Campi di Hörmander non regolari e disuguaglianza di Poincaré

Lavoro in collaborazione con Luca Brandolini e Marco Pedroni (Università di Bergamo), to appear on Forum Mathematicum

Marco Bramanti

Politecnico di Milano

Bologna, Settembre 2011

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Nello studio degli operatori ellittico-parabolici degeneri, una classe importante è costituita dagli *operatori di Hörmander*

$$L = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + X_0$$

espressi mediante campi vettoriali

$$X_i = \sum_{j=1}^{p} b_{ij}(x) \, \partial_{x_j}$$

$(i = 0, 1, 2, ..., n; \; n < p)$ definiti in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^p$.

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Nello studio degli operatori ellittico-parabolici degeneri, una classe importante è costituita dagli *operatori di Hörmander*

$$L = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + X_0$$

espressi mediante campi vettoriali

$$X_i = \sum_{j=1}^{p} b_{ij}(x)\, \partial_{x_j}$$

$(i = 0, 1, 2, \ldots, n;\ n < p)$ definiti in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^p$.
- Si suppone che $b_{ij} \in C^\infty(\Omega)$ e i campi soddisfino la *condizione di Hörmander*, ossia: se definiamo il commutatore di due campi

$$[X, Y] = XY - YX,$$

il sistema costituito dagli X_i, i loro commutatori, i commutatori dei campi con i loro commutatori, e così via fino a un certo passo r, costituisce in ogni punto di Ω un sistema di generatori di $\mathbb{R}^p$.

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Un famoso teorema di Hörmander (Acta Math., 1967) stabilisce che sotto queste ipotesi l'operatore del second'ordine L è *ipoellitico* in Ω:

  $$Lu = f \text{ in } \Omega \text{ (in senso distribuz.)}, \; A \subset \Omega, \; f \in C^{\infty}(A) \Longrightarrow u \in C^{\infty}(A)$$

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Un famoso teorema di Hörmander (Acta Math., 1967) stabilisce che sotto queste ipotesi l'operatore del second'ordine L è *ipoellitico* in Ω:

  $Lu = f$ in Ω (in senso distribuz.), $A \subset \Omega$, $f \in C^{\infty}(A) \Longrightarrow u \in C^{\infty}(A)$

- Motivazioni per lo studio degli operatori di Hormander vengono dalla teoria delle funzioni di più variabili complesse (equazioni stazionarie come il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg) e dallo studio di sistemi retti da e.d.o. stocastiche (equazioni ultraparaboliche di diffusione e trasporto, di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck)

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Un famoso teorema di Hörmander (Acta Math., 1967) stabilisce che sotto queste ipotesi l'operatore del second'ordine L è *ipoellitico* in Ω:

$$Lu = f \text{ in } \Omega \text{ (in senso distribuz.)}, \; A \subset \Omega, \; f \in C^{\infty}(A) \Longrightarrow u \in C^{\infty}(A)$$

- Motivazioni per lo studio degli operatori di Hormander vengono dalla teoria delle funzioni di più variabili complesse (equazioni stazionarie come il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg) e dallo studio di sistemi retti da e.d.o. stocastiche (equazioni ultraparaboliche di diffusione e trasporto, di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck)
- Altra conseguenza della condizione di Hörmander è la *proprietà di connettività* (teorema di Rashevski - Chow, 1938-39):

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \; & \Omega, \; \exists \text{ una curva } \gamma \text{ in } \Omega, \text{ congiungente } x, y, \text{ tale che} \\ & \gamma \text{ è una sequenza di archi di linee integrali dei campi } X_i. \end{aligned}$$

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Un famoso teorema di Hörmander (Acta Math., 1967) stabilisce che sotto queste ipotesi l'operatore del second'ordine L è *ipoellitico* in Ω:

$$Lu = f \text{ in } \Omega \text{ (in senso distribuz.)}, \; A \subset \Omega, \; f \in C^{\infty}(A) \Longrightarrow u \in C^{\infty}(A)$$

- Motivazioni per lo studio degli operatori di Hormander vengono dalla teoria delle funzioni di più variabili complesse (equazioni stazionarie come il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg) e dallo studio di sistemi retti da e.d.o. stocastiche (equazioni ultraparaboliche di diffusione e trasporto, di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck)
- Altra conseguenza della condizione di Hörmander è la *proprietà di connettività* (teorema di Rashevski - Chow, 1938-39):

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \; & \Omega, \; \exists \text{ una curva } \gamma \text{ in } \Omega, \; \text{congiungente } x, y, \; \text{tale che} \\ & \gamma \text{ è una sequenza di archi di linee integrali dei campi } X_i. \end{aligned}$$

- Si può allora definire una "distanza di controllo" indotta dai campi vettoriali, come l'inf dei tempi di percorrenza delle "curve ammissibili".

