}$$

- Dimostreremo che $\forall p \in (1,q]$ e per k abbastanza grande

$$\left\|S_k f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left\|f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{9}$$

e che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists r$, dipendente dai moduli VMO della funzione a, tale che

$$\left\|S_{k,a} f\right\|_{L^p(B_r(z_0))} \leq \varepsilon \left\|f\right\|_{L^p(B_r(z_0))}. \tag{10}$$

Formule di rappresentazione integrale

- Allora per $u \in C_0^\infty(B_r(z_0))$, r abbastanza piccolo, si ha:

$$\|Vu\|_{L^p} \leq C\|Lu\|_{L^p} + \varepsilon \left\| u_{x_i x_j} \right\|_{L^p}$$

per le stime locali di Chiarenza-Frasca-Longo sull'operatore A

$$\leq C\|Lu\|_{L^p} + C\varepsilon\|Au\|_{L^p} \leq (C + C\varepsilon)\|Lu\|_{L^p} + C\varepsilon\|Vu\|_{L^p}$$

Formule di rappresentazione integrale

- Allora per $u \in C_0^\infty(B_r(z_0))$, r abbastanza piccolo, si ha:

$$\|Vu\|_{L^p} \leq C\,\|Lu\|_{L^p} + \varepsilon \left\|u_{x_i x_j}\right\|_{L^p}$$

per le stime locali di Chiarenza-Frasca-Longo sull'operatore A

$$\leq C\,\|Lu\|_{L^p} + C\varepsilon\,\|Au\|_{L^p} \leq (C + C\varepsilon)\,\|Lu\|_{L^p} + C\varepsilon\,\|Vu\|_{L^p}$$

- da cui il nostro risultato:

$$\|Vu\|_{L^p} \leq c\,\|Lu\|_{L^p}$$

Stime di operatori integrali e loro commutatori positivi

Il problema quindi è ricondotto a provare le seguenti stime:

1. Per ogni $p \in (1, q]$ e per k abbastaza grande

$$\|S_k f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Stime di operatori integrali e loro commutatori positivi

Il problema quindi è ricondotto a provare le seguenti stime:

1. Per ogni $p \in (1, q]$ e per k abbastaza grande

$$\left\| S_k f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\| f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

2. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste r, dipendente dai moduli VMO della funzione a, tale che

$$\left\| S_{k,a} f \right\|_{L^p(B_r(z_0))} \leq \varepsilon \left\| f \right\|_{L^p(B_r(z_0))}$$

Stime di operatori integrali e loro commutatori positivi

Il problema quindi è ricondotto a provare le seguenti stime:

1. Per ogni $p \in (1, q]$ e per k abbastaza grande
$$\|S_k f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$
2. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste r, dipendente dai moduli VMO della funzione a, tale che
$$\|S_{k,a} f\|_{L^p(B_r(z_0))} \leq \varepsilon \|f\|_{L^p(B_r(z_0))}$$

- dove, ricordiamo,

$$S_k f(x) = V(x) \int \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy$$
$$S_{k,a} f(x) = V(x) \int \frac{1}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} |a(y) - a(x)|\, f(y)\, dy$$

Stime di operatori integrali e loro commutatori positivi

Osservazioni

- Si tratta di stime fatte unicamente su operatori integrali a nucleo positivo (nessuna proprietà di cancellazione, nessun integrale singolare).

Stime di operatori integrali e loro commutatori positivi

Osservazioni

- Si tratta di stime fatte unicamente su operatori integrali a nucleo positivo (nessuna proprietà di cancellazione, nessun integrale singolare).
- Notiamo che $S_{k,a}f$ non è un commutatore ma un "commutatore positivo" (c'è il modulo dentro l'integrale).

