Equazioni non variazionali uniformemente ipoellittiche

Marco Bramanti
Politecnico di Milano

Maiori (SA) 21-24 aprile 2004, convegno del gruppo di ricerca "Aspetti teorici ed applicativi di equazioni a derivate parziali"

Abstract

In questa comunicazione, dopo un'introduzione agli operatori "somme di quadrati di Hörmander" si fa una rassegna dei risultati noti su una classe di equazioni finora non molto studiate: le "equazioni non variazionali uniformemente ipoellittiche". Ci si concentra quindi in particolare su certe stime di tipo BMO ottenute in questo contesto in un lavoro in collaborazione con Luca Brandolini (Università di Bergamo): sia

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j u$$

dove $X_1, X_2, \ldots, X_q$ sono un sistema di campi vettoriali di Hörmander in $\mathbb{R}^n$ ($n > q$), $\{a_{ij}\}$ è una matrice $q \times q$ uniformemente ellittica, e le funzioni $a_{ij}(x)$ sono continue, con un opportuno controllo sul modulo di continuità. Si prova che:

$$\|X_i X_j u\|_{BMO(\Omega')} \leq c \Big\{ \|Lu\|_{BMO(\Omega)} + \|u\|_{BMO(\Omega)} \Big\}$$

per domini $\Omega' \subset \subset \Omega$ regolari in un senso opportuno. Inoltre, lo spazio BMO nella stima precedente può essere sostituito con una scala di spazi del tipo studiato da Spanne. Nel caso particolare uniformemente ellittico, questi risultati sono stati ottenuti solo abbastanza recentemente. Per ottenere il risultato, si dimostrano diversi risultati sugli integrali singolari e frazionari in spazi di tipo omogeneo, in relazione con spazi di funzioni di tipo BMO.

Operatori di Hörmander

Consideriamo un operatore differenziale lineare del second'ordine

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\partial_{x_k} \tag{1}$$

definito in un dominio Ω di $\mathbb{R}^n$, la cui parte principale ha forma quadratica semidefinita positiva.

Anche se i coefficienti sono C^∞, se l'operatore è degenere può non avere proprietà di regolarità. Ossia Lu regolare non implica u regolare.

Un operatore lineare a coefficienti C^∞ si dice **ipoellittico** in Ω se, quando l'equazione $Lu = f$ è soddisfatta in Ω nel senso delle distribuzioni, si ha che se $f \in C^\infty(A)$ con $A \subset \Omega$, anche $u \in C^\infty(A)$.

Si dimostra che un operatore è ipoellittico se e solo se possiede una soluzione fondamentale che è C^∞ fuori dall'origine.

Se un operatore è del tipo (1), in ogni aperto in cui il rango della matrice a_{ij} è costante, è possibile definire degli operatori differenziali del prim'ordine ("campi vettoriali")

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x)\partial_{x_j} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, q \quad (q + 1 \leq n)$$

tali che

$$L = \sum_{i=1}^{q} X_i^2 + X_0.$$

(L'operatore è degenere se e solo se i campi sono meno di n).

Perché questa rappresentazione è conveniente?

Consideriamo il commutatore di due campi vettoriali:

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$$

(è ancora un campo vettoriale). Si dice che un sistema di campi vettoriali C^∞, $X_0, X_1, \ldots, X_q$ soddisfa in Ω la ***condizione di Hörmander*** (al passo s) se lo spazio vettoriale generato in ogni punto di Ω da:

i campi X_i;
i commutatori $[X_i, X_j]$;
i commutatori dei campi X_k coi commutatori $[X_i, X_j]$;
$\ldots$ e così via fino al passo s

è tutto $\mathbb{R}^n$.

Esempio. Laplaciano di Kohn in 3 variabili (x, y, t):

$$L = X_1^2 + X_2^2$$

con:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t};\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t};\ [X_1, X_2] = -4\frac{\partial}{\partial t}.$$

I campi $X_1, X_2, [X_1, X_2]$ generano $\mathbb{R}^3$ in ogni punto: vale la condizione di Hörmander.

Teorema di Hörmander (Acta Mathematica, 1967).
Se $X_0, X_1, \ldots, X_q$ è un sistema di campi vettoriali reali C^∞ che soddisfano la condizione di Hörmander in Ω, allora l'operatore

$$L = \sum_{i=1}^{q} X_i^2 + X_0 \tag{2}$$

è ipoellittico in Ω.

Si dice "operatore di Hörmander" un operatore (2) che soddisfa le ipotesi del teorema precedente, e "somma di quadrati di Hörmander" nel caso in cui manca X_0.

Il teorema di Hörmander dice che un operatore con forma quadratica semidefinita positiva, degenere, continua ad avere alcune buone proprietà di regolarità degli operatori non degeneri (es. ellittici, parabolici) se le "direzioni mancanti" nelle derivate che compaiono nell'equazione sono recuperate dai commutatori dei campi.

Perché studiare gli operatori di Hörmander

Già negli anni '30, Kolmogorov aveva studiato certe classi specifiche di operatori ultraparabolici (oggi detti "di Kolmogorov-Fokker-Planck") che descrivono l'evoluzione di un sistema stocastico in molti modelli fisici, ed in particolare aveva esplicitamente costruito, per certi operatori molto degeneri di questo tipo, una soluzione fondamentale regolare fuori dal polo, mostrando quindi, in quei casi particolari, che questi operatori, a dispetto del loro carattere degenere, avevano buone proprietà di regolarità (ipoellitticità).

L'esempio di Kolmogorov (1934) è il seguente: l'operatore ultraparabolico (degenere):

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) = X_1^2 + X_0$$

ha soluzione fondamentale

$$\Gamma(t,x,y,0,0,0) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi t^2}\exp\left(-\frac{x^2}{4t} - \frac{3\left(y - \frac{tx}{2}\right)^2}{t^3}\right)$$

regolare fuori da $(0,0,0)$, e pertanto è ipoellittico.