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Successivamente a Hörmander 1967, altre proprietà fondamentali sono state provate:

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Successivamente a Hörmander 1967, altre proprietà fondamentali sono state provate:
- riguardo i *sistemi di campi di Hörmander e la relativa metrica:*

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Successivamente a Hörmander 1967, altre proprietà fondamentali sono state provate:
- riguardo i *sistemi di campi di Hörmander e la relativa metrica:*
  - la proprietà di doubling della misura di Lebesgue rispetto alle sfere metriche (Nagel-Stein-Wainger 1985);

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Successivamente a Hörmander 1967, altre proprietà fondamentali sono state provate:
- riguardo i *sistemi di campi di Hörmander e la relativa metrica:*
  - la proprietà di doubling della misura di Lebesgue rispetto alle sfere metriche (Nagel-Stein-Wainger 1985);
  - la disuguaglianza di Poincaré rispetto ai campi vettoriali (Jerison 1986).

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Successivamente a Hörmander 1967, altre proprietà fondamentali sono state provate:
- riguardo i *sistemi di campi di Hörmander e la relativa metrica:*
  - la proprietà di doubling della misura di Lebesgue rispetto alle sfere metriche (Nagel-Stein-Wainger 1985);
  - la disuguaglianza di Poincaré rispetto ai campi vettoriali (Jerison 1986).
- riguardo gli *operatori di Hörmander* $\sum X_i^2 + X_0$:

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Successivamente a Hörmander 1967, altre proprietà fondamentali sono state provate:
- riguardo i *sistemi di campi di Hörmander e la relativa metrica:*
  - la proprietà di doubling della misura di Lebesgue rispetto alle sfere metriche (Nagel-Stein-Wainger 1985);
  - la disuguaglianza di Poincaré rispetto ai campi vettoriali (Jerison 1986).
- riguardo gli *operatori di Hörmander* $\sum X_i^2 + X_0$:
  - varie stime a priori (L^p o C^α) sulle derivate seconde rispetto ai campi X_i, in termini di norme di Lu e u (Folland 1975, Rothschild-Stein, 1976);

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Successivamente a Hörmander 1967, altre proprietà fondamentali sono state provate:
- riguardo i *sistemi di campi di Hörmander e la relativa metrica:*
  - la proprietà di doubling della misura di Lebesgue rispetto alle sfere metriche (Nagel-Stein-Wainger 1985);
  - la disuguaglianza di Poincaré rispetto ai campi vettoriali (Jerison 1986).
- riguardo gli *operatori di Hörmander* $\sum X_i^2 + X_0$:
  - varie stime a priori (L^p o C^α) sulle derivate seconde rispetto ai campi X_i, in termini di norme di Lu e u (Folland 1975, Rothschild-Stein, 1976);
  - stime sulla soluzione fondamentale di L or $\partial_t - L$ (ancora Nagel-Stein-Wainger, Sanchez-Calle 1984, Jerison-Sanchez-Calle 1986, Fefferman-Sanchez-Calle 1986).

Introduzione. Operatori di Hörmander classici

- Successivamente a Hörmander 1967, altre proprietà fondamentali sono state provate:
- riguardo i *sistemi di campi di Hörmander e la relativa metrica:*
  - la proprietà di doubling della misura di Lebesgue rispetto alle sfere metriche (Nagel-Stein-Wainger 1985);
  - la disuguaglianza di Poincaré rispetto ai campi vettoriali (Jerison 1986).
- riguardo gli *operatori di Hörmander* $\sum X_i^2 + X_0$:
  - varie stime a priori (L^p o C^α) sulle derivate seconde rispetto ai campi X_i, in termini di norme di Lu e u (Folland 1975, Rothschild-Stein, 1976);
  - stime sulla soluzione fondamentale di L or $\partial_t - L$ (ancora Nagel-Stein-Wainger, Sanchez-Calle 1984, Jerison-Sanchez-Calle 1986, Fefferman-Sanchez-Calle 1986).
- E' naturale chiedersi se una parte della teoria precedente continui a valere per una famiglia di campi vettoriali che possiede solo un certo numero di derivate, sufficienti a verificare la condizione di Hörmander.

Campi di Hörmander non regolari

Vari autori hanno studiato "campi di Hörmander non regolari". I risultati esistenti sono grosso modo raggruppabili in due filoni:

1. Campi vettoriali non regolari che hanno una forma particolare:

Campi di Hörmander non regolari

Vari autori hanno studiato “campi di Hörmander non regolari”. I risultati esistenti sono grosso modo raggruppabili in due filoni:

1. Campi vettoriali non regolari che hanno una forma particolare:
   1. *Campi vettoriali diagonali* studiati in vari lavori di Franchi e Lanconelli, anni 1980, poi Franchi 1991, Sawyer-Wheeden 2006.