Stime di operatori integrali e loro commutatori positivi

Osservazioni

- Si tratta di stime fatte unicamente su operatori integrali a nucleo positivo (nessuna proprietà di cancellazione, nessun integrale singolare).
- Notiamo che $S_{k,a}f$ non è un commutatore ma un "commutatore positivo" (c'è il modulo dentro l'integrale).
- Per provare le stime precedenti è più comodo passare agli operatori trasposti:

$$S_k^* f(x) = \int \frac{V(y)}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(y)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy;$$

$$S_{k,a}^* f(x) = \int \frac{V(y)}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(y)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} |a(y)-a(x)|\, f(y)\, dy.$$

Stime di operatori integrali e loro commutatori positivi

Osservazioni

- Si tratta di stime fatte unicamente su operatori integrali a nucleo positivo (nessuna proprietà di cancellazione, nessun integrale singolare).
- Notiamo che $S_{k,a}f$ non è un commutatore ma un "commutatore positivo" (c'è il modulo dentro l'integrale).
- Per provare le stime precedenti è più comodo passare agli operatori trasposti:

$$S_k^* f(x) = \int \frac{V(y)}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(y)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy;$$

$$S_{k,a}^* f(x) = \int \frac{V(y)}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(y)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} |a(y)-a(x)|\, f(y)\, dy.$$

- Inoltre al posto di $\rho(y)$ si può scrivere $\rho(x)$ pur di sostituire l'intero k con uno opportuno, più piccolo.

Stime di operatori integrali e loro commutatori positivi

Le stime che si dimostrano, per gli operatori trasposti sono:

- **Teorema A.** *Per k abbastanza grande, l'operatore S_k^* è continuo su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $p \in [q', \infty]$ (dove q' è l'esponente coniugato di q, e $V \in B_q$).*

Stime di operatori integrali e loro commutatori positivi

Le stime che si dimostrano, per gli operatori trasposti sono:

- **Teorema A.** *Per k abbastanza grande, l'operatore S_k^* è continuo su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $p \in [q', \infty]$ (dove q' è l'esponente coniugato di q, e $V \in B_q$).*
- **Teorema B.** *Per k abbastanza grande, l'operatore $S_{k,a}^*$ è continuo su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $p \in [q', \infty)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ eiste $r > 0$, dipendente dai moduli VMO di a, tale che*

$$\left\| S_{k,a}^* f \right\|_{L^p(B_r(z_0))} \leq \varepsilon \left\| f \right\|_{L^p(B_r(z_0))}.$$

Idea della dimostrazione del Teorema A

- Si prova la stima

$$S_k^* f(x) \leq C \; M_{q'} f \;\; (x) \tag{11}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, dove $M_{q'} f$ è la funzione massimale di esponente q', cioè

$$M_{q'} f(x) = \sup_{B \ni x} \left(\frac{1}{|B|} \int_B f(y)^{q'} \, dy \right)^{1/q'}.$$

Idea della dimostrazione del Teorema A

- Si prova la stima
$$S_k^* f(x) \leq C\ M_{q'} f\ (x) \tag{11}$$
per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, dove $M_{q'} f$ è la funzione massimale di esponente q', cioè
$$M_{q'} f(x) = \sup_{B \ni x} \left(\frac{1}{|B|} \int_B f(y)^{q'} dy \right)^{1/q'}.$$
- Per la disuguaglianza massimale, per $p > q'$, ne segue il teorema. Se $p = q'$ sfruttiamo il fatto che in effetti $V \in B_{q+\varepsilon}$ per qualche $\varepsilon > 0$, perciò (11) in effetti vale per qualche q' più piccolo.

Idea della dimostrazione del Teorema A (segue)

- Per provare (11), spezziamo

$$S_k^* f(x) \leq C \int_{|x-y|<\rho(x)} \frac{V(y)}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy +$$

$$+ C \int_{|x-y|\geq\rho(x)} \frac{V(y)}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy$$

Idea della dimostrazione del Teorema A (segue)

- Per provare (11), spezziamo

$$S_k^* f(x) \leq C \int_{|x-y|<\rho(x)} \frac{V(y)}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy +$$

$$+ C \int_{|x-y|\geq\rho(x)} \frac{V(y)}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy$$

-

$$\leq C \int_{|x-y|<\rho(x)} \frac{V(y)}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy +$$

$$+ C \int_{|x-y|\geq\rho(x)} \left(\frac{\rho(x)}{|x-y|}\right)^k \frac{V(y)}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy \equiv A(x) + B(x),$$

Idea della dimostrazione del Teorema A (segue)

- Per provare (11), spezziamo

$$S_k^* f(x) \le C \int_{|x-y|<\rho(x)} \frac{V(y)}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy + $$
$$+ C \int_{|x-y|\ge\rho(x)} \frac{V(y)}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy$$

- $$\le C \int_{|x-y|<\rho(x)} \frac{V(y)}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy +$$
$$+ C \int_{|x-y|\ge\rho(x)} \left(\frac{\rho(x)}{|x-y|}\right)^k \frac{V(y)}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy \equiv A(x) + B(x),$$

- e poi lavoriamo su $A(x)$, $B(x)$, con la "tecnica delle cipolle" e le proprietà $\frac{\rho(x)^2}{|B(x,\rho(x))|} \int_{B(x,\rho(x))} V(y)\, dy = 1$.