Altre classi di operatori di Hörmander, ed in particolare operatori "somme di quadrati" nascono poi naturalmente nello studio di problemi geometrici in più variabili complesse: il più semplice esempio di operatore (non ellittico) somma di quadrati è il laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg (Kohn, 1963), che è legato allo studio dei domini pseudoconvessi di $\mathbb{C}^n$ (il gruppo di Heisenberg si indentifica con il bordo della sfera unitaria in $\mathbb{C}^n$, modello di dominio pseudoconvesso).

Un'altra motivazione per studiare campi vettoriali di Hörmander viene dalla *proprietà di connettività*: 2 punti qualsiasi di $\mathbb{R}^n$ possono essere congiunti con una sequenza di archi di linee integrali dei campi, se questi soddisfano la condizione di Hörmander ("teorema di Chow", 1939; v. anche Rashevski, 1938). Grazie a questa proprietà, un sistema di campi di Hörmander induce una distanza (detta di Carnot-Carathéodory), che definisce la geometria naturale ("sub-riemanniana") in cui studiare questi campi vettoriali. Questi fatti hanno un'interpretazione naturale nello studio dello spazio delle fasi di un sistema anolonomo, o nello studio della teoria geometrica dei controlli, contesti in cui questi fatti (proprietà di "connettività", o "controllabilità") erano noti ben prima del teorema di Hörmander.

Note storiche. Gromov scrive che qualche forma del teorema "di Chow" di connettività era già nota a Lagrange nel contesto nella meccanica nonolonoma. Il nome "distanza di Carnot-Carathéodory" è stato coniato da Gromov-Lafontaine-Pansu, 1981, con riferimento alla presentazione assiomatica della termodinamica, data da Carathéodory nel 1909, in cui viene usata una versione del teorema di connettività enunciata col linguaggio delle forme differenziali: l'esistenza (assunta per assioma), in ogni intorno di ogni punto nello spazio degli stati, di punti inaccessibili muovendosi lungo cammini quasistatici adiabatici, implica l'esistenza di un fattore integrante per la forma differenziale del calore (l'entropia).

Alcuni risultati noti per gli operatori di Hörmander

Bony, 1969, Ann. Inst. Fourier:
Il problema di Dirichlet per un operatore di Hörmander è ben posto, in senso classico, su domìni opportuni.

Kohn, 1973, Proc. Symp. Pure Math.:
Per gli operatori di Hörmander vale la *stima subellittica*:

$$\|u\|_{H^{\epsilon,2}(\mathbb{R}^n)} \leq c\Big\{\|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\Big\}$$

(per qualche $\epsilon > 0$. Se fosse $\epsilon = 2$ sarebbe una stima ellittica).

Per avere stime L^p sulle derivate seconde di u, bisogna considerare le derivate "lungo i campi", anziché quelle "cartesiane":

Folland, 1975, Arkiv för Math.:
se l'operatore L è invariante per traslazioni (a sinistra) rispetto a un'operazione di gruppo di Lie, e omogeneo di grado 2 rispetto a una famiglia di dilatazioni che sono automorfismi di gruppo, allora esiste una soluzione fondamentale di L omogenea (rispetto a queste dilatazioni), e vale la seguente stima locale:

$$\sum_{i,j=1}^{q} \|X_i X_j u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega')} + \|X_0 u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega')} \leq$$

$$\leq c\Big\{\|Lu\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}\Big\} \tag{3}$$

per ogni $p \in (1, \infty)$, $\Omega' \subset \Omega$.

Ci si riferisce comunemente alle ipotesi di Folland parlando di "operatori di Hörmander sui gruppi di Carnot (o gruppi omogenei)".

Rothschild-Stein, 1976, Acta Mathematica:
il risultato precedente vale per *qualsiasi* sistema di campi vettoriali di Hörmander.

(In questo lavoro il caso generale viene ricondotto, con un'opportuna tecnica, al caso particolare studiato da Folland).

Fefferman-Phong, 1981, Proc. Conference in Harmonic Analysis in honor of A. Zygmund:
la distanza CC ($=$ di Carnot-Carathéodory) indotta da un sistema di campi di Hörmander è localmente doubling.

Sanchez Calle, 1984, Invent. Math.,
Nagel-Stein-Weinger, 1985, Acta Math.:
la funzione di Green di un operatore di Hörmander soddisfa stime naturali di crescita, in termini della distanza CC.

(Estensione al caso non omogeneo delle proprietà della soluzione fondamentale di Folland).

Direzioni in cui generalizzare

$$\sum_{i=1}^{q} X_i^2 \to \begin{cases} \text{"op. variazionale":} & \sum_{i,j=1}^{q} X_i^*(a_{ij}(x)X_j) \\ \text{"op. non variazionale":} & \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x)X_iX_j \end{cases}$$

con $a_{ij}(x)$ matrice $q \times q$ uniformemente ellittica
(NB: $x \in \mathbb{R}^n$, $q < n$).

Primo obiettivo di questa comunicazione è fare un po' di pubblicità allo studio delle equazioni nonvariazionali.