Campi di Hörmander non regolari

Vari autori hanno studiato "campi di Hörmander non regolari". I risultati esistenti sono grosso modo raggruppabili in due filoni:

1. Campi vettoriali non regolari che hanno una forma particolare:
   1. *Campi vettoriali diagonali* studiati in vari lavori di Franchi e Lanconelli, anni 1980, poi Franchi 1991, Sawyer-Wheeden 2006.
   2. *Campi vettoriali "nonlineari"*, studiati nel contesto di equazioni di tipo Levi in vari lavori di Citti, Montanari, Lanconelli,.... a partire dal 1996.

Campi di Hörmander non regolari

Vari autori hanno studiato "campi di Hörmander non regolari". I risultati esistenti sono grosso modo raggruppabili in due filoni:

1. Campi vettoriali non regolari che hanno una forma particolare:
   1. *Campi vettoriali diagonali* studiati in vari lavori di Franchi e Lanconelli, anni 1980, poi Franchi 1991, Sawyer-Wheeden 2006.
   2. *Campi vettoriali "nonlineari"*, studiati nel contesto di equazioni di tipo Levi in vari lavori di Citti, Montanari, Lanconelli,.... a partire dal 1996.
   3. *Campi non regolari di passo due*, v. Montanari-Morbidelli, 2002 e 2004.

Campi di Hörmander non regolari

Vari autori hanno studiato "campi di Hörmander non regolari". I risultati esistenti sono grosso modo raggruppabili in due filoni:

1. Campi vettoriali non regolari che hanno una forma particolare:
   1. *Campi vettoriali diagonali* studiati in vari lavori di Franchi e Lanconelli, anni 1980, poi Franchi 1991, Sawyer-Wheeden 2006.
   2. *Campi vettoriali "nonlineari"*, studiati nel contesto di equazioni di tipo Levi in vari lavori di Citti, Montanari, Lanconelli,.... a partire dal 1996.
   3. *Campi non regolari di passo due*, v. Montanari-Morbidelli, 2002 e 2004.

- In tutti questi casi si studiano campi che hanno una struttura particolare, il che rende possibile costruzioni e tecniche ad hoc che non si possono ripetere nel caso generale.

Campi di Hörmander non regolari

2. *Teorie assiomatiche di campi vettoriali lipschitziani, generici, e metriche indotte da questi.* Ad esempio, si suppone a priori la validità di un teorema di connettività, una condizione di doubling per le sfere metriche, una disuguaglianza di Poincaré per il gradiente indotto dai campi, e si provano che di conseguenza...
   Numerosi lavori, ad es. di Capogna, Danielli, Franchi, Gallot, Garofalo, Gutierrez, Lanconelli, Hajlasz, Koskela, Morbidelli, Nhieu, Serapioni, Serra Cassano, Wheeden...

Campi di Hörmander non regolari

2. *Teorie assiomatiche di campi vettoriali lipschitziani, generici, e metriche indotte da questi.* Ad esempio, si suppone a priori la validità di un teorema di connettività, una condizione di doubling per le sfere metriche, una disuguaglianza di Poincaré per il gradiente indotto dai campi, e si provano che di conseguenza...
   Numerosi lavori, ad es. di Capogna, Danielli, Franchi, Gallot, Garofalo, Gutierrez, Lanconelli, Hajlasz, Koskela, Morbidelli, Nhieu, Serapioni, Serra Cassano, Wheeden...

- *Obiettivo di questa ricerca è studiare campi, di forma qualsiasi, che soddisfano la condizione di Hörmander a un certo passo (qualsiasi), e che possiedono il minimo numero di derivate necessarie per verificare tale condizione.*

Campi di Hörmander non regolari

2. *Teorie assiomatiche di campi vettoriali lipschitziani, generici, e metriche indotte da questi.* Ad esempio, si suppone a priori la validità di un teorema di connettività, una condizione di doubling per le sfere metriche, una disuguaglianza di Poincaré per il gradiente indotto dai campi, e si provano che di conseguenza...
   Numerosi lavori, ad es. di Capogna, Danielli, Franchi, Gallot, Garofalo, Gutierrez, Lanconelli, Hajlasz, Koskela, Morbidelli, Nhieu, Serapioni, Serra Cassano, Wheeden...

- *Obiettivo di questa ricerca è studiare campi, di forma qualsiasi, che soddisfano la condizione di Hörmander a un certo passo (qualsiasi), e che possiedono il minimo numero di derivate necessarie per verificare tale condizione.*
- Inoltre ci interessa tener conto esplicitamente della possibilità che uno dei campi, X_0, abbia "peso due" rispetto agli altri, come avviene nello studio degli operatori di tipo Hörmander $\sum X_i^2 + X_0$.

Campi di Hörmander non regolari

- I nostri risultati in questa direzione sono contenuti in:

Campi di Hörmander non regolari

- I nostri risultati in questa direzione sono contenuti in:
- Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni: Basic properties of nonsmooth Hörmander's vector fields and Poincaré's inequality. To appear on Forum Mathematicum.