Idea della dimostrazione del Teorema B

- La dimostrazione si spezza in un teorema astratto e una stima "concreta" sul nucleo del nostro operatore integrale.

Idea della dimostrazione del Teorema B

- La dimostrazione si spezza in un teorema astratto e una stima "concreta" sul nucleo del nostro operatore integrale.
- La parte astratta è contenuta nel:

Idea della dimostrazione del Teorema B

- La dimostrazione si spezza in un teorema astratto e una stima "concreta" sul nucleo del nostro operatore integrale.
- La parte astratta è contenuta nel:
- **Teorema.** *Supponiamo che l'operatore integrale*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} W(x,y)\, f(y)\, dy$$

sia continuo su $L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p \in (q', \infty)$ e che il nucleo $W(x,y)$, non negativo soddisfi per qualche $q > 1$ la disuguaglianza $H_1(q)$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \left(2^j r\right)^{n/q'} \left(\int_{2^j r \leq |x_0 - y| \leq 2^{j+1} r} |W(x,y) - W(x_0,y)|^q \, dy \right)^{1/q} \leq C$$

$\forall r > 0$ *e* $x, x_0 \in R^n$ *tali che* $|x - x_0| \leq r$.

Idea della dimostrazione del Teorema B

- La dimostrazione si spezza in un teorema astratto e una stima "concreta" sul nucleo del nostro operatore integrale.
- La parte astratta è contenuta nel:
- **Teorema.** *Supponiamo che l'operatore integrale*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} W(x,y)\, f(y)\, dy$$

sia continuo su $L^p(\mathbb{R}^n)$ $\forall p \in (q', \infty)$ *e che il nucleo* $W(x,y)$, *non negativo soddisfi per qualche* $q > 1$ *la disuguaglianza* $H_1(q)$*:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \left(2^j r\right)^{n/q'} \left(\int_{2^j r \le |x_0 - y| \le 2^{j+1} r} |W(x,y) - W(x_0,y)|^q \, dy \right)^{1/q} \le C$$

$\forall r > 0$ *e* $x, x_0 \in R^n$ *tali che* $|x - x_0| \le r$.
- *Allora per* $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ *il "commutatore positivo"*

$$T_b f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |b(x) - b(y)|\, W(x,y)\, f(y)\, dy$$

soddisfa $\|T_b f\|_p \le C \|b\|_{BMO} \|f\|_p$ $\forall p \in (q', \infty)$.

Idea della dimostrazione del Teorema B

Osservazioni

- La condizione $H_1(q)$ è più debole della disuguaglianza puntuale di valor medio

$$|w(x,y) - w(x_0,y)| \leq C \frac{|x-x_0|}{|y-x_0|^{n+1}} \text{ per } |x-x_0| \leq r, |y-x_0| \geq 2r, \tag{12}$$

Idea della dimostrazione del Teorema B

Osservazioni

- La condizione $H_1(q)$ è più debole della disuguaglianza puntuale di valor medio

$$|w(x,y) - w(x_0,y)| \leq C \frac{|x-x_0|}{|y-x_0|^{n+1}} \text{ per } |x-x_0| \leq r, |y-x_0| \geq 2r, \tag{12}$$

- ed è più forte della disuguaglianza di Hörmander integrale

$$\int_{|x_0-y|\geq 2|x_0-x|} |w(x,y) - w(x_0,y)|\, dy \leq C.$$

Idea della dimostrazione del Teorema B

Osservazioni

- La condizione $H_1(q)$ è più debole della disuguaglianza puntuale di valor medio

$$|w(x,y) - w(x_0,y)| \leq C \frac{|x-x_0|}{|y-x_0|^{n+1}} \text{ per } |x-x_0| \leq r, |y-x_0| \geq 2r, \tag{12}$$

- ed è più forte della disuguaglianza di Hörmander integrale

$$\int_{|x_0-y|\geq 2|x_0-x|} |w(x,y) - w(x_0,y)|\, dy \leq C.$$

- La condizione $H_1(q)$ è stata introdotta implicitamente da Kurtz-Wheeden (1979), poi usate da Rubio de Francia-Ruiz-Torrea (1986) e altri. Stime su "commutatori positivi" sotto ipotesi più forti sul nucleo sono state provate da Bramanti (1994), Segovia-Torrea (1989).