Infatti sulle equazioni variazionali c'è una vasta letteratura, che non proverò nemmeno a riassumere. Sulle non variazionali, al contrario, a quanto mi consta finora esistono solo i seguenti lavori (elenco cronologico):

1. Xu, C. J., 1992, Comm. Pure Appl. Math.
2. Bramanti-Brandolini, 2000, Rend. Sem. Mat. Torino
3. Bramanti-Brandolini, 2000, Trans. Amer. Math. Soc.
4. Bonfiglioli-Lanconelli-Uguzzoni, 2002, Adv. Differential Equations
5. Capogna-Han, 2003, Contemp. Math., 320, A.M.S.
6. Danielli-Garofalo-Nhieu, 2003, Proc. Amer. Math. Soc.
7. Bramanti-Brandolini, to appear on Revista Matematica Iberoamericana
8. Bonfiglioli-Uguzzoni, to appear in Forum Math.
9. Bonfiglioli-Lanconelli-Uguzzoni, to appear on Trans. Am. Math. Soc.
10. Gutiérrez-Montanari, to appear in Comm in P.D.E.
11. Bonfiglioli-Uguzzoni, preprint
12. A. Domokos, J. Manfredi: Preprint.
13. G. Di Fazio, A. Domokos, M.S. Fanciullo, J. Manfredi: Preprint.

Alcune motivazioni per studiare equazioni di questo tipo sono emerse abbastanza recentemente. Ci sono problemi geometrici in più variabili complesse, in particolare legati allo studio della curvatura di Levi (lavori di Citti, Lanconelli, Montanari, Tomassini, Slodkowski), che portano a scrivere equazioni nonlineari le cui linearizzate hanno proprio questa forma, o il loro analogo evolutivo. Ci sono poi studi recenti sui modelli della percezione visiva umana (completamento delle immagini) in cui compaiono ancora equazioni scritte in questa forma (lavori di Citti, Sarti, Manfredini).

Vediamo una breve rassegna sui risultati esistenti per questa classe di equazioni, che nei nostri lavori abbiamo chiamato "equazioni nonvariazionali uniformemente ipoellittiche".

Equazioni non variazionali uniformemente ipoellittiche: lo stato dell'arte

Passiamo in rassegna ai lavori in cui si studia la classe di equazioni:

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j$$

o eventualmente $L + a_0(x)X_0, L - \partial_t$.

I risultati ottenuti valgono, di volta in volta, a vari livelli di generalità:

Ipotesi generali:

X_i campi di Hörmander (quindi a coefficienti C^∞),

matrice a_{ij} uniformemente ellittica nella sua dimensione:

$$\mu|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x)\ \xi_i \xi_j \leq \mu^{-1}|\xi|^2$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^q$, q.o. $x \in \Omega$, qualche $\mu > 0$.

In più, caso per caso si chiede che gli a_{ij} appartengano a un'opportuna classe funzionale, definita con riferimento alla distanza indotta dai campi vettoriali X_i (es. coefficienti hölderiani).

NB: se i coefficienti sono costanti o C^∞, l'operatore si può riscrivere come operatore di Hörmander. Altrimenti L non è un operatore di Hömander (né un operatore ipoellittico).

Ipotesi di omogeneità:

Talvolta si chiede inoltre che i campi di Hörmander soddisfino le "ipotesi di Folland": in $\mathbb{R}^n$ esiste una struttura di gruppo di Carnot (traslazioni + dilatazioni) rispetto alla quale i campi sono invarianti per traslazioni e omogenei di grado 1 per dilatazioni.

Casi particolari:

certi risultati sono stati provati solo in casi particolari:

gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$, oppure $\mathbb{H}^n$; gruppi di tipo Heisenberg; gruppi di Carnot di passo 2.

I risultati ottenuti:

1. Stime locali tipo Schauder

Xu, C. J., 1992, Comm. Pure Appl. Math.

Ipotesi (quasi) generali. Stime di Schauder (regolarità locale in spazi $C^{k,\alpha}$ adattati ai campi) per equazioni

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j$$

con coefficienti a_{ij} holderiani.

Capogna-Han, 2003, Contemp. Math., 320, A.M.S.

Ipotesi di omogeneità. Equazione $Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j u = f$. Se i coefficienti a_{ij} e il termine noto f sono "holderiani in un punto", la soluzione u ha 2 derivate "holderiane in un punto". Questa nozione è definita in termini di classi di Morrey-Campanato.

2. Stime locali tipo L^p o BMO

Bramanti-Brandolini, 2000, Rend. Sem. Mat. Torino;
Bramanti-Brandolini, 2000, Trans. Amer. Math. Soc.;
Bramanti-Brandolini, to appear on "Rev. Mat. Iberoam.".

Nelle ipotesi generali, per la classe

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j$$

con coefficienti VMO, si provano stime locali L^p sulle derivate seconde in termini della norma L^p del termine noto. Nel caso omogeneo la classe di operatori è più generale:

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j + a_0(x) X_0$$

con X_0 campo omogeneo di grado 2, X_i di grado 1 per $i = 1, \dots, n$. La stima ottenuta è:

$$\sum_{i,j=1}^{q} \|X_i X_j u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega')} + \|X_0 u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega')} \leq$$

$$\leq c \Big\{ \|Lu\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \Big\}$$

$p \in (1, \infty)$, $\Omega' \subset \Omega$.

Nel caso generale, se i coefficienti sono continui (con opportune ipotesi sul modulo di continuità, ad esempio è sufficiente Dini continui) vale anche una stima BMO delle derivate seconde in termini della norma BMO del termine noto:

$$\sum_{i,j=1}^{q} \|X_i X_j u\|_{BMO(\Omega')} \leq c \Big\{ \|Lu\|_{BMO(\Omega)} + \|u\|_{BMO(\Omega)} \Big\}$$

3. Stime L^p in ipotesi "tipo Cordes".

Per l'operatore

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j$$

nel caso generale, a coefficienti solo limitati, è stata fatta una teoria "tipo Cordes": se la matrice a_{ij} è opportunamente vicina alla matrice identità, valgono delle stime L^p locali sulle derivate seconde di u in termini della norma L^p di Lu, purché p sia vicino a 2:

G. Di Fazio, A. Domokos, M.S. Fanciullo, J. Manfredi: Preprint

L'analogo risultato nel caso particolare del gruppo di Heisenberg era stato precedentemente ottenuto da:

A. Domokos, J. Manfredi: Preprint.

4. Studio della soluzione fondamentale dell'operatore L

Tipicamente, nello studiare L, il punto di partenza è congelare i coefficienti a_{ij} in un punto e applicare all'operatore di Hörmander risultante i risultati "classici" di Hörmander, Folland, Rothchild-Stein, Nagel-Stein-Wainger, Sanchez-Calle... Ad esempio, sono note stime naturali sulla soluzione fondamentale per operatori di Hörmander. Il prossimo gruppo di lavori ha invece l'obiettivo di indagare l'esistenza e le proprietà (stime di crescita) della soluzione fondamentale (o la funzione di Green su domini limitati) dell'operatore

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j$$

(o il suo analogo "del calore", $\partial_t - L$), con coefficienti a_{ij} holderiani, nel caso omogeneo. Questo porta anche alla dimostrazione di una disuguaglianza di Harnack invariante per quest'operatore.