Campi di Hörmander non regolari

- I nostri risultati in questa direzione sono contenuti in:
- Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni: Basic properties of nonsmooth Hörmander's vector fields and Poincaré's inequality. To appear on Forum Mathematicum.
- Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni: On the lifting and approximation theorem for nonsmooth vector fields. To appear on Indiana University Mathematics Journal.

Campi di Hörmander non regolari

- I nostri risultati in questa direzione sono contenuti in:
- Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni: Basic properties of nonsmooth Hörmander's vector fields and Poincaré's inequality. To appear on Forum Mathematicum.
- Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni: On the lifting and approximation theorem for nonsmooth vector fields. To appear on Indiana University Mathematics Journal.
- Risultati simili a quelli del nostro primo lavoro sono stati ottenuti indipedentemente e contemporaneamente da:

Campi di Hörmander non regolari

- I nostri risultati in questa direzione sono contenuti in:
- Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni: Basic properties of nonsmooth Hörmander's vector fields and Poincaré's inequality. To appear on Forum Mathematicum.
- Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni: On the lifting and approximation theorem for nonsmooth vector fields. To appear on Indiana University Mathematics Journal.
- Risultati simili a quelli del nostro primo lavoro sono stati ottenuti indipedentemente e contemporaneamente da:
- A. Montanari, D. Morbidelli: Nonsmooth Hörmander vector fields and their control balls. To appear on Trans. Amer. Math. Soc.

Campi di Hörmander non regolari

- I nostri risultati in questa direzione sono contenuti in:
- Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni: Basic properties of nonsmooth Hörmander's vector fields and Poincaré's inequality. To appear on Forum Mathematicum.
- Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni: On the lifting and approximation theorem for nonsmooth vector fields. To appear on Indiana University Mathematics Journal.
- Risultati simili a quelli del nostro primo lavoro sono stati ottenuti indipedentemente e contemporaneamente da:
- A. Montanari, D. Morbidelli: Nonsmooth Hörmander vector fields and their control balls. To appear on Trans. Amer. Math. Soc.
- Tutti e tre i lavori sono visibili su arXiv.org

Parte 1. Proprietà di base della distanza indotta dai campi.
Notazioni ed ipotesi

- **Ipotesi (A).** Supponiamo che, per un certo intero $r \geq 2$ e un certo dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^p$:

Parte 1. Proprietà di base della distanza indotta dai campi. Notazioni ed ipotesi

- **Ipotesi (A).** Supponiamo che, per un certo intero $r \geq 2$ e un certo dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^p$:
  1. I coefficienti dei campi $X_1, X_2, ..., X_n$ siano $C^{r-1}\left(\overline{\Omega}\right)$, e i coefficienti di X_0 siano $C^{r-2}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Parte 1. Proprietà di base della distanza indotta dai campi. Notazioni ed ipotesi

- **Ipotesi (A).** Supponiamo che, per un certo intero $r \geq 2$ e un certo dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^p$:
    1. I coefficienti dei campi $X_1, X_2, ..., X_n$ siano $C^{r-1}\left(\overline{\Omega}\right)$, e i coefficienti di X_0 siano $C^{r-2}\left(\overline{\Omega}\right)$.
    2. I commutatori fino al passo (pesato) r (dove $X_1, ..., X_n$ pesano 1 e X_0 pesa 2) generano $\mathbb{R}^p$ $\forall x \in \Omega$.

Parte 1. Proprietà di base della distanza indotta dai campi. Notazioni ed ipotesi

- **Ipotesi (A).** Supponiamo che, per un certo intero $r \geq 2$ e un certo dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^p$:
  1. I coefficienti dei campi $X_1, X_2, ..., X_n$ siano $C^{r-1}\left(\overline{\Omega}\right)$, e i coefficienti di X_0 siano $C^{r-2}\left(\overline{\Omega}\right)$.
  2. I commutatori fino al passo (pesato) r (dove $X_1, ..., X_n$ pesano 1 e X_0 pesa 2) generano $\mathbb{R}^p$ $\forall x \in \Omega$.
- **Definizione. (Distanza indotta dai campi)** $\forall \delta > 0$, sia $C(\delta)$ la classe delle curve assolutamente continue $\varphi : [0,1] \longrightarrow \Omega$ tali che

$$\varphi'(t) = \sum_{|I| \leq r} a_I(t) \left(X_{[I]}\right)_{\varphi(t)} \text{ q.o.}$$

con $a_I : [0,1] \to \mathbb{R}$ misurabili, $|a_I(t)| \leq \delta^{|I|}$. Poniamo:

$$d(x,y) = \inf\left\{\delta > 0 : \exists \varphi \in C(\delta) \text{ con } \varphi(0) = x, \varphi(1) = y\right\}.$$

Parte 1. Proprietà di base della distanza indotta dai campi. Risultati

- **Relazione con la distanza Euclidea.** Sotto le ipotesi precedenti d è una distanza (finita) in Ω, topologicamente equivalente a quella euclidea; inoltre $\forall \Omega' \Subset \Omega$ $\exists c_1, c_2$ tali che:

$$c_1 |x - y| \leq d(x, y) \leq c_2 |x - y|^{1/r} \quad \forall x, y \in \Omega'.$$