Idea della dimostrazione del Teorema B

Osservazioni

- La condizione $H_1(q)$ è più debole della disuguaglianza puntuale di valor medio

$$\left|w(x,y)-w(x_0,y)\right| \leq C\frac{\left|x-x_0\right|}{\left|y-x_0\right|^{n+1}} \text{ per } \left|x-x_0\right| \leq r, \left|y-x_0\right| \geq 2r, \tag{12}$$

- ed è più forte della disuguaglianza di Hörmander integrale

$$\int_{|x_0-y|\geq 2|x_0-x|} \left|w(x,y)-w(x_0,y)\right| dy \leq C.$$

- La condizione $H_1(q)$ è stata introdotta implicitamente da Kurtz-Wheeden (1979), poi usate da Rubio de Francia-Ruiz-Torrea (1986) e altri. Stime su "commutatori positivi" sotto ipotesi più forti sul nucleo sono state provate da Bramanti (1994), Segovia-Torrea (1989).
- Il teorema astratto si dimostra utilizzando la funzione massimale sharp di Fefferman-Stein e funzioni massimali di esponenti s.

Idea della dimostrazione del Teorema B

- La stima "concreta" consiste nel provare che il nostro nucleo

$$w(x,y) = \frac{V(y)}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(y)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$$

soddisfa la proprietà $H_1(q)$. Questo sfrutta tra l'altro la reverse Hölder su V e la proprietà del critical radius ρ già ricordata.

Idea della dimostrazione del Teorema B

- La stima "concreta" consiste nel provare che il nostro nucleo

$$w(x,y) = \frac{V(y)}{\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(y)}\right)^k} \cdot \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$$

  soddisfa la proprietà $H_1(q)$. Questo sfrutta tra l'altro la reverse Hölder su V e la proprietà del critical radius ρ già ricordata.
- Questo completa la panoramica sulla linea dimostrativa del primo risultato del lavoro, cioè le stime globali $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$.

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità

- L'esistenza e unicità seguono in modo standard dalla stima a priori più forte

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|Lu + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{13}$$

$\forall p \in (1, q]$, $V \in B_q$, $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall \lambda \geq 0$.

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità

- L'esistenza e unicità seguono in modo standard dalla stima a priori più forte
$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|Lu + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{13}$$
$\forall p \in (1, q]$, $V \in B_q$, $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall \lambda \geq 0$.
- Questa stima richiede un'ulteriore ipotesi su V (perché è falsa per $V = 0$!). Cominciamo a provarla sotto la condizione
$$V(x) \geq \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$
e poi indeboliremo a
$$V(x) \geq \delta > 0 \text{ se } |x| > R.$$

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità

- L'esistenza e unicità seguono in modo standard dalla stima a priori più forte

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|Lu + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{13}$$

  $\forall p \in (1, q]$, $V \in B_q$, $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall \lambda \geq 0$.
- Questa stima richiede un'ulteriore ipotesi su V (perché è falsa per $V = 0$!). Cominciamo a provarla sotto la condizione

$$V(x) \geq \delta > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}^n,$$

  e poi indeboliremo a

$$V(x) \geq \delta > 0 \text{ se } |x| > R.$$

- Abbiamo seguito il più possibile da vicino la linea del libro di Krylov, Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces. AMS, 2008 (uno dei pochi che tratti stime $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ per operatori ellittici non variazionali su tutto $\mathbb{R}^n$ anziché su un dominio limitato).

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità

- **Passo 1.** Si comincia col provare che la stima (13) vale λ abbastanza grande. Questo si fa utilizzando una tecnica chiamata talvolta "idea di Agmon":

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità

- **Passo 1.** Si comincia col provare che la stima (13) vale λ abbastanza grande. Questo si fa utilizzando una tecnica chiamata talvolta "idea di Agmon":
- si applica la stima globale già dimostrata,

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left\{\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\},$$

all'operatore in $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\widetilde{L} = L - \partial_{tt}^2$$

e alla funzione a valori complessi

$$\widetilde{u}(x,t) = u(x)\, e^{i\sqrt{\lambda}t}\phi(t)$$

(dove u ha valori reali) con $\lambda \geq 1$ da scegliersi poi.