Questi risultati sono raggiunti complessivamente nell'arco di vari lavori recenti:

Bonfiglioli-Uguzzoni, to appear in Forum Math.
Bonfiglioli-Lanconelli-Uguzzoni, 2002, Adv. Diff. Equations
Bonfiglioli-Lanconelli-Uguzzoni, to appear on Trans. A. M. S.
Bonfiglioli-Uguzzoni, preprint

La logica di questi lavori è studiare l'operatore del calore, e ottenere il caso stazionario a partire da quello di evoluzione, integrando nel tempo.

Per l'operatore del calore, si studia prima il caso in cui la matrice a_{ij} è costante, e si stabiliscono stime gaussiane sulla soluzione fondamentale (da sopra, da sotto, per le derivate, per la differenza di 2 sol. fondam. corrispondenti a 2 matrici diverse), uniformi al variare della matrice a_{ij} nella classe di ellitticità (cioè dipendenti dalla matrice solo mediante la costante di ellitticità). Poi si passa al caso dei coefficienti holderiani.

5. Principio di massimo di tipo Alexandrov-Bakelman-Pucci

Un problema naturale è: esiste un analogo del principio di massimo [ABP] per questa classe di equazioni? Per esempio, si potrebbe congetturare che, nel caso omogeneo, per l'operatore

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j$$

a coefficienti limitati, valesse una stima del tipo

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_Q \cdot \text{diam}(\Omega)^Q \|Lu\|_{L^Q(\Omega)}$$

dove Q è la dimensione omogenea, Ω un dominio limitato, se u è una funzione "due volte derivabile" e nulla al bordo di Ω. (Se i coefficienti a_{ij} sono costanti, questo segue da fatti noti). Questo è un problema aperto difficile, su cui esistono pochi risultati, parziali, positivi e negativi, validi in situazioni molto particolari.

Nel lavoro:

Gutiérrez-Montanari, to appear in Comm in PDE.

si considera, sul gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$, l'operatore

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) \left(\frac{X_i X_j + X_j X_i}{2} \right)$$

(a_{ij} simmetrica), e si prova che, se u è una funzione H-convessa nella palla B_R e nulla al bordo,

$$\max_{\Omega} |u(x)| \leq c \int_{B_R} \left(\det \mathcal{H}(u) + 12 u_t^2 \right) dz$$

dove $\mathcal{H}(u)$ è la matrice hessiana simmetrizzata $\left(\frac{X_iX_j+X_jX_i}{2}\right)$ e c dipende dalla distanza del punto di massimo dal bordo della palla.

Questo risultato si basa su ed è intrecciato a lo studio della nozione di convessità nei gruppi di Carnot e in particolare nel gruppo di Heisenberg, studio iniziato da:

Lu-Manfredi-Stroffolini, 2004, Calc. Var. Partial Differential Equations

Nel lavoro:
Danielli-Garofalo-Nhieu, 2003, Proc. Amer. Math. Soc.
è dimostrato con contresempi che, nei gruppi "di tipo Heisenberg", una stima

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\|Lu\|_{L^p(\Omega)}$$

è falsa per ogni $p < Q$ (come è naturale aspettarsi).

Nella parte rimanente di questa comunicazione, vorrei parlare del più recente dei miei lavori su questo argomento, in cui si affronta il problema della regolarità locale di tipo BMO per le derivate seconde.

M. Bramanti, L. Brandolini:

Estimates of BMO type for singular integrals on spaces of homogeneous type and applications to hypoelliptic PDEs

To appear on
"Revista Matematica Iberoamericana"

Il problema e il risultato sono molto tecnici, tuttavia è interessante il fatto che in questo caso si estende un risultato che perfino nel caso uniformemente ellittico è solo parzialmente "ben noto da tempo", ed è nuovo anche nel caso di operatori di Hörmander.

Di conseguenza, e per alleggerire il discorso, discuterò questo risultato riferendomi principalmente alla sua controparte ellittica.

Introduzione

Sia L un operatore nonvariazionale uniformemente ellittico in $\mathbb{R}^n$,

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}.$$

E' noto che se u risolve il problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

con Ω dominio limitato di $\mathbb{R}^n$ e a_{ij} uniformemente continui in Ω, allora

$$\left\| u_{x_i x_j} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^p(\Omega)} \text{ per ogni } p \in (1, \infty)$$

(v. ad es. [Gilbarg-Trudinger]).

Inoltre, la condizione di continuità può essere allentata richiedendo

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \cap VMO(\Omega).$$

(**Chiarenza-Frasca-Longo: 1991, Ricerche di Mat.; 1993, Trans. Amer. Math. Soc.**)

E' noto che queste stime L^p non valgono per $p = \infty$ e $p = 1$, già per l'operatore di Laplace.

Una domanda abbastanza naturale è chiedersi se lo spazio BMO di John-Nirenberg e lo spazio di Hardy H^1 possano, rispettivamente, sostituire L^∞ e L^1 in stime simili.