Parte 1. Proprietà di base della distanza indotta dai campi. Risultati

- **Relazione con la distanza Euclidea.** Sotto le ipotesi precedenti d è una distanza (finita) in Ω, topologicamente equivalente a quella euclidea; inoltre $\forall \Omega' \Subset \Omega \; \exists c_1, c_2$ tali che:

$$c_1 |x - y| \leq d(x, y) \leq c_2 |x - y|^{1/r} \;\; \forall x, y \in \Omega'.$$

- **Doubling locale.** $\forall \Omega' \Subset \Omega$, $\exists$ costanti positive c, r_0 tali che:

$$|B_X(x_0, 2\rho)| \leq c \, |B_X(x_0, \rho)| \quad \forall x_0 \in \Omega', \rho < r_0.$$

Parte 1. Proprietà di base della distanza indotta dai campi. Risultati

- **Relazione con la distanza Euclidea.** Sotto le ipotesi precedenti d è una distanza (finita) in Ω, topologicamente equivalente a quella euclidea; inoltre $\forall \Omega' \Subset \Omega$ $\exists c_1, c_2$ tali che:

$$c_1 |x - y| \leq d(x, y) \leq c_2 |x - y|^{1/r} \quad \forall x, y \in \Omega'.$$

- **Doubling locale.** $\forall \Omega' \Subset \Omega$, $\exists$ costanti positive c, r_0 tali che:

$$|B_X(x_0, 2\rho)| \leq c \, |B_X(x_0, \rho)| \quad \forall x_0 \in \Omega', \rho < r_0.$$

- **Volume delle sfere metriche.** (Risultato analogo alla stima di Nagel-Stein-Wainger).

Parte 2. Proprietà di conettività. Ipotesi e risultati

- **Ipotesi (B).** Supponiamo ora, inoltre, che X_0 sia almeno C^1 (se $r > 2$ è automatico).

Parte 2. Proprietà di conettività. Ipotesi e risultati

- **Ipotesi (B).** Supponiamo ora, inoltre, che X_0 sia almeno C^1 (se $r > 2$ è automatico).
- **Definizione (distanza di controllo).** $\forall \delta > 0$, sia $C_1(\delta)$ la classe delle curve assolutamente continue $\varphi : [0,1] \longrightarrow \Omega$ tali che

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=0}^{n} a_i(t) (X_i)_{\varphi(t)} \text{ q.o.,} \\ \text{con } |a_0(t)| &\leq \delta^2, |a_i(t)| \leq \delta \text{ per } i = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

Poniamo

$$d_1(x,y) = \inf \{\delta > 0 : \exists \varphi \in C_1(\delta) \text{ con } \varphi(0) = x, \varphi(1) = y\}.$$

Parte 2. Proprietà di conettività. Ipotesi e risultati

- **Ipotesi (B).** Supponiamo ora, inoltre, che X_0 sia almeno C^1 (se $r > 2$ è automatico).
- **Definizione (distanza di controllo).** $\forall \delta > 0$, sia $C_1(\delta)$ la classe delle curve assolutamente continue $\varphi : [0,1] \longrightarrow \Omega$ tali che

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=0}^{n} a_i(t) (X_i)_{\varphi(t)} \text{ q.o.,} \\ \text{con } |a_0(t)| &\leq \delta^2, |a_i(t)| \leq \delta \text{ per } i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

  Poniamo

$$d_1(x, y) = \inf \{\delta > 0 : \exists \varphi \in C_1(\delta) \text{ con } \varphi(0) = x, \varphi(1) = y\}.$$

- **Teorema di connettività**. $\forall x, y \in \Omega \ \exists$ in Ω una curva congiungente x a y e composta da un numero finito di linee integrali dei campi X_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Parte 2. Proprietà di conettività. Ipotesi e risultati

- **Ipotesi (B).** Supponiamo ora, inoltre, che X_0 sia almeno C^1 (se $r > 2$ è automatico).
- **Definizione (distanza di controllo).** $\forall \delta > 0$, sia $C_1(\delta)$ la classe delle curve assolutamente continue $\varphi : [0,1] \longrightarrow \Omega$ tali che

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=0}^{n} a_i(t) (X_i)_{\varphi(t)} \text{ q.o.,} \\ \text{con } |a_0(t)| &\leq \delta^2, |a_i(t)| \leq \delta \text{ per } i = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

  Poniamo

$$d_1(x, y) = \inf \{\delta > 0 : \exists \varphi \in C_1(\delta) \text{ con } \varphi(0) = x, \varphi(1) = y\}.$$

- **Teorema di connettività**. $\forall x, y \in \Omega$ $\exists$ in Ω una curva congiungente x a y e composta da un numero finito di linee integrali dei campi X_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$.
- **Teorema. La distanza di controllo d_1 è localmente equivalente a d.** In particolare, per le d_1-sfere vale la doubling e la stima sul volume.