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità (segue)

- Facendo i conti con cura si trova che dalla disuguaglianza

$$
\begin{aligned}
& \left\| D^2 \widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} + \left\| D \widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} + \left\| V \widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \leq \\
\leq \quad & C \left\{ \left\| \widetilde{L} \widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} + \left\| \widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \right\}
\end{aligned}
$$

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità (segue)

- Facendo i conti con cura si trova che dalla disuguaglianza

$$
\begin{aligned}
& \left\| D^2 \widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} + \left\| D \widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} + \left\| V \widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \leq \\
\leq \quad & C \left\{ \left\| \widetilde{L} \widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} + \left\| \widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \right\}
\end{aligned}
$$

- segue

$$
\begin{aligned}
& \left\| D^2 u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\| Du \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\| Vu \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \lambda \left\| u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \\
& \leq C \left\{ \left\| Lu + \lambda u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left(\sqrt{\lambda} + 1 \right) \left\| u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\}.
\end{aligned}
$$

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità (segue)

- Facendo i conti con cura si trova che dalla disuguaglianza

$$
\begin{aligned}
& \left\| D^2 \widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} + \left\| D\widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} + \left\| V\widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \leq \\
\leq \quad & C \left\{ \left\| \widetilde{L}\widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} + \left\| \widetilde{u} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \right\}
\end{aligned}
$$

- segue

$$
\begin{aligned}
& \left\| D^2 u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\| Du \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\| Vu \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \lambda \left\| u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \\
& \leq C \left\{ \left\| Lu + \lambda u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left(\sqrt{\lambda} + 1 \right) \left\| u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\}.
\end{aligned}
$$

- Prendendo $C \left(\sqrt{\lambda} + 1 \right) \leq \lambda/2$, cioè $\lambda \geq \lambda_0$ abbastanza grande, si ha:

$$
\left\| u \right\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \left\| Vu \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\| Lu + \lambda u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
$$

con C indipendente da λ.

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità

- **Passo 2.** Ora vogliamo provare questa stima per $\lambda \geq 0$ qualsiasi. Poiché

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\{ \|Lu + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\},$$

(perché V e $V + \lambda$ hanno la stessa costante B_q), è sufficiente provare che

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Lu + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

per ogni $\lambda \geq 0$.

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità

- **Passo 2.** Ora vogliamo provare questa stima per $\lambda \geq 0$ qualsiasi. Poiché

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|Vu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\{ \|Lu + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\},$$

  (perché V e $V + \lambda$ hanno la stessa costante B_q), è sufficiente provare che

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Lu + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

  per ogni $\lambda \geq 0$.
- Si prova prima che è sufficiente dimostrare questa assumendo V e a_{ij} smooth, ma con costanti controllate dai parametri che compaiono nelle nostre ipotesi. Quindi si ripercorre la dimostrazione fatta da Krylov nel caso di $V \in L^q(\mathbb{R}^n)$. L'utilizzo di opportuni principi di massimo e confronti dà la tesi.

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità

- **Passo 3.** Ora si vuole indebolire l'ipotesi su V a

$$V(x) \geq \delta > 0 \text{ se } |x| > R.$$

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità

- **Passo 3.** Ora si vuole indebolire l'ipotesi su V a

$$V(x) \geq \delta > 0 \text{ se } |x| > R.$$

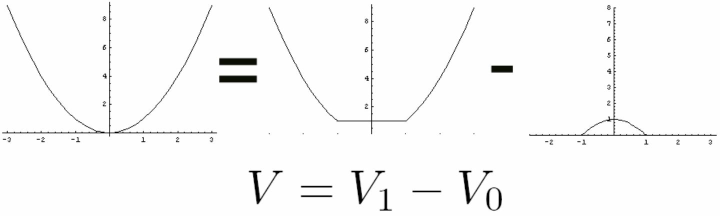
- Poniamo

$$V_1(x) = \max(V(x), \delta).$$

Il potenziale V_1 soddisfa l'ipotesi più forte $V_1(x) \geq \delta > 0$ in $\mathbb{R}^n$ ed è ancora B_q.