Richiamiamo alcune definizioni.

- Lo spazio BMO:

$$\|a\|_* = \sup_{B_r} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |a(x) - a_{B_r}| \, dx < \infty$$

- Lo spazio VMO:

$$\eta_f(r) = \sup_{\rho < r} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} \left| a(x) - a_{B_\rho} \right| \, dx$$

$$\|a\|_* < \infty, \eta_f(r) \to 0 \text{ per } r \to 0.$$

- Più in generale (una famiglia di sottospazi di BMO):

Lo spazio BMO_φ:

$f \in L^1$:

$$\|f\|_{*,\varphi} = \sup_{B_r} \frac{1}{|B_r(x)|\varphi(r)} \int_{B_r} |f(y) - f_{B_r}| \, dy < \infty$$

per $\varphi(r) \downarrow 0$ per $r \to 0$, φ con opportune proprietà.

- Per esempio: $f(r) = \frac{1}{|\log r|}$ (per r piccolo) dà lo spazio LMO:

$$\sup_{B_r} \frac{|\log r|}{|B_r|} \int_{B_r} |a(x) - a_{B_r}| \, dx < \infty.$$

Risultati noti per l'equazione ellittica $Lu = f$ con $f \in BMO$

- **Peetre, 1966, Ann. Mat. Pura Appl.**

Risultato locale. Sia:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}$$

con a_{ij} continue, con modulo di continuità $o(1/|\log t|)$; allora per ogni funzione test di supporto abbastanza piccolo,

$$\left\| u_{x_i x_j} \right\|_* \leq c \left\{ \| Lu \|_* + \left\| u_{x_i x_j} \right\|_2 \right\}$$

Questa stima sfrutta un altro risultato di Peetre di interesse indipendente: se K è un operatore di integrale singolare classico di Calderón-Zygmund, allora

$$\| Kf \|_* \leq c \| f \|_* .$$

- **Chang-Krantz-Stein, 1993, Journal of Funct. Anal.**

Stime globali negli spazi di Hardy H^p per le derivate seconde della soluzione del problema di Dirichlet per il laplaciano su domini limitati.

- **Chang-Dafni-Stein, 1999, Trans. Amer. Math. Soc.**

Migliorano le precedenti stime H^p e stabiliscono stime BMO nello stesso contesto (laplaciano).

- **Chang-Li, 1999, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa.**

Stime H^1 e BMO, fino al bordo, per le derivate seconde della soluzione del problema di Dirichlet per operatori ellittici a coefficienti Dini continui.

(Risultato parzialmente sovrapposto ai risultati di Peetre, che prova solo stime locali, ma in compenso fa ipotesi un po' più deboli sui coefficienti).

L'enunciato preciso del nostro risultato è il seguente:

Teorema. *Sia*

$$L = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x) X_i X_j$$

dove:

1. $X_1, \ldots, X_q$ *sono un sistema di campi di Hörmander definiti in un dominio limitato* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *(*$n \geq q$*);*

2. la matrice $\{a_{ij}(x)\}$ *è uniformemente ellittica su* $\mathbb{R}^q$*:*

$$\mu |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leq \mu^{-1} |\xi|^2$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^q$*, q.o.* $x \in \Omega$*,* $\mu > 0$*.*

3. $a_{ij}(x)$ *sono funzioni continue in* Ω *con modulo di continuità che è* $o(1/|\log t|)$*. Allora*

$$\|X_i X_j u\|_{BMO(\Omega')} \leq c \Big\{ \|Lu\|_{BMO(\Omega)} + \|u\|_{BMO(\Omega)} \Big\}$$

per $\Omega' \subset \Omega$*, purché* Ω, Ω' *siano "regolari" nel senso seguente:*

Sia d la distanza di Carnot-Carathéodory indotta in $\mathbb{R}^n$ dal sistema $X_1, X_2, \ldots, X_q$, sia $B_r(x)$ la d-sfera di raggio r e centro x.

Diciamo che Ω è d-regolare se

$$|B_r(x) \cap \Omega| \geq c |B_r(x)|$$

$\forall x \in \Omega, 0 < r < \text{diam}(\Omega)$.

Lemma.

i. Le sfere metriche sono d*-regolari.*

ii. L'unione finita di domini d*-regolari è* d*-regolare.*

iii. Se Ω *è un dominio limitato* d*-regolare, allora* (Ω, d, dx) *è uno spazio di tipo omogeneo.*

Osservazione. Il risultato che dimostriamo effettivamente è molto più generale. Definiamo la scala di spazi (introdotti da Spanne, 1965, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa) $BMO_\varphi(\Omega)$:

$$f \in BMO_\varphi(\Omega) \text{ se } f \in L^1(\Omega) \text{ e}$$

$$\|f\|_{*,\varphi,\Omega} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ r < \operatorname{diam}(\Omega)}} \frac{1}{|B_r(x) \cap \Omega| \varphi(r)} \int_{B_r \cap \Omega} |f(y) - f_{B_r \cap \Omega}| \, dy$$

è finita, con φ funzione crescente e tale che:

φ è doubling: $\varphi(2t) \leq c\varphi(t)\ \forall t > 0$;

φ si annulla al più con velocità logaritmica:

$$\frac{\varphi(tr)}{\varphi(r)} \geq \frac{c}{(1 + |\log t|)^\beta}$$

$\forall r > 0, t \in (0,1), c, \beta$ costanti positive opportune.