Parte 3. Disuguaglianza di Poincaré

- **Ipotesi (C).** Supponiamo ora che $X_0 \equiv 0$ e i coefficienti degli X_i siano $C^{r-1,1}$.

Parte 3. Disuguaglianza di Poincaré

- **Ipotesi (C).** Supponiamo ora che $X_0 \equiv 0$ e i coefficienti degli X_i siano $C^{r-1,1}$.
- **Teorema (disuguaglianza di Poincaré).** $\forall \Omega' \Subset \Omega$ $\exists c, r_0 > 0, \lambda \geq 1$ tali che $\forall$ d_1-sfera $B_1 = B_1(x, \rho)$, con $\rho \leq r_0$, $x \in \Omega'$, $u \in C^1\left(\overline{\lambda B}\right)$, si ha

$$\int_B |u(y) - u_B|\, dy \leq c\rho \int_{\lambda B} |Xu(y)|\, dy, \text{ dove}$$

$$|Xu(y)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |X_j u(y)|^2}.$$

Parte 3. Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré. (1) Teoremi di Sobolev e Poincaré p-p

- I risultati dimostrati fin qui permettono di dedurre ulteriori conseguenze, applicando le "teorie assiomatiche" esistenti. Ad es., applicando un risultato di Hajlasz-Koskela 2000 (v. anche Saloff-Coste 1992, Garofalo-Nhieu 1996, Franchi-Lu-Wheeden 1996) si ottiene subito:

Parte 3. Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré. (1) Teoremi di Sobolev e Poincaré p-p

- I risultati dimostrati fin qui permettono di dedurre ulteriori conseguenze, applicando le "teorie assiomatiche" esistenti. Ad es., applicando un risultato di Hajlasz-Koskela 2000 (v. anche Saloff-Coste 1992, Garofalo-Nhieu 1996, Franchi-Lu-Wheeden 1996) si ottiene subito:
- $\forall \Omega' \Subset \Omega$, $p \geq 1$, $\exists c, r_0 > 0$, tali che:

Parte 3. Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré. (1) Teoremi di Sobolev e Poincaré p-p

- I risultati dimostrati fin qui permettono di dedurre ulteriori conseguenze, applicando le "teorie assiomatiche" esistenti. Ad es., applicando un risultato di Hajlasz-Koskela 2000 (v. anche Saloff-Coste 1992, Garofalo-Nhieu 1996, Franchi-Lu-Wheeden 1996) si ottiene subito:
- $\forall \Omega' \Subset \Omega$, $p \geq 1$, $\exists c, r_0 > 0$, tali che:

1. (disuguaglianza di Sobolev). $\exists k > 1$ tale che

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |\varphi(x)|^{kp} \, dx \right)^{1/kp} \leq c\rho \left(\frac{1}{|B|} \int_B |X\varphi(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(B)$, con $B = B(x, \rho)$, $\rho \leq r_0$, $x \in \Omega'$, (dove si considerano le sfere rispetto alla distanza d_1).

Parte 3. Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré. (1) Teoremi di Sobolev e Poincaré p-p

- I risultati dimostrati fin qui permettono di dedurre ulteriori conseguenze, applicando le "teorie assiomatiche" esistenti. Ad es., applicando un risultato di Hajlasz-Koskela 2000 (v. anche Saloff-Coste 1992, Garofalo-Nhieu 1996, Franchi-Lu-Wheeden 1996) si ottiene subito:
- $\forall \Omega' \Subset \Omega$, $p \geq 1$, $\exists c, r_0 > 0$, tali che:

1. (disuguaglianza di Sobolev). $\exists k > 1$ tale che

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |\varphi(x)|^{kp} \, dx \right)^{1/kp} \leq c\rho \left(\frac{1}{|B|} \int_B |X\varphi(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(B)$, con $B = B(x, \rho)$, $\rho \leq r_0$, $x \in \Omega'$, (dove si considerano le sfere rispetto alla distanza d_1).

2. (disuguaglianza di Poincaré di tipo p-p). $\forall \varphi \in C^\infty(B)$,

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |\varphi(x) - \varphi_B|^p \, dx \right)^{1/p} \leq c\rho \left(\frac{1}{|B|} \int_B |X\varphi(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Parte 3. Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré. (2) Teoria di Moser

- Consideriamo ora un operatore variazionale del 2° ordine:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} X_i^* \left(a_{ij} \left(x \right) X_j u \right)$$

con $X_1, ..., X_n$ campi di Hörmander nonsmooth (X_i^* trasposto di X_i), e

$$\lambda \left| \xi \right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left(x \right) \xi_i \xi_j \leq \lambda^{-1} \left| \xi \right|^2$$

per qualche $\lambda > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, q.o. $x \in \Omega$.