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità

- **Passo 3.** Ora si vuole indebolire l'ipotesi su V a
$$V(x) \geq \delta > 0 \text{ se } |x| > R.$$
- Poniamo
$$V_1(x) = \max(V(x), \delta).$$
Il potenziale V_1 soddisfa l'ipotesi più forte $V_1(x) \geq \delta > 0$ in $\mathbb{R}^n$ ed è ancora B_q.
- Inoltre $V = V_1 - V_0$ con $0 \leq V_0(x) \leq \delta$, V_0 supportata in $B_R(0)$.



Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità

- Applichiamo il teorema di esistenza ad $A + V_1$ e abbiamo

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{W_V^{2,p}(\mathbb{R}^n)} &\leqslant C \|Au + V_1 u + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \left\{ \|Lu + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V_0 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\} \\
&\leq C \left\{ \|Lu + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(B_R)} \right\}. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

dove l'essenziale è che l'ultimo termine ha una norma $L^p(B_R)$.

Linea dimostrativa del teorema di esistenza e unicità

- Applichiamo il teorema di esistenza ad $A + V_1$ e abbiamo

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{W_V^{2,p}(\mathbb{R}^n)} &\leqslant C \|Au + V_1 u + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \left\{ \|Lu + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V_0 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\} \\
&\leq C \left\{ \|Lu + \lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p(B_R)} \right\}. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

  dove l'essenziale è che l'ultimo termine ha una norma $L^p(B_R)$.
- Si riesce allora ad ottenere la stima desiderata applicando una tecnica standard di analisi funzionale: si ragiona per assurdo e si utilizza un argomento di compattezza, reso possibile appunto dalla presenza del termine $\|u\|_{L^p(B_R)}$.

Bibliografia (1)

- M. Bramanti: Commutators of integral operators with positive kernels. Matematiche (Catania) 49 (1994), no. 1, 149–168 (1995).
- F. Chiarenza, M. Frasca, P. Longo: Interior $W^{2,p}$-estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients. Ricerche di Mat. XL (1991), 149-168.
- F. Chiarenza, M. Frasca, P. Longo: $W^{2,p}$-solvability of the Dirichlet problem for non divergence elliptic equations with VMO coefficients. Trans. of Am. Math. Soc., 336 (1993), n. 1, 841-853.
- J. Dziubanski: Note on H^1 spaces related to degenerate Schrödinger operators. Illinois J. Math., vol. 49, n. 4 (2005), 1271-1297.
- F. W. Gehring: The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping. Acta Math. 130 (1973), 265-277.
- Z.Guo, P. Li, L. Peng: L^p boundedness of commutators of Riesz transforms associated to Schrödinger operator. J. Math. Anal. Appl., 341 (2008), 421-432.

Bibliografia (2)

- N. V. Krylov: Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. Graduate Studies in Mathematics, A.M.S. 2008.
- D. S. Kurtz, R. L. Wheeden: Results on weighted norm inequalities for multipliers. Trans. Am. Math. Soc., vol. 255 (1979), 343-362.
- M. Lorente, J. M. Martell, M. S. Riveros, A. de la Torre: Generalized Hörmander's conditions, commutators and weights. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 342 (2008) 1399-1425.
- J. M. Martell, C. Pérez and R. Trujillo-González: Lack of natural weighted estimates for some singular integral operators. Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), no. 1, 385-396.
- J. L. Rubio de Francia, F. J. Ruiz, J. L. Torrea: Calderón-Zygmund theory for vector-valued functions. Adv. in Math. 62 (1986), 7-48.
- C. Segovia, J. L.Torrea: Vector-valued commutators and applications. Indiana Univ. Math. J., vol. 38, n. 4 (1989), 959-971.

Bibliografia (3)

Z. Shen: L^p estimates for Schrodinger's operators with certain potentials. Ann. Inst. Fourier, t. 45, n. 2 (1995), 513-546.

Z. Shen: On the Neumann problem for Schrödinger operators in Lipschitz domains. Indiana Univ. Math. J. 43 (1994), no. 1, 143–176.

S. Thangavelu: Riesz transforms and the wave equation for the Hermite operator. Comm. Partial Differential Equations 15 (1990), no. 8, 1199–1215.

C. Vitanza: A new contribution to the $W^{2,p}$ regularity for a class of elliptic second order equations with discontinuous coefficients. Le Matematiche (Catania) 48 (1993), no. 2, 287-296 (1994).