Sia $S^{2,\varphi}(\Omega)$ lo spazio BMO-Sobolev delle funzioni $u \in S^{2,1}(\Omega)$ tali che u, $X_i u$, $X_i X_j u$ appartengono a $BMO_\varphi(\Omega)$. Sia

$$\widetilde{\varphi}(r) = \frac{\varphi(r)}{1 + \int_r^{2R} \frac{\varphi(t)}{t} dt}, \text{ con } R = \operatorname{diam}(\Omega).$$

Supponiamo che i coefficienti a_{ij} siano continui e appartengano a $VMO_{\widetilde{\varphi}}(\Omega)$. Allora

$$\|X_i X_j u\|_{BMO_\varphi(\Omega')} \leq c \Big\{ \|Lu\|_{BMO_\varphi(\Omega)} + \|u\|_{BMO(\Omega)} \Big\}$$

per $\Omega' \subset \Omega$, purché Ω, Ω' siano d-regolari.

Ingredienti della dimostrazione

Nel caso ellittico (Peetre 1966), l'idea è di sfruttare la continuità dei coefficienti per applicare il cosiddetto "trucco di Korn" e ridurre le stime locali all'utilizzo di formule di rappresentazione per l'operatore "a coefficienti costanti" e a opportuni risultati sugli operatori di integrale singolare. Precisamente, si utilizza:

- il fatto che un integrale di CZ classico sia continuo da BMO in BMO (Peetre, 1966, Ann. Mat. Pura Appl.);
- il fatto che la moltiplicazione per una funzione "un po' meglio di BMO" (precisamente: LMO) porti BMO in BMO (Stegenga, 1976, Am. Jorn. Math.);
- alcune proprietà degli spazi BMO di un dominio (argomento non molto studiato);
- una serie di tecniche standard di spazi di Sobolev e operatori ellittici.

Nel caso dei campi vettoriali di Hörmander, la situazione è la seguente:

A. Analisi reale

E' noto che un sistema di campi vettoriali di Hörmander induce una distanza (detta di Carnot-Carathéodory) nello spazio ambiente, localmente doubling.

Questo consente, se il dominio su cui si studia l'equazione ha un minimo di regolarità, di inquadrare la teoria degli spazi di tipo BMO e degli integrali singolari nel contesto astratto degli spazi di tipo omogeneo nel senso di Coifman-Weiss (1971).

In questo contesto abbiamo dovuto anzitutto fabbricare gli strumenti di analisi reale necessari:

- continuità BMO-BMO di un operatore di integrale singolare ;
- continuità BMO-BMO di un operatore di integrale frazionario;
- continuità BMO-BMO dell'operatore di moltiplicazione per una funzione LMO.

Questi 3 teoremi sono stati dimostrati in spazi di tipo omogeneo generali, purché di misura finita (sufficiente per le applicazioni, dato il carattere locale delle nostre stime). Per gli integrali singolari (che negli spazi omogenei generali non hanno una definizione assiomatica univoca, standard), occorre richiedere una certa proprietà di media nulla del nucleo.

B. Applicazione agli operatori di Hörmander

Ricordo che la via normale (e finora unica) per provare stime a priori per operatori di Hörmander in ipotesi generali, inaugurata dal lavoro di Rothschild-Stein (Acta Math. 1976), è ricondursi, con una opportuna tecnica, detta di *lifting e approssimazione*, al caso particolare (Folland, 1975, Arkiv), in cui i campi vettoriali sono invarianti per traslazioni e omogenei di grado 1 per dilatazioni, rispetto ad una struttura di "gruppo di Carnot".

Nella situazione generale si ha a disposizione solo la struttura degli spazi di tipo omogeneo: distanza e misura (doubling), ma nella situazione particolare (che approssima quella generale) la struttura è molto più ricca, e permette di fare calcoli altrimenti privi di significato.

Il problema è dimostrare certi risultati nella situazione generale in cui manca una nozione naturale di omogeneità, a partire dal caso particolare in cui questa nozione esiste.

Ad esempio, nel contesto dei gruppi di Carnot, la soluzione fondamentale di un operatore di Hörmander soddisfa stime di crescita e proprietà di media nulla esattamente analoghe a quelle del caso euclideo; grazie a queste, anche nel caso generale lo studio degli operatori di integrale singolare può essere ricondotto a quello di operatori il cui nucleo soddisfa le proprietà richieste dal nostro risultato astratto.

Le tecniche di analisi reale viste, applicate opportunamente al contesto degli operatori uniformemente ipoellittici, forniscono, in prima battuta, stime valide per *funzioni test a supporto piccolo*. Per passare da queste stime a quelle (sempre locali ma) senza restrizione sul supporto della funzione, occorrono tecniche di funzioni cutoff, partizioni dell'unità, ecc., che in questo contesto introducono nuovi problemi (non banali già nel caso ellittico: difatti Peetre nel '66 si fermò alla stima su sfere piccole).

C. Proprietà degli spazi BMO su un dominio

Una proprietà utile (e non ovvia) quando si ricorre a tecniche di partizioni dell'unità, funzioni cutoff ecc., è la possibilità di controllare la norma BMO sull'unione di sfere B_r con la somma delle norme BMO su sferette B_{4r}.

D. Proprietà delle norme di "Sobolev-BMO" (in questo contesto)

Le tecniche usate sono un ibrido delle idee utili nel caso L^p e nel caso C^α (già nel caso classico), come è naturale date le caratteristiche dello spazio BMO. Questa estensione non è immediata.

In sintesi, i tipi di difficoltà a lavorare in questo contesto, sono:

• Non c'è omogeneità (una famiglia di dilatazioni adattate all'operatore differenziale): la tecnica di ottenere una certa invarianza di scala in una disuguaglianza operando una dilatazione non funziona (esempio: per provare la disuguaglianza di interpolazione).

• Tutto ciò che ha a che vedere col comportamento dell'operatore alla frontiera di un dominio è problematico (possibilità di punti caratteristici, per il carattere degenere dell'operatore): spianamento di frontiera, stime fino al bordo, teoremi di prolungamento, sono tecniche di cui è meglio cercare di fare a meno.