Parte 3. Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré. (2) Teoria di Moser

- Consideriamo ora un operatore variazionale del 2° ordine:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} X_i^* \left(a_{ij}(x) X_j u \right)$$

con $X_1, ..., X_n$ campi di Hörmander nonsmooth (X_i^* trasposto di X_i), e

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda^{-1} |\xi|^2$$

per qualche $\lambda > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, q.o. $x \in \Omega$.

- Le disuguaglianze di Sobolev e la Poincaré 2-2 ottenute permettono di ripetere il classico metodo iterativo di Moser, e ottenere:

Parte 3. Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré. (2) Teoria di Moser

- Consideriamo ora un operatore variazionale del 2° ordine:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} X_i^* \left(a_{ij}(x) X_j u \right)$$

con $X_1, \ldots, X_n$ campi di Hörmander nonsmooth (X_i^* trasposto di X_i), e

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda^{-1} |\xi|^2$$

per qualche $\lambda > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, q.o. $x \in \Omega$.

- Le disuguaglianze di Sobolev e la Poincaré 2-2 ottenute permettono di ripetere il classico metodo iterativo di Moser, e ottenere:
- una disuguaglianza di Harnack invariante per cambiamenti di scala, per soluzioni locali positive di $Lu = 0$;

Parte 3. Conseguenze della disuguaglianza di Poincaré. (2) Teoria di Moser

- Consideriamo ora un operatore variazionale del 2° ordine:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} X_i^* \left(a_{ij}(x) X_j u \right)$$

con $X_1, ..., X_n$ campi di Hörmander nonsmooth (X_i^* trasposto di X_i), e

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda^{-1} |\xi|^2$$

per qualche $\lambda > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, q.o. $x \in \Omega$.

- Le disuguaglianze di Sobolev e la Poincaré 2-2 ottenute permettono di ripetere il classico metodo iterativo di Moser, e ottenere:
- una disuguaglianza di Harnack invariante per cambiamenti di scala, per soluzioni locali positive di $Lu = 0$;
- limitatezza e Hölderianità locale per soluzioni locali di $Lu = 0$.

Strategie usate

- Per provare, per campi nonsmooth, risultati che sono noti nel caso smooth, ci sono 2 strategie possibili:

Strategie usate

- Per provare, per campi nonsmooth, risultati che sono noti nel caso smooth, ci sono 2 strategie possibili:
    1. Approssimare i campi nonsmooth con opportuni campi smooth, e cercare di dedurre il risultato voluto per approssimazione;

Strategie usate

- Per provare, per campi nonsmooth, risultati che sono noti nel caso smooth, ci sono 2 strategie possibili:
  1. Approssimare i campi nonsmooth con opportuni campi smooth, e cercare di dedurre il risultato voluto per approssimazione;
  2. costruire ex-novo nel caso nonsmooth dimostrazioni valide nelle ipotesi più deboli.

Strategie usate

- Per provare, per campi nonsmooth, risultati che sono noti nel caso smooth, ci sono 2 strategie possibili:
  1. Approssimare i campi nonsmooth con opportuni campi smooth, e cercare di dedurre il risultato voluto per approssimazione;
  2. costruire ex-novo nel caso nonsmooth dimostrazioni valide nelle ipotesi più deboli.
- La nostra teoria è costruita con un misto delle due strategie, cercando volta per volta la via più semplice. (La via più semplice è la prima, quando è percorribile).

Strategie usate

- Per provare, per campi nonsmooth, risultati che sono noti nel caso smooth, ci sono 2 strategie possibili:
  1. Approssimare i campi nonsmooth con opportuni campi smooth, e cercare di dedurre il risultato voluto per approssimazione;
  2. costruire ex-novo nel caso nonsmooth dimostrazioni valide nelle ipotesi più deboli.
- La nostra teoria è costruita con un misto delle due strategie, cercando volta per volta la via più semplice. (La via più semplice è la prima, quando è percorribile).
- Prima parte (doubling...): tecnica di approssizione regolare

Strategie usate

- Per provare, per campi nonsmooth, risultati che sono noti nel caso smooth, ci sono 2 strategie possibili:
  1. Approssimare i campi nonsmooth con opportuni campi smooth, e cercare di dedurre il risultato voluto per approssimazione;
  2. costruire ex-novo nel caso nonsmooth dimostrazioni valide nelle ipotesi più deboli.
- La nostra teoria è costruita con un misto delle due strategie, cercando volta per volta la via più semplice. (La via più semplice è la prima, quando è percorribile).
- Prima parte (doubling...): tecnica di approssizione regolare
- Seconda parte (connettività...): tecniche nonsmooth