Un punto delicato, ad esempio, è la disuguaglianza di interpolazione per norme di "Sobolev-BMO":

$$\|X_i f\|_{BMO} \leq \varepsilon \|\Delta f\|_{BMO} + \frac{c}{\varepsilon^\alpha}\|f\|_{BMO}$$

per $i = 1, \ldots, q$, dove $\Delta f \equiv \sum_{i=1}^{q} X_i^2 f$, e

$$\|f\|_{BMO} = \|f\|_* + \|f\|_{L^1}$$

Questo è un esempio di problema data dalla mancanza di omogeneità: sgradevolmente, si trova $\frac{c}{\varepsilon^\alpha}$ e non c/ε; una generica dipendenza $c(\varepsilon)$ non sarebbe sufficiente agli scopi voluti, questa dipendenza rende possibile (ma non immediato) ottenere il risultato voluto.

Appendice 1. Esempi di "funzioni logaritmiche" con vari gradi di regolarità

Se f è la seguente funzione (definita in un intorno dell'origine), allora f appartiene allo spazio$\ldots$ (e a quelli precedenti, ma non ai successivi)

a. Funzioni discontinue

$\log\lvert x\rvert$		BMO
$\lvert\log\lvert x\rvert\rvert^{\alpha}$	$(0<\alpha<1)$	VMO
$\log\lvert\log\lvert x\rvert\rvert$		LMO
$\lvert\log\lvert\log\lvert x\rvert\rvert\rvert^{\alpha}$	$(0<\alpha<1)$	$VLMO$

Le precedenti funzioni sono illimitate. Per avere esempi di funzioni limitate negli spazi sopra, considerare $\sin f(x)$.

b. Funzioni continue

Per $0<\alpha\leq 1$, $\frac{1}{\lvert\log\lvert x\rvert\rvert^{\alpha}} \in L^{1+\alpha}MO$ (continua, non Dini continua)

in particolare:

$\frac{1}{\log\lvert x\rvert} \in L^{2}MO$ (continua, non Dini continua)

$\frac{1}{\lvert\log\lvert x\rvert\rvert^{1+\varepsilon}} \in L^{2+\varepsilon}MO$ (Dini continua, non Hölderiana)

Analoghi esempi valgono nel contesto astratto degli spazi di tipo omogeneo, sostituendo $\lvert x\rvert$ con $d(x,x_0)$.

Appendice 2. Contresempi alle stime L^p per $p = \infty, 1$. (Laplaciano)

1. La funzione

$$u(x,y) = xy\log\left(x^2+y^2\right)$$

risolve il problema di Dirichlet sul disco unitario:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = \frac{8xy}{x^2+y^2} \equiv f(x,y) & \text{per } x^2+y^2<1 \\ u=0 & \text{per } x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Notiamo che $f \in L^\infty$, ma

$$u_{xy} = \frac{2\left(x^4+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \log\left(x^2+y^2\right)$$

è illimitata (ma BMO).

2. La funzione

$$u(x,y) = \sqrt{\log\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}$$

risolve il problema di Dirichlet sul disco unitario:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = -\frac{1}{(x^2+y^2)\log^{3/2}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)} \equiv f(x,y) & \text{per } x^2+y^2<1 \\ u=0 & \text{per } x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Notiamo che $f \in L^1$, ma

$$u_{xx} = \frac{-x^2+(x^2-y^2)\log\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2\log^{3/2}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)} \notin L^1.$$

3. Se $f \in BMO$, allora le derivate seconde di u apartengono a BMO. Per esempio:

$$u(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\log\left(x^2+y^2\right)$$

risolve il problema di Dirichlet sul disco unitario:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 4(2+\log(x^2+y^2)) \equiv f(x,y) & \text{per } x^2+y^2<1 \\ u=0 & \text{per } x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Notiamo che $f \in BMO$, e le derivate seconde di u appartengono a BMO.

Recapiti:

Prof. Marco Bramanti
Dip. di Matematica
Politecnico di Milano
via Bonardi 9. 20133 Milano

Tel. 02 2399 4567
Fax 02 2399 4629
e-mail: marbra@mate.polimi.it
http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/

Dalla mia pagina web è possibile scaricare i file pdf dei miei lavori.

Bibliografia

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I: Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 623-727; II: Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 35-92.

[2] A. Bellaïche: The tangent space in sub-Riemannian geometry. Progress in Mathematics, vol.144, 1996 Birkhauser, 1-78.

[3] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: Uniform Gaussian estimates of the fundamental solutions for heat operators on Carnot groups, Adv. Differential Equations, 7 (2002), 1153-1192.

[4] A. Bonfiglioli, F. Uguzzoni: Families of diffeomorphic sub-Laplacians and free Carnot groups, to appear in Forum Math.

[5] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: Fundamental solutions for non-divergence form operators on stratified groups, to appear on Trans. Am. Math. Soc.

[6] A. Bonfiglioli, F. Uguzzoni: preprint

[7] J.-M. Bony: Principe du maximum, inégalite de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 19 1969 fasc. 1, 277-304 xii.

[8] M. Bramanti: Commutators of integral operators with positive kernels. Le Matematiche, vol. 49 (1994), fasc.I, 149-168.

[9] M. Bramanti, L. Brandolini: L^p-estimates for uniformly hypoelliptic operators with discontinuous coefficients on homogeneous groups. Rend. Sem. Mat. dell'Univ. e del Politec. di Torino. Vol. 58, 4 (2000), 389-433.

[10] M. Bramanti, L. Brandolini: L^p-estimates for nonvariational hypoelliptic operators with VMO coefficients. Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 2, 781-822.

[11] M. Bramanti, L. Brandolini: Estimates of BMO type for singular integrals on spaces of homogeneous type and applications to hypoelliptic PDES, to appear on Revista Matematica Iberoamericana

[12] M. Bramanti, M.C. Cerutti: Commutators of singular integrals on homogeneous spaces. Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 10 (1996), no. 4, 843-883.