Strategie usate

- Per provare, per campi nonsmooth, risultati che sono noti nel caso smooth, ci sono 2 strategie possibili:
  1. Approssimare i campi nonsmooth con opportuni campi smooth, e cercare di dedurre il risultato voluto per approssimazione;
  2. costruire ex-novo nel caso nonsmooth dimostrazioni valide nelle ipotesi più deboli.
- La nostra teoria è costruita con un misto delle due strategie, cercando volta per volta la via più semplice. (La via più semplice è la prima, quando è percorribile).
- Prima parte (doubling...): tecnica di approssizione regolare
- Seconda parte (connettività...): tecniche nonsmooth
- Terza parte (Poincaré):

Disuguaglianza di Poincaré. Strategia dimostrativa (1)

- Si applica l'approccio generale sviluppato da Lanconelli-Morbidelli, Ark. Mat. 2000, che consiste nel derivare la Poincaré da una proprietà che essi chiamano "rappresentabilità delle sfere metriche per mezzo di mappe quasi esponenziali controllabili".

Disuguaglianza di Poincaré. Strategia dimostrativa (1)

- Si applica l'approccio generale sviluppato da Lanconelli-Morbidelli, Ark. Mat. 2000, che consiste nel derivare la Poincaré da una proprietà che essi chiamano "rappresentabilità delle sfere metriche per mezzo di mappe quasi esponenziali controllabili".
- Per applicare la teoria di Lanconelli-Morbidelli si sfruttano i risultati dimostrati nella parte 2 *rispetto alla distanza di controllo* d_1.

Disuguaglianza di Poincaré. Strategia dimostrativa (1)

- Si applica l'approccio generale sviluppato da Lanconelli-Morbidelli, Ark. Mat. 2000, che consiste nel derivare la Poincaré da una proprietà che essi chiamano "rappresentabilità delle sfere metriche per mezzo di mappe quasi esponenziali controllabili".
- Per applicare la teoria di Lanconelli-Morbidelli si sfruttano i risultati dimostrati nella parte 2 *rispetto alla distanza di controllo* d_1.
- Per costruire la mappa quasiesponenziale richiesta dalla teoria si utilizza l'approssimazione regolare dei campi (tecnica della parte 1).

Disuguaglianza di Poincaré. Strategia dimostrativa (1)

- Si applica l'approccio generale sviluppato da Lanconelli-Morbidelli, Ark. Mat. 2000, che consiste nel derivare la Poincaré da una proprietà che essi chiamano "rappresentabilità delle sfere metriche per mezzo di mappe quasi esponenziali controllabili".
- Per applicare la teoria di Lanconelli-Morbidelli si sfruttano i risultati dimostrati nella parte 2 *rispetto alla distanza di controllo* d_1.
- Per costruire la mappa quasiesponenziale richiesta dalla teoria si utilizza l'approssimazione regolare dei campi (tecnica della parte 1).
- Per dimostrare che questa mappa quasiesponenziale è controllabile si fanno ancora calcoli "espliciti" lavorando in ipotesi di regolarità limitata.

Disuguaglianza di Poincaré. Strategia dimostrativa (1)

- Si applica l'approccio generale sviluppato da Lanconelli-Morbidelli, Ark. Mat. 2000, che consiste nel derivare la Poincaré da una proprietà che essi chiamano "rappresentabilità delle sfere metriche per mezzo di mappe quasi esponenziali controllabili".
- Per applicare la teoria di Lanconelli-Morbidelli si sfruttano i risultati dimostrati nella parte 2 *rispetto alla distanza di controllo* d_1.
- Per costruire la mappa quasiesponenziale richiesta dalla teoria si utilizza l'approssimazione regolare dei campi (tecnica della parte 1).
- Per dimostrare che questa mappa quasiesponenziale è controllabile si fanno ancora calcoli "espliciti" lavorando in ipotesi di regolarità limitata.
- Perciò la dimostrazione della Poincaré utilizza tutti i risultati precedenti del lavoro, e un mix delle due strategie delle parti precedenti.

Disuguaglianza di Poincaré. Strategia dimostrativa (2)

- Per motivi tecnici, inoltre, è agevole verificare le ipotesi della teoria sotto l'ipotesi aggiuntiva che i campi siano liberi. La Poincaré viene stabilita quindi prima per campi liberi, e poi nel caso generale (come già faceva Jerison nel caso smooth).

Disuguaglianza di Poincaré. Strategia dimostrativa (2)

- Per motivi tecnici, inoltre, è agevole verificare le ipotesi della teoria sotto l'ipotesi aggiuntiva che i campi siano liberi. La Poincaré viene stabilita quindi prima per campi liberi, e poi nel caso generale (come già faceva Jerison nel caso smooth).
- Questo si basa sul fatto che il metodo di "lifting" alla Rothschild-Stein, per costruire, a partire dai campi iniziali X_i, dei campi liberi $\widetilde{X}_i$ che vivono in uno spazio di dimensione maggiore e si proiettano sui campi X_i, vale anche nella nostra situazione nonsmooth. Questa parte della teoria è stata sviluppata in dettaglio e ampliata nell'altro lavoro citato, [B.B.P., Indiana].