[13] M. Bramanti, M.C. Cerutti: Commutators of singular integrals and fractional integrals on homogeneous spaces. Harmonic analysis and operator theory (Caracas, 1994), 81-94, Contemp. Math., 189, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[14] N. Burger: Espace des fonctions à variation moyenne bornée sur un espace de nature homogène. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286 (1978), 139-142.

[15] L. Capogna, Q. Han: Pointwise Schauder estimates for second order linear equations in Carnot groups. Harmonic analysis at Mount Holyoke (South Hadley, MA, 2001), 45-69, Contemp. Math., 320, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[16] D. C. Chang, G. Dafni, E.M. Stein: Hardy spaces BMO, and boundary value problems for the laplacian on a smooth domain in $\mathbb{R}^n$. Trans. of the Amer. Math. Soc., vol.351, n.4, 1999, 1605-1661.

[17] D. C. Chang, S.Y. Li: On the boundedness of multipliers, commutators and the second derivatives of Green's operators on H^1 and BMO. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, vol. 28 (1999), 341-356.

[18] D. C. Chang, S. Krantz, E. M. Stein. H^p theory on a smooth domain in $\mathbb{R}^n$ and elliptic boundary value problems. Journal of funct. analysis 114 (1993), 286-347.

[19] F. Chiarenza, M. Frasca, P. Longo: Interior $W^{2,p}$-estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients. Ricerche di Mat. XL (1991), 149-168.

[20] F. Chiarenza, M. Frasca, P. Longo: $W^{2,p}$-solvability of the Dirichlet problem for non divergence elliptic equations with VMO coefficients. Trans. of Am. Math. Soc., 336 (1993), n. 1, 841-853.

[21] R. Coifman, R. Rochberg, G. Weiss: Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. Annals of Math., 103 (1976) 611-635.

[22] R. Coifman, G. Weiss: Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogenes. Lecture Notes in Mathematics, n. 242. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[23] D. Danielli, N. Garofalo, D. M. Nhieu: On the best possible character of the L^Q norm in some a priori estimates for non-divergence form equations in Carnot groups. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 11, 3487-3498.

[24] G. Di Fazio, A. Domokos, M.S. Fanciullo, J. Manfredi: Subelliptic Cordes estimates for Hörmander vector fields and applications to p-sublaplacian. Preprint.

[25] A. Domokos, J. Manfredi: Subelliptic Cordes estimates. Preprint.

[26] A. Domokos, J. Manfredi: Cordes conditions and subelliptic estimates. Preprint.

[27] A. Domokos, J. Manfredi: $C^{1,\alpha}$-regularity for p-harmonic functions in the Heisenberg group for p near 2. Preprint.

[28] C. Fefferman, D.H. Phong: Subelliptic eigenvalue problems. Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II (Chicago, Ill., 1981), 590-606, Wadsworth Math. Ser., Wadsworth, Belmont, CA, 1983.

[29] G. B. Folland: Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups, Arkiv for Math. 13, (1975), 161-207.

[30] N. Garofalo, D.-M. Nhieu: Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory Spaces and the Existence of Minimal Surfaces. Comm. Pure Appl. Math., vol. XLIX, 1081-1144 (1996).

[31] D. Gilbarg, N. S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Second Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokio 1983.

[32] C.E. Gutiérrez, A. Montanari, Maximum and comparison principles for convex functions on the Heisenberg group, to appear in Comm in PDE.

[33] E. Harboure, C. Segovia-J. L. Torrea. Boundedness of commutators of fractional and singular integrals for the extreme values of p. Illinois Journ. of Math., vol.41, n.4 (1997), 676-700.

[34] F. John, L. Nirenberg: On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 175-188.

[35] J.J. Kohn: Pseudo-differential operators and hypoellipticity. Partial differential equations (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIII, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971), pp. 61-69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

[36] A. Korn: Zwei Anwendungen der Methode der sukzesivven Annäherungen. Schwarz Festschrift, Berlin 1914, 215-229.

[37] Song-Ying Li. Toeplitz Operators on Hardy space $H^p(S)$ with $0 < p \leq 1$. Integr. Equat. Oper. Th., vol. 15 (1992), 807-824.

[38] R. A. Macias, C. Segovia: Lipschitz Functions on Spaces of Homogeneous Type. Adv. in Math., (1979), 257-270.

[39] A. Nagel-E. M. Stein-S. Wainger: Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties. Acta Mathematica, 155 (1985), 130-147.

[40] J. Peetre. On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 72 (1966), 295-304.

[41] Pérez. Endpoint estimates for commutators of singular integral operators. Journ. of funct. anal. 128 (1995) 163-185.

[42] L. P. Rothschild, E. M. Stein: Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math., 137 (1976), 247-320.

[43] A. Sanchez-Calle: Fundamental solutions and geometry of sum of squares of vector fields. Inv. Math., 78 (1984), 143-160.

[44] D. Sarason: Functions of vanishing mean oscillations. Trans. of Am. Math. Soc., 207 (1975), 391-405.

[45] S. Spanne. Some functions defined using the mean oscillation over cubes. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), 391-405.

[46] D. A. Stegenga. Bounded Toeplitz operators on H^1 and applications of the duality between H^1 and the functions of bounded mean oscillation. American Journal of Mathematics, vol. 98, no.3, (1976) 573-589.

[47] E. M. Stein: Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton Univ. Press. Princeton, New Jersey, 1993.

[48] A. Torchinsky: Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, vol. 123 coll. "Pure and Applied Mathematics", Academic Press, 1986.

[49] M. Transirico, M. Troisi, A. Vitolo: BMO spaces on domains of $\mathbb{R}^n$. Ricerche di Matematica, vol. 45 (1996), 355-378.

[50] C.J. Xu: Regularity for quasilinear second-order subelliptic equations. Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), no. 1, 77-